Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 518, 2022 г.

Д. В. Карпов

О РЕКОНСТРУКЦИИ ГРАФОВ СВЯЗНОСТИ 2 С 2-ВЕРШИННЫМ МНОЖЕСТВОМ, ДЕЛЯЩИМ ГРАФ ХОТЯ БЫ НА 3 ЧАСТИ

§1. Введение

1.1. Обозначения и определения. В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Для $U \subset V(G)$ через $G(U)$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин U.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а минимальную степень вершины графа G – через $\delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Через $c(G)$ обозначается количество компонент связности графа G.

Будем говорить, что вершина $v \in V(G)$ *смежна* с множеством $U \subset V(G)$, если $v \notin U$ и существует вершина $u \in U$, смежная с v.

Определение 1. Пусть $R \subset V(G)$.

1) Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.

2) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

3) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, *отделяет* множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

4) Граф G называется *k-связным*, если $v(G) > k$ и G остается связным при удалении любого множества из не более чем $k-1$ вершины.

Для множества $R \not\subset V(G)$ пусть $G - R = G - (R \cap V(G))$.

Ключевые слова: восстановление графа, двусвязный граф.

Определение 2. 1) Пусть G, H – два графа с одинаковым числом вершин. Биекция $\varphi : V(G) \to V(H)$ называется *изоморфизмом графов*, если

$$xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(H).$$

В этом случае мы будем говорить, что графы G и H *изоморфны* и обозначать это $G \simeq H$.

2) Автоморфизм графа G – это изоморфизм графа G в себя.

Определение 3. Пусть G – граф, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Тогда $\mathcal{D}(G)$ – это набор графов $G - v_1, \dots, G - v_n$.

Замечание 1. 1) Отметим, что в наборе $\mathcal{D}(G)$ не обязательно все графы различны.

2) В этой статье мы постоянно будем иметь дело не с множеством, а именно с *набором объектов*. Для удобства мы будем применять в определении наборов фигурные скобки, принятые обычно при работе с множествами. Так, например, мы будем писать

$$\mathcal{D}(G) = \{D - v \ : \ v \in V(G)\}.$$

Для наборов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ мы будем использовать обозначение $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}'$ для *набора*, полученного из $\mathcal{M}$ в результате удаления всех графов набора $\mathcal{M}'$.

1.2. История вопроса и основной результат. Одной из наиболее известных гипотез теории графов является гипотеза *о реконструкции графа*, сформулированная Келли [1] и Уламом [3].

Гипотеза. *Если графы G и H имеют хотя бы по 3 вершины и $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(H)$, то $G \simeq H$.*

Сразу же отметим, что по $\mathcal{D}(G)$ легко восстановить многие параметры графа, имеющего хотя бы 3 вершины: количество вершин, количество рёбер, набор степеней вершин, вершинную связность.

Гипотеза достаточно несложно доказывается для несвязных графов. В 1957 году Келли [1] доказал гипотезу о реконструкции для деревьев. В 1969 году Бонди [5] доказал гипотезу о реконструкции для недвусвязных графов без висячих вершин. Наконец, в 1988 году Йонгжи [6] доказал эту гипотезу для всех недвусвязных графов. Результатов для двусвязных графов на настоящий момент нет.

Эта работа – начало исследования о реконструкции графов, имеющих вершинную связность 2. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G – двусвязный граф с $\delta(G) \geqslant 3$, имеющий такое двухвершинное разделяющее множество T, что $c(G-T) \geqslant 3$. Тогда граф G можно восстановить по $\mathcal{D}(G)$.*

Отметим, что по $\mathcal{D}(G)$ несложно установить, есть ли у графа G двухвершинное множество T, делящее его хотя бы на 3 компоненты связности.

Доказательство теоремы 1 использует структуру разбиения двусвязного графа двухвершинными разделяющими множествами, которую мы определим в следующем разделе. После этого будет приведено доказательство ряда лемм и теоремы.

§2. Вспомогательные инструменты

Нам потребуется структура разбиения двусвязного графа 2-вершинными разделяющими множествами. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из книги Татта [4], а в целом аналогичную структуру – *дерево блоков* из работы [10]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [8].

2.1. Разбиение графа набором разделяющих множеств. Отметим, что *компонента связности* в нашей работе – это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geqslant 2$, а G – k-связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}(G)$ множество, состоящее из всех вершинных разделяющих множеств графа G, а через $\mathfrak{R}_k(G)$ – множество из всех k-вершинных разделяющих множеств G.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором $\mathfrak{S}$, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество – *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение – подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим простейший и самый нужный нам пример – разбиение двусвязного графа G одним множеством $S\in\mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $\mathrm{Part}(G;T)=\{A_1,\dots,A_k\}$. Тогда $\mathrm{Int}(A_1)$, $\dots$, $\mathrm{Int}(A_k)$ – все компоненты связности графа $G-S$, а каждая вершина $x\in S$ смежна со всеми этими компонентами (если x не смежна с $\mathrm{Int}(A_i)$, то эта компонента выделяется и одновершинным множеством $S\setminus\{x\}$, что противоречит двусвязности графа G).

Определение 5. Два множества $S,T\in\mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми.*

В работе [7] доказано, что для k-связного графа G и множеств $S,T\in\mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

2.2. Разбиение двусвязного графа и его свойства. В этом разделе граф G – двусвязный. Мы процитируем определения и доказанные ранее результаты, которые нам понадобятся, после чего докажем несколько новых лемм.

Определение 6. 1) Множество $S\in\mathfrak{R}_2(G)$ называется *одиночным*, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G.

2) Вместо $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{O}(G))$ мы будем писать просто $\mathrm{Part}(G)$, а части этого разбиения будем называть *частями* графа G.

Следующая лемма – это одно из утверждений леммы 6 из [10].

Лемма 1. *Если $S\in\mathfrak{R}_2(G;S)$ – неодиночное множество, то*

$$|\mathrm{Part}(G;S)|=2.$$

Определение 7. *Дерево разбиения* двусвязного графа G – это двудольный граф $\mathrm{BT}(G)$ с долями $\mathfrak{O}(G)$ и $\mathrm{Part}(G)$. Вершины $S\in\mathfrak{O}(G)$ и $A\in\mathrm{Part}(G)$ смежны в $\mathrm{BT}(G)$, если и только если $S\subset A$.

Лемма 2. [10, теорема 1] *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{BT}(G)$ – *это дерево, все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(G)$.

2) *Для каждого множества* $S \in \mathfrak{O}(G)$ *выполняется* $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(G;S)|$. *Более того, для каждой части* $A \in \mathrm{Part}(G;S)$ *существует ровно одна такая часть* $B \in \mathrm{Part}(G)$, *что* $B \subset A$ *и* B *смежна с* S *в* $\mathrm{BT}(G)$.

3) *Множество* $S \in \mathfrak{O}(G)$ *разделяет в графе* G *части* $B, B' \in \mathrm{Part}(G)$, *если и только если* S *разделяет* B *и* B' *в* $\mathrm{BT}(G)$.

Определение 8. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ – крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ – одиночное множество графа G.

2) Внутренности двух различных частей $\mathrm{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 9. 1) Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{O}(G)\}$.

2) Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ – простой цикл и 3-*блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Лемма 3. [11