Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 518, 2022 г.

А. И. Храбров

ИНЪЕКТИВНЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ВОГНУТОСТИ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

§1. Введение

В перечислительной комбинаторике возникает множество целочисленных рекуррентных последовательностей, связанных с подсчетом числа комбинаторных конструкций того или иного вида. В большинстве своем для этих последовательностей не существует явных формул, поэтому важной информацией об их поведении являются асимптотические разложения. Однако комбинаторные последовательности обычно экспоненциального роста, поэтому асимптотические формулы имеют существенную погрешность. В связи с этим для понимания поведения конкретной последовательности оказывается полезным наличие у нее логарифмической выпуклости или вогнутости (т. е. монотонности отношения соседних ее членов). Логарифмическая выпуклость исследовалась также и у двухпараметрических комбинаторных чисел. Так для чисел Стирлинга первого и второго рода она была установлена в работах [19] и [23], для числовых треугольников, заданных двучленным рекуррентным соотношениям и, в частности, для чисел Эйлера в статье [22]. Обсуждению вопросов, связанных с логарифмической выпуклостью комбинаторных последовательностей, посвящены статьи Бренти [9] и Стенли [29]. Логарифмическая выпуклость чисел Моцкина была доказана аналитически Айгнером [2] и чуть позже комбинаторно Калланом [11]. Для большого количества комбинаторных последовательностей, удовлетворяющих трехчленным рекуррентным соотношениям (например, чисел Файна, Шрёдера и Риордана см. [3]) логарифмическая выпуклость была установлена в работах [24, 33, 34] аналитически и в работе [30] комбинаторно (для чисел Шрёдера это ранее было сделано в работе [16]), для некоторых других популярных комбинаторных последовательностей в работах [5, 8, 12, 17]. Для числа

Ключевые слова: логарифмическая выпуклость, обобщенные числа Каталана, вторичные структуры РНК.

вторичных структур РНК логарифмическая выпуклость доказана аналитически в работе [14], а для некоторых других обобщений чисел Каталана — в работах [15, 31]. Различные комбинаторные доказательства логарифмической выпуклости можно найти в работах [6, 18, 21, 26]. Много информации, связанной с логарифмической выпуклостью комбинаторных последовательностей, приводится в монографии Мезё [25] и обзорах [7, 29]. Обсуждение преобразований, сохраняющих логарифмической выпуклость последовательностей, есть в работе [24].

§2. Формулировки и определения

Определение. Последовательность неотрицательных чисел a_0, a_1, a_2, … называется *логарифмически выпуклой*, если для любого n выполняется неравенство $a_n^2 \leqslant a_{n-1}a_{n+1}$. Если же для любого n выполняется неравенство $a_n^2 \geqslant a_{n-1}a_{n+1}$, то последовательность называется *логарифмически вогнутой*.

Определение треугольников $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$. Для заданных положительных чисел q, r, s и t построим два числовых треугольника.

Треугольник $a_{i,j}$ задается рекуррентным соотношением

$$a_{i+1,j+1} = qa_{i-1,j-1} + ra_{i-1,j} + sa_{i,j-1} + ta_{i,j} \quad \text{при } i, j \geqslant 0 \tag{1}$$

и граничными условиями: $a_{0,0} = 1$ и $a_{i,j} = 0$ при

1) при $i < j$;
2) при $j \leqslant 0$ за исключением случая $i = j = 0$.

Треугольник $b_{i,j}$ задается тем же рекуррентным соотношением

$$b_{i+1,j+1} = qb_{i-1,j-1} + rb_{i-1,j} + sb_{i,j-1} + tb_{i,j} \quad \text{при } i, j \geqslant 0, \tag{2}$$

но другими граничными условиями: $b_{0,0} = 1$ и $b_{i,j} = 0$ при $i \leqslant 0$ или $j \leqslant 0$, за исключением случая $i = j = 0$.

Замечание. Для случая $q = s = t = 1$ треугольники приведены на рис. 1 (полностью нулевые строки и диагонали опущены). Главная диагональ треугольника $a_{i,j}$ (т. е. последовательность $a_{i,i}$) дает количества вторичных структур РНК (последовательность `A004148` из [35]). Это одно из обобщений чисел Каталана, рекуррентное соотношение для диагонали

$$a_{n+1,n+1} = a_{n,n} + a_{1,1}a_{n-2,n-2} + a_{2,2}a_{n-3,n-3} + \ldots + a_{n-1,n-1}a_{0,0}.$$

Соседняя диагональ $a_{i+1,i}$ — последовательность `A166297` из [35].

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & \iddots \\
 & & & & & & & 82 & \dots \\
 & & & & & & 37 & 66 & \dots \\
 & & & & & 17 & 28 & 25 & \dots \\
 & & & & 8 & 12 & 9 & 4 & \dots \\
 & & & 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & \dots \\
 & & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 26 & 80 & 153 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 32 & 63 & 80 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 3 & 13 & 26 & 32 & 26 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 13 & 9 & 4 & \dots \\
0 & 0 & 2 & 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}
$$

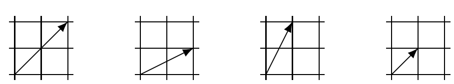
Рис. 1. Треугольники $a_{i,j}$ (слева) и $b_{i,j}$ (справа) для единичных коэффициентов.

Треугольник $b_{i,j}$ — это треугольник `A125250` из [35], его диагональ $b_{i,i+1}$ дает число блоков во всех вторичных структурах РНК на i вершинах (последовательность `A110320` из [35]). Также это количества «шнуровок ботинка» (подробности см. в [1]).

Более подробное обсуждение частных случаев см. в §4.

Реализация некоторых других комбинаторных последовательностей в виде диагонали рекуррентно построенного треугольника рассматривалась Айгнером в работе [4].

Комбинаторная реализация чисел $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$. Через $\mathcal{N}_{i,j}$ обозначим множество ломаных, со звеньями четырех видов, указанных на рис. 2, ведущих из начала координат в точку (i, j). Множество $\mathcal{M}_{i,j}$ состоит только из тех ломаных, лежащих в $\mathcal{N}_{i,j}$, которые расположены не выше прямой $y = x$. Для краткости будем писать $\mathcal{M}_i$ вместо $\mathcal{M}_{i,i}$.



$q \qquad r \qquad s \qquad t$

Рис. 2. Звенья ломаной с весом.

Каждому виду звеньев ломаной припишем вес (см. рис. 2), для удобства будем называть эти типы звеньев буквами q, r, s и t. Весом $w(P)$ ломаной P назовем произведение весов всех входящих в нее ребер. Индукцией по i и j легко проверить, что $a_{i,j}$ равно суммарному весу всех ломаных из $\mathcal{M}_{i,j}$, то есть

$$a_{i,j} = \sum_{P\in\mathcal{M}_{i,j}} w(P). \tag{3}$$

Аналогично для треугольника $b_{i,j}$ будем рассматривать ломаные с весом из $\mathcal{N}_{i,j}$. Тогда

$$b_{i,j} = \sum_{P\in\mathcal{N}_{i,j}} w(P). \tag{4}$$

Теорема 1. *Если $q \leqslant t^2$ и $rs \leqslant qt$, то при любом фиксированном n последовательность $c_k = b_{n-k,n+k}$ логарифмически вогнута.*

Теорема 2. *Если $q \leqslant t^2$ и $rs \leqslant qt$, то при любом фиксированном j последовательность $b_{i,j}$ логарифмически вогнута по i.*

Теорема 3. *Если $q \leqslant t^2$ и $rs \leqslant qt$, то при любом фиксированном i последовательность $b_{i,j}$ логарифмически вогнута по j.*

Теорема 4. *Если $rs \leqslant qt$ и $q^2 \leqslant rst$, то последовательность $a_{i,i}$ логарифмически выпукла. Если $q \leqslant t^2$ и $rs \leqslant qt$, то последовательность $a_{i,i}$ логарифмически выпукла при больших i.*

Замечание. Из условий $rs \leqslant qt$ и $q^2 \leqslant rst$ следует условие $q \leqslant t^2$.

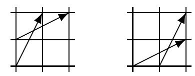
Теорема 5. *Если $q \leqslant t^2$ и $rs \leqslant qt$, то при любом фиксированном j последовательность $a_{i,j}$ логарифмически вогнута по i.*

Замечание. Поскольку естественная запись треугольника $b_{i,j}$ повернута на 135° по часовой стрелке относительно рис. 1 (как, например, у треугольника Паскаля) диагонали $i + j = \mathrm{const}$ соответствуют строкам повернутого треугольника. Таким образом, теорема 1 утверждает логарифмическую вогнутость строк повернутого треугольника, что является достаточно полезной информацией о поведении элементов данного треугольника (аналогично логарифмической вогнутости биномиальных коэффициентов C_n^k по верхнему индексу).

§3. Инъективные доказательства теорем

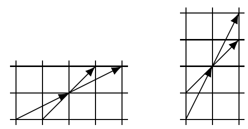
Классификация пересечений ломаных. Рассмотрим две не имеющие общих вершин ломаные P и Q со звеньями, изображенными на рис. 2, такие, что вершины ломаной P лежат по разные стороны от ломаной Q. У этих ломаных обязательно есть пересечения. Они могут быть одноточечными, а могут состоять из общего участка.

1) *Одноточечные пересечения.* Рассмотрим звено ломаной P, во внутренней точке которого происходит пересечение. Им не может быть звено t. Звено s может пересекаться только со звеном r и таких пересечений два вида (см. рис. 3). Звено q может пересекаться с ломаной Q только в своей середине, и таких пересечений два вида (см. рис. 4).



(a) (b)

Рис. 3. Пересечения звеньев r и s

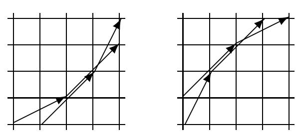


(c_0) (d_0)

Рис. 4. Пересечения звена q.

2) *Ломаные с общим участком.* Этот участок должен быть прямым и составленным из нескольких подряд идущих звеньев q (иначе у ломаных найдется общая вершина). Он может быть образован пересечением частей ломаных, у которых количества звеньев q а) одинаковы; б) отличаются на 1.

а) Пусть в участках по k звеньев q и участок ломаной P начинается раньше. Тогда в начало прямого участка ломаной Q должно прийти звено r или s, а из конца прямого участка ломаной P должно уйти звено такого же вида (в противном случае ломаные P и Q на этом участке лишь соприкасаются, но не пересекаются). Поэтому возможны два случая (см. рис. 5).

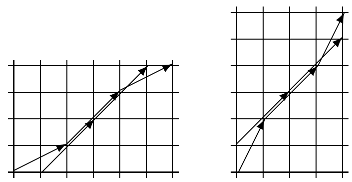


(e_k) (f_k)

Рис. 5. Участок с одинаковым количеством звеньев q для $k = 1$.

б) Пусть у ломаной P будет k звеньев q, у ломаной Q будет $k+1$ звено q. Тогда в начало участка ломаной P должно прийти звено r или

s, а из конца участка ломаной P должно уйти звано такого же вида. Поэтому возможны лишь два случая (см. рис. 6). Отметим, что эти случаи отличаются от случаев (c_0) и (d_0) добавлением по k звеньев q в каждую ломаную.



(c_k) (d_k)

Рис. 6. Участок с разным количеством звеньев q для $k = 1$.

Доказательство теоремы 1. Достаточно установить неравенство $b_{i,j}^2 \geqslant b_{i-1,j+1}b_{i+1,j-1}$. С помощью соотношения (4) оно может быть записано в виде

$$\left(\sum_{P\in\mathcal{N}_{i,j}} w(P)\right)^2 = w(\mathcal{N}_{i,j})^2 \geqslant w(\mathcal{N}_{i-1,j+1})w(\mathcal{N}_{i+1,j-1}) = \\ = \sum_{P\in\mathcal{N}_{i-1,j+1}} w(P) \sum_{P\in\mathcal{N}_{i+1,j-1}} w(P),$$

или, что тоже самое,

$$\sum_{(P',Q')\in\mathcal{N}_{i,j}\times\mathcal{N}_{i,j}} w(P')w(Q') \geqslant \sum_{(P,Q)\in\mathcal{N}_{i-1,j+1}\times\mathcal{N}_{i+1,j-1}} w(P)w(Q).$$

Для каждой пары ломаных (P, Q) из $\mathcal{N}_{i-1,j+1} \times \mathcal{N}_{i+1,j-1}$ ломаную P отложим с началом в точке $(0, 0)$, а ломаную Q с началом в точке $(-1, 1)$. Тогда ломаная P закончится в точке $(i-1, j+1)$, а ломаная Q — в точке (i, j) (см. левую часть рис. 7). Поскольку ломаные не выходят за пределы полосы $-1 \leqslant x \leqslant i$, а точки $(0, 0)$ и $(i-1, j+1)$ находятся по разные стороны от ломаной Q, ломаные P и Q должны иметь точку пересечения.

Разобьем множество $\mathcal{N}_{i-1,j+1} \times \mathcal{N}_{i+1,j-1}$ на подмножества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. В множество $\mathcal{A}$ поместим все пары ломаных, которые имеют общую вершину, а остальные пары ломаных поместим в множество $\mathcal{B}$. Аналогично разобьем множество $\mathcal{N}_{i,j} \times \mathcal{N}_{i,j}$ на подмножества $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$.

Докажем, что $w(\mathcal{A}) = w(\mathcal{A}')$ и $w(\mathcal{B}) \leqslant w(\mathcal{B}')$.

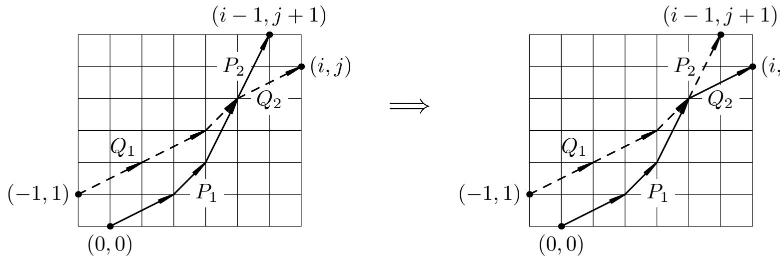


Рис. 7. Перестройка ломаных P и Q, имеющих общую вершину (ломаные Q и Q' проведены пунктиром).

Рассмотрим пару ломаных, принадлежащую $\mathcal{A}$. Пусть p их первая общая вершина (см. рис. 7). Обозначим части ломаных P и Q, на которые она их разбивает через P_1, P_2 и Q_1, Q_2. Тогда ломаная P', составленная из P_1 и Q_2, начинается в точке $(0,0)$, а заканчивается в точке (i,j), поэтому она лежит в $\mathcal{N}_{i,j}$. Ломаная Q', составленная из Q_1 и P_2, начинается в точке $(-1,1)$, а заканчивается в точке $(i-1,j+1)$, значит, она также лежит в $\mathcal{N}_{i,j}$. Кроме того $(P',Q') \in \mathcal{A}'$ и

$$w(P')w(Q') = w(P_1)w(Q_2)w(Q_1)w(P_2) = w(P)w(Q).$$

Стало быть, $w(\mathcal{A}) = w(\mathcal{A}')$.

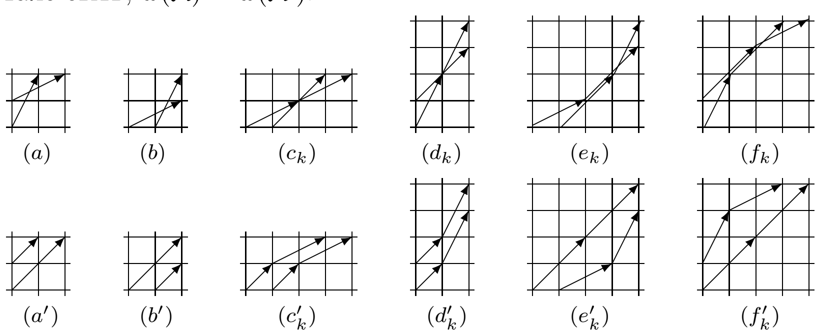


Рис. 8. Переключения звеньев ломаных[1].

[1]В случае произвольного k переключения выглядят так:
для (c_k) пара (rq^kr, q^{k+1}) заменяется на пару (tq^kr, tq^kr);
для (d_k) пара (sq^ks, q^{k+1}) заменяется на пару (tq^ks, tq^ks);
для (e_k) пара (rq^k, q^ks) заменяется на пару $(q^{k+1}, rq^{k-1}s)$;
для (e_k) пара (sq^k, q^kr) заменяется на пару $(q^{k+1}, sq^{k-1}r)$.

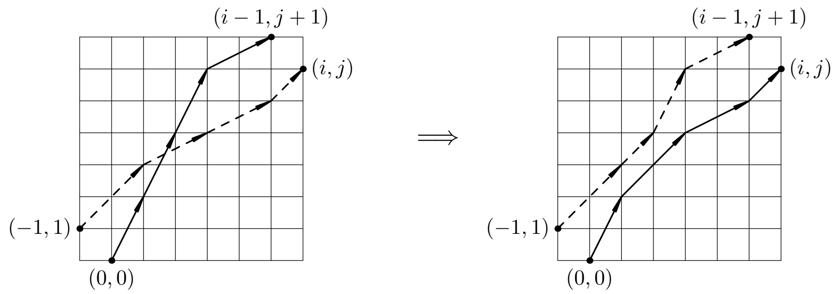


Рис. 9. Переключение $(a) \leftrightarrow (a')$ ломаных, не имеющих общей вершины.

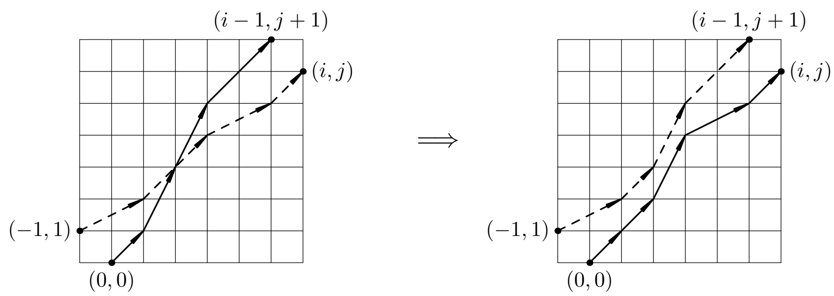


Рис. 10. Переключение $(d_0) \leftrightarrow (d_0')$ ломаных, не имеющих общей вершины.

Далее докажем, что $w(\mathcal{B}) \leqslant w(\mathcal{B}')$. Рассмотрим пару ломаных (P, Q), принадлежащую $\mathcal{B}$. Поскольку у ломаных есть общие точки, у них есть один из фрагментов (a)–(f), изображенных на рис. 8. Отметим, что никакие из 12 приведенных фрагментов не могут накладываться друг на друга. Поэтому переключения в таких фрагментах можно делать независимо. Сделаем всевозможные как прямые, так и обратные переключения фрагментов $(a) \leftrightarrow (a')$, $\ldots$, $(f_k) \leftrightarrow (f_k')$ (см. рис. 9 и 10). Если сделано четное число переключений, то ломаная будет лежать в $\mathcal{B}$, а если нечетное, то в $\mathcal{B}'$. Обозначим множество пар ломаных с четным и нечетным числом переключений через $\mathcal{E}(P, Q)$ и $\mathcal{O}'(P, Q)$.

Для переключений (a) и (b) вес rs меняется на qt; (c_k) вес $q^{2k+1}r^2$ меняется на $q^{2k}r^2t^2$; (d_k) вес $q^{2k+1}s^2$ меняется на $q^{2k}s^2t^2$; (e_k) и (f_k) вес $q^{2k}rs$ не изменяется. Следовательно, разность между суммой весов при нечетном числе переключений и при четном числе переключений равна произведению веса не затрагиваемых переключениями частей ломаных и некоторого количества скобок вида

$$(qt - rs), \quad q^{2k} r^2 (t^2 - q) \text{ и } q^{2k} s^2 (t^2 - q).$$

Поскольку произведение первых членов в скобках будет соответствовать паре ломаных, не имеющих общих точек, т. е. паре ломаных из $\mathcal{N}_{i,j} \times \mathcal{N}_{i,j}$, знак плюс будет соответствовать нечетному количеству переключений, а знак минус — четному. Но каждая из скобок неотрицательна, следовательно, $w(\mathcal{E}(P,Q)) \leqslant w(\mathcal{O}'(P,Q))$.

Возможность из одной пары ломаных (P,Q) из $\mathcal{B}$ с помощью переключений получить другую пару ломаных $(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{B}$. Классом эквивалентности для пары (P,Q) будет множество $\mathcal{E}(P,Q)$, поэтому $\mathcal{B}$ разбивается на такие классы. Для двух таких классов $\mathcal{E}(P,Q)$ и $\mathcal{E}(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ множества $\mathcal{O}'(P,Q)$ и $\mathcal{O}'(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ не пересекаются. Действительно, в противном случае пары ломаных (P,Q) и $(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ получались бы друг из друга цепочкой переключений и, значит, лежали бы в одном классе эквивалентности. Следовательно, $\mathcal{B}'$ разбивается в объединение классов $\mathcal{O}'(P,Q)$ и, возможно, еще некоторого количества пар ломаных, не попадающих ни в один класс. Тогда, просуммировав неравенства $w(\mathcal{E}(P,Q)) \leqslant w(\mathcal{O}'(P,Q))$ по всем классам эквивалентности $\mathcal{E}(P,Q)$, получим, что $w(\mathcal{B}) \leqslant w(\mathcal{B}')$. □

Замечание. В случае, когда $q = t^2$ и $rs = qt$, рассуждение можно сильно упростить. Для пары ломаных (P,Q) из $\mathcal{B}$ нужно двигаться от начала к концу в поисках первого фрагмента с рис. 8 и произвести переключение этого фрагмента. Такой фрагмент обязательно должен найтись, поскольку ломаные пересекаются, но не имеют общих вершин. Новая пара ломаных (P',Q') будет иметь тот же вес и лежать в $\mathcal{B}'$. Это преобразование — инъекция из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}'$, поэтому $w(\mathcal{B}) \leqslant w(\mathcal{B}')$.

Доказательство теоремы 2. Достаточно установить неравенство $b_{i,j}^2 \geqslant b_{i-1,j} b_{i+1,j}$. С помощью соотношения (4) оно может быть записано в виде

$$w(\mathcal{N}_{i,j})^2 \geqslant w(\mathcal{N}_{i+1,j}) w(\mathcal{N}_{i-1,j}).$$

Для каждой пары ломаных (P,Q) из $\mathcal{N}_{i+1,j} \times \mathcal{N}_{i-1,j}$ ломаную P отложим с началом в точке $(0,0)$, а ломаную Q с началом в точке $(1,0)$. Тогда ломаная P закончится в точке $(i+1,j)$, а ломаная Q — в точке (i,j) (см. рис. 11). Эти ломаные должны иметь точку пересечения.

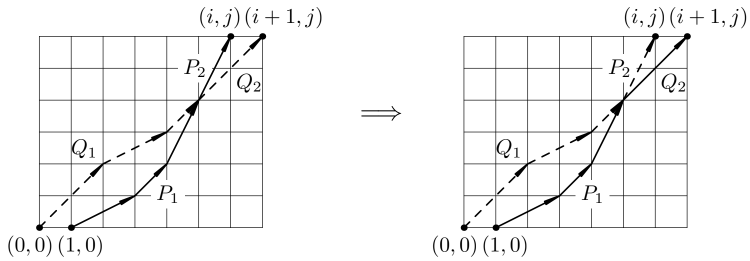


Рис. 11. Перестройка ломаных P и Q, имеющих общую вершину (ломаные Q и Q' проведены пунктиром).

Далее аналогично доказательству теоремы 1 рассмотрим подмножества $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ и установим равенство $w(\mathcal{A}) = w(\mathcal{A}')$ и неравенство $w(\mathcal{B}) \leqslant w(\mathcal{B}')$. □

Доказательство теорем 3 и 5 аналогичны доказательству теоремы 2. □

Доказательство теоремы 4. Достаточно установить неравенство $a_{i,i}^2 \leqslant a_{i-1,i-1}a_{i+1,i+1}$. Запишем его с помощью соотношения (3):

$$\left(\sum_{P\in\mathcal{M}_i} w(P)\right)^2 = w(\mathcal{M}_i)^2 \leqslant w(\mathcal{M}_{i-1})w(\mathcal{M}_{i+1}) = \sum_{P\in\mathcal{M}_{i+1}} w(P) \sum_{P\in\mathcal{M}_{i-1}} w(P),$$

или, что тоже самое,

$$\sum_{(P,Q)\in\mathcal{M}_i\times\mathcal{M}_i} w(P)w(Q) \leqslant \sum_{(P',Q')\in\mathcal{M}_{i+1}\times\mathcal{M}_{i-1}} w(P')w(Q').$$

Для каждой пары ломаных (P, Q) из $\mathcal{M}_i \times \mathcal{M}_i$ ломаную P отложим с началом в точке $(0, 0)$, а ломаную Q с началом в точке $(1, 1)$. Тогда ломаная P закончится в точке (i, i), а ломаная Q — в точке $(i+1, i+1)$ (см. рис. 12). Эти ломаные должны иметь общую точку. Ей будет либо точка их пересечения, либо конец одной из ломаных.

Разобьем множество $\mathcal{M}_i \times \mathcal{M}_i$ на подмножества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. В множество $\mathcal{A}$ поместим все пары ломаных, которые имеют общую вершину, а остальные пары ломаных поместим в множество $\mathcal{B}$. Аналогично разобьем множество $\mathcal{M}_{i-1} \times \mathcal{M}_{i+1}$ на подмножества $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$.

Равенство $w(\mathcal{A}) = w(\mathcal{A}')$ проверяется также как при доказательстве теоремы 1.

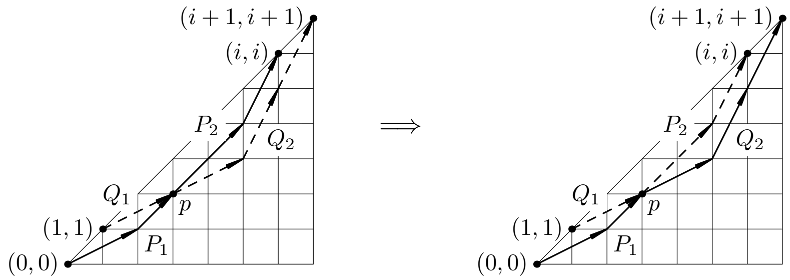


Рис. 12. Перестройка ломаных P и Q, имеющих общую вершину (ломаные Q и Q' проведены пунктиром).

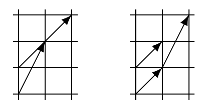


Рис. 13. Переключения конца ломаных.

Установим неравенство $w(\mathcal{B}) \leqslant w(\mathcal{B}')$. Рассмотрим пару ломаных (P, Q), принадлежащую $\mathcal{B}$. Если ломаная P не проходит через начало ломаной Q, а ломаная Q не проходит через конец ломаной P, то у ломаных P и Q есть точка пересечения, а значит, у них есть один из фрагментов (a)–(f), изображенных на рис. 8. Если ломаная Q проходит через конец ломаной P, то у них есть фрагмент (g) (см. рис. 13). Этот фрагмент не обязательно концевой, от него до конца у каждой ломаной еще может идти некоторое количество звеньев q. Если же ломаная P проходит через начало ломаной Q, то обязательно есть фрагмент (j) (см. рис. 14).

Назовем переключения $(a) \leftrightarrow (a')$, …, $(h) \leftrightarrow (h')$ и $(i_k) \leftrightarrow (i'_k)$ при $k \geqslant 1$ переключениями высокого приоритета. Отметим, что никакие из 22 фрагментов высокоприоритетных переключений не могут накладываться друг на друга. Поэтому эти переключения можно делать независимо.

Сделаем всевозможные как прямые, так и обратные высокоприоритетные переключения. Переключение $(i_0) \to (i'_0)$ будем делать, только если нет возможности сделать переключение $(h_k) \to (h'_k)$, а переключение $(j) \to (j')$ будем делать, только если нет возможности сделать переключение $(i_k) \to (i'_k)$ для $k \geqslant 0$. Переключение $(i'_0) \to (i_0)$ будем делать, только если фрагмент (i'_0) не пересекается с фрагментом (d'_k),

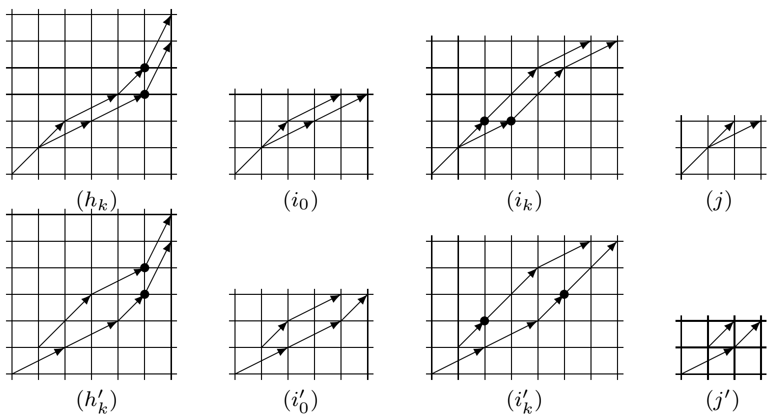


Рис. 14. Переключения начала ломаных[2].

а переключение $(j') \to (j)$ будем делать, только если фрагмент (j') не пересекается с фрагментом (c'_k).

Если сделано четное число переключений, то пара ломаных будет лежать в $\mathcal{B}$, а если нечетное, то в $\mathcal{B}'$. Обозначим множество пар ломаных с четным и нечетным числом переключений через $\mathcal{E}(P,Q)$ и $\mathcal{O}'(P,Q)$.

Для переключений (g) вес qs меняется на st^2; (h_k) вес $q^{2k+1}r^3s^2t$ не меняется; (i_k) вес $q^{2k+1}r^3$ меняется на $q^{2k}r^3t^2$; (j) вес qr меняется на rt^2. Следовательно, разность между суммой весов при нечетном числе переключений и при четном числе переключений равна произведению веса не затрагиваемых переключениями частей ломаных и некоторого количества множителей вида $qt - rs$ и $q^\alpha r^\beta s^\gamma (t^2 - q)$. Поскольку произведение первых членов в скобках будет соответствовать паре ломаных, не имеющих общих точек, т. е. паре ломаных из $\mathcal{M}_{i+1} \times \mathcal{M}_{i-1}$, знак плюс будет соответствовать нечетному количеству переключений, а знак минус — четному. Но каждый из множителей неотрицателен, следовательно, $w(\mathcal{E}(P,Q)) \leqslant w(\mathcal{O}'(P,Q))$.

При $i = 2k$ сделанные перестройки не охватывают еще одну пару ломаных, а именно случай, когда обе ломаные состоят из k звеньев q.

---

[2]На рисунке фрагмент (h_k) приведен для $k = 0$, при $k \geqslant 1$ в места, отмеченные жирными точками, нужно вставить по k звеньев q; фрагмент (i_k) приведен для $k = 1$, при $k \geqslant 2$ в места, отмеченные жирными точками, нужно вставить по $k - 1$ звеньев q.

Эту пару можно заменить на ломаную, состоящую из звена t и $k-1$ звена q, а также ломаную, состоящую из звена r, $k-1$ звена q и звена s. От такой перестройки вес не уменьшается (только здесь используется неравенство $q^2 \leqslant rst$), а новая ломаная не могла быть получена никакими иными перестройками.

Для завершения доказательства осталось повторить рассуждение, аналогичное окончанию доказательства теоремы 1. □

Замечания. **1.** При $q = t^2$ и $rs = t^3$ рассуждение можно сильно упростить по аналогии с упрощением доказательства теоремы 1.

2. Модифицировав последний абзац доказательства можно понять, что при $rs \leqslant qt$ и $q \leqslant t^2$ последовательность $a_{i,i}$ логарифмически выпукла при достаточно больших i.

3. Аналогичными рассуждениями (но с гораздо более утомительным разбором ситуаций, когда одна ломаная проходит через начало или конец другой ломаной) можно показать, что при условии $q \leqslant t^2$ и $q^2 \leqslant rst$ последовательность $a_{n+1,n}$ логарифмически выпукла.

§4. Число вторичных структур РНК и другие частные случаи

Предложение. *Производящая функция для последовательности* $a_{n,n}$ *равна*

$$\frac{b(x) - \sqrt{b^2(x) - 4rsx^3}}{2rsx^3}, \quad \text{где } b(x) = 1 - tx - qx^2.$$

Доказательство. Положим $A_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n,n} x^n$. Из рекуррентного соотношения (1) легко вывести соотношения для производящей функции $A_k(x)$:

$$A_0(x) - 1 = qx^2 A_0(x) + sx^2 A_1(x) + txA_0(x) \quad \text{и}$$
$$A_k(x) = qx^2 A_k(x) + sx^2 A_{k+1}(x) + rxA_{k-1}(x) + txA_k(x) \text{ при } k \geqslant 1.$$

Положим для краткости $p(x) = (1 - tx - qx^2)/(sx^2)$. Тогда

$$\begin{gathered} A_1(x) = p(x)A_0(x) - \frac{1}{sx^2} \quad \text{и} \\ A_{k+1}(x) = p(x)A_k(x) - \frac{r}{sx}A_{k-1}(x) \quad \text{при } k \geqslant 1. \end{gathered} \tag{5}$$

По общей формуле решения рекуррентного соотношения имеем

$$A_k(x) = \alpha(x) f^k(x) + \beta(x) g^k(x) \quad \text{при } k \geqslant 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ корни характеристического уравнения $u^2-p(x)u+\frac{r}{sx}=0$. Поскольку $f(x)g(x) = \frac{r}{sx}$, лишь у одного из решений $f(x)$ и $g(x)$ все коэффициенты при отрицательных степенях x равны нулю, для определенности у $f(x)$. Тогда $\beta(x) = 0$, поскольку в противном случае при достаточно больших k у $A_k(x)$ появились бы ненулевые коэффициенты при отрицательных степенях x. Таким образом,

$$A_k(x) = \alpha(x)f^k(x) = A_0(x)f^k(x) \quad \text{при } k \geqslant 0.$$

Теперь $A_0(x)$ можно найти из первого равенства (5):

$$A_0(x) = \frac{1}{sx^2(p(x)-f(x))} = \frac{b(x)-\sqrt{b^2(x)-4rsx^3}}{2rsx^3},$$

где $b(x) = 1 - tx - qx^2$. □

Определение. Вторичной структурой РНК называется граф имеющий n вершин, ребра которого бывают двух типов:

а) вершины i и $i+1$ соединены ребром первого типа при всех $i \leqslant n-1$;

б) из каждой вершины выходит не более одного ребра второго типа;

в) если вершины i и j, а также вершины k и ℓ соединены ребрами второго типа, причем $i < k < j$, то $i < \ell < j$.

Числа вторичных структур РНК в математической литературе появились в статье Ватермана [32]. Их комбинаторные аспекты обсуждаются в статье [20]. Исследованию их поведения посвящено более сотни статей, обширную библиографию можно найти, например, в работах [10, 13].

Следствие 1. *Пусть $q = r = s = t = 1$, тогда $a_{n,n}$ — количество вторичных структур РНК на n вершинах.*

Доказательство. Производящая функция для последовательности $a_{n,n}$ равна

$$\frac{1-x-x^2-\sqrt{1-2x-x^2-2x^3+x^4}}{2x^3},$$

что соответствует последовательности количеств вторичных структур РНК (см., например, [28] или [35, последовательность `A004148`]), сдвинутой на 1 влево. □

Следствие 2. *Последовательность количеств вторичных структур РНК логарифмически выпукла.*

Замечания. **1.** При $q = r = s = t = 1$ производящая функция для последовательности $a_{n+1,n}$ равна

$$\frac{(1-2x-x^2-\sqrt{1-4x+2x^2+x^4})^2}{2x^5}.$$

Это соответствует сдвинутой на 3 влево последовательности `A166297` из [35].

2. При $q = r = s = 1$ и $t = 2$ производящая функция для последовательности $a_{n,n}$ равна

$$\frac{1-2x-x^2-\sqrt{1-4x+2x^2+x^4}}{2x^3}.$$

Это соответствует сдвинутой на 2 влево последовательности обобщенных чисел Каталана `A025242` [35] (рекуррентное соотношение $c_n = c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_{n-3}c_3$ при $n \geqslant 4$) (см. также [27] и последовательности `A082582` и `A086581`).

3. При $q = r = s = 1$ и $t = 3$ производящая функция для последовательности $a_{n,n}$ равна

$$\frac{1-3x-x^2-\sqrt{1-6x+7x^2+2x^3+x^4}}{2x^3}.$$

Это соответствует последовательности `A178578`, а также последовательности обобщенных чисел Каталана `A025254` (рекуррентное соотношение $c_n = c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_{n-3}c_3$ при $n \geqslant 4$), сдвинутой на 2 влево.

Все эти последовательности также являются логарифмически выпуклыми.

Предложение. *Производящая функция для треугольника $b_{k,n}$ равна*

$$B(x,y) = \frac{1}{1-(qx^2y^2+rx^2y+sxy^2+txy)} = \sum_{k,n=0}^{\infty} b_{k,n}x^ky^n.$$

Доказательство. Напишем разложение функции $B(x,y)$ по степеням $qx^2y^2 + rx^2y + sxy^2 + txy$:

$$B(x,y) = 1+(qx^2y^2+rx^2y+sxy^2+txy)+(qx^2y^2+rx^2y+sxy^2+txy)^2+\ldots$$

Раскроем здесь скобки непосредственно, не приводя подобные члены и не переставляя сомножители, а только вынося коэффициенты из одночленов. Каждый одночлен x^ky^n будет записан в виде «слова», состоящего из «букв» x^2y^2, x^2y, xy^2 и xy. Каждое такое произведение можно интерпретировать как ломаную, где x^2y^2 соответствует первое звено на рис. 2, x^2y — второе звено, xy^2 — третье, xy — четвертое, а коэффициент перед «словом» будет равен весу ломаной. Тогда всевозможным одночленам x^ky^n будут соответствовать ломаные на клетчатой плоскости, идущие из точки $(0,0)$ в точку (k,n). □

Следствие 3. *Производящая функция последовательности $b_{n,n}$ равна*

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{b^2(x) - 4rsx^3}}, \quad \text{где } b(x) = 1 - tx - qx^2.$$

Доказательство. Степенной ряд для функции $B(x,y)$ будет сходящимся в некоторой окрестности нуля, т. е. при $|x| < \varepsilon$ и $|y| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Возьмем теперь $|x| < \varepsilon^3$ и рассмотрим функцию

$$H(z) = B\Big(z, \frac{x}{z}\Big) = -\frac{z}{rxz^2 - b(x)z + sx^2}.$$

Она представляет собой ряд Лорана $\sum_{k,n=0}^{\infty} b_{k,n} z^k \big(\frac{x}{z}\big)^n$ по степеням z (и по неотрицательным степеням x). Этот ряд заведомо сходится в кольце $\varepsilon^2 < |z| < \varepsilon$, а сама функция $H(z)$ рациональна и задана во всей комплексной плоскости. Требуемая производящая функция $C(x)$ — это коэффициент при нулевой степени z в этом ряде. Он вычисляется с помощью интегральной теоремы Коши:

$$C(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{H(z)\,dz}{z} = \sum \operatorname{res} \frac{H(z)}{z},$$

где интегрирование ведется по любой окружности, лежащей в кольце сходимости, а вычеты берутся по особым точкам, попавшим в окружность. Особые точки функции $\frac{H(z)}{z}$ равны $\frac{b(x) \pm \sqrt{b(x)^2 - 4rsx^3}}{2rx}$ и только точка со знаком минус оказывается внутри контура интегрирования, поэтому осталось лишь посчитать вычет в этой точке. □

Замечания. **1.** Комбинаторные треугольники $b_{i,j}$ не очень популярны. В [35] встречается исключительно треугольник для $q = r = s = t = 1$, это `A125250`. Главные диагонали треугольников $b_{i,j}$ в [35] встречаются чаще.

2. При $q = r = s = t = 1$ производящая функция последовательности $b_{n,n}$ равна

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}},$$

что является производящей функцией последовательности `A051286`.

3. При $q = r = s = 1$ и $t = 2$ производящая функция последовательности $b_{n,n}$ равна
$$\frac{1}{\sqrt{1-4x+2x^2+x^4}},$$
что является производящей функцией последовательности `A108626`.

4. При $q = s = 1$ и $r = t = 2$ производящая функция последовательности $b_{n,n}$ равна
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-4x+x^2}},$$
что является производящей функцией последовательности `A101500`.

В заключение автор выражает благодарность К. П. Кохасю за полезные обсуждения, а также анонимному рецензенту, замечания которого позволили исправить огрехи и улучшить текст статьи.

Список литературы

1. К. Кохась, А. Храбров, *Точки на прямых, шнурки и доминошки.* — Матем. просвещение (2015), 139–163.
2. M. Aigner, *Motzkin numbers* . — European J. Combin. **19** (1998), 663–675.
3. M. Aigner, *Catalan-like numbers and determinants.* — J. Combinatorial Theory, Ser. A **87** (1999), 33–51.
4. M. Aigner, *Enumeration via ballot numbers* // Discr. Math. **308**, 2008. P. 2544–2563.
5. E. A. Bender, E. R. Canfield, *Log-concavity and related properties of the cycle index polynomials.* — J. Combinatorial Theory, Ser. A **74** (1996), 57–70.
6. M. Bóna, A. Ehrenborg, *A combinatorial proof of the* log-*concavity of the numbers of permutations with k runs.* — J. Combinatorial Theory, Ser. A **90** (2000), 293–303.
7. P. Brändén, *Unimodality,* log-*concavity, real-rootedness and beyond.* — Handbook of enumerative combinatorics. CRC Press (2015), 437–483.
8. F. Brenti, *Log-concavity and combinatorial properties of Fibonacci lattices.* — European J. Combin. **12** (1991), 459–476.
9. F. Brenti, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: An update.* — Contemp. Math. **178** (1993), 71–89.
10. A. C. Bura, Qijun He, C. M. Reidys, *Loop homology of bi-secondary structures.* — Discrete Math. **344**, No. 6 (2021), Art. 112371.
11. D. Callan, *Notes on Motzkin and Schröder numbers.* — 2000, preprint `http://www.stat.wisc.edu/~callan/notes/`
12. E. R. Canfield, *Engel's inequality for Bell numbers.* — J. Combin. Theory Ser. A **72**, No 1 (1995), 184–187.
13. P. Clote, E. Kranakis, D. Krizanc, *Asymptotic number of hairpins of saturated RNA secondary structures.* — Bull. Math. Biol. **75** (2013), 2410–2430.
14. T. Došlić, D. Veljan, *Logarithmic behavior of some combinatorial sequences.* — Discr. Math., **308** (2008), 2182–2212.

15. T. Došlić, D. Svrtan, D. Veljan, *Enumerative aspects of secondary structures.* — Discr. Math. **285** (2004), 67–82.
16. T. Došlić, *Seven (lattice) paths to* log-*convexity.* — Acta Appl. Math. **110** (2010), 1373–1392.
17. K. Engel, *On the average rank of an element in a filter of the partition lattice.* — J. Combin. Theory, Ser. A **64** (1994), 67–78.
18. H. Han, S. Seo, *Combinatorial proofs of inverse relations and* log-*concavity for Bessel numbers.* — Europ. J. Combin. **29** (2008), 1544–1554.
19. L. H. Harper *Stirling behavior is asymptotically normal.* — Ann. Math. Statist. **38** (1967), 410–414.
20. I. L. Hofacker, P. Schuster, P. F. Stadler, *Combinatorics of RNA secondary structures.* — Discrete Appl. Math., **88** (1998), 207–237.
21. C. Krattenthaler, *Combinatorial proof of the log-concavity of the sequence of matching numbers.* — J. Combinatorial Theory, Ser. A **74** (1996), 351–354.
22. D. C. Kurtz, *A note on concavity properties of triangular arrays of numbers.* — J. Combinatorial Theory, Ser. A **13** (1972), 135–139.
23. E. H. Lieb, *Concavity properties and a generating function for Stirling numbers.* — J. Combinatorial Theory **5** (1968), 203–206.
24. L. L. Liu, Y. Wang, *On the* log-*convexity of combinatorial sequences.* — Adv. Appl. Math. **39** (2007), 453–476.
25. I. Mező, *Combinatorics and number theory of counting sequences.* CRC Press, 2020.
26. B. E. Sagan, *Inductive and injective proofs of* log-*concavity results.* — Discrete Math. **68** (1988), 281–292.
27. A. Sapounakis, I. Tasoulas, P. Tsikouras, *Counting strings in Dyck paths.* — Discrete Math. **307** (2007), 2909–2924.
28. P. R. Stein, M. S. Waterman, *On some new sequences generalizing the Catalan and Motzkin numbers.* — Discrete Math. **26** (1979), 261–272.
29. R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry.* — Ann. New York Acad. Sci. **576** (1989), 500–535.
30. H. Sun, Y. Wang, *A combinatorial proof of the* log-*convexity of Catalan-like numbers.* — J. Integer Sequences **17** (2014), article 14.5.2.
31. Y. Wang, Zh.-H. Zhang, *Log-convexity of Aigner–Catalan–Riordan numbers.* — Linear Alg. Appl. **463** (2014), 45–55.
32. M. S. Waterman, *Secondary structures of single stranded nucleic acids.* — In: Studies on Foundations and Combinatorics. Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. I, Academic Press, New York, 1978, pp. 167–212.
33. B. X. Zhu, *Log-convexity and strong* q-log-*convexity for some triangular arrays.* — Adv. Appl. Math. **50** (2013), 595–606.
34. B. X. Zhu, *Some positivities in certain triangular arrays.* — Proc. Amer. Math. Soc. **142**, No. 9 (2014), 2943–2952.
35. The online Encyclopedia of integer sequences `http://oeis.org/`

Khrabrov A. I. Injective proofs of log concavity for some combinatorial sequences.

The paper provides a new combinatorial interpretation of the number of RNA secondary structures and some other Catalan-like numbers. On the basis of this interpretation a combinatorial proof of their logarithmic convexity is given.

Высшая Школа Экономики
Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук
194100, ул. Кантемировская, 3, корп. 1, лит. А,
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 28 октября 2022 г.

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Факультет математики и компьютерных наук
199178, 14 линия В.О., дом 29Б, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: aikhrabrov@mail.ru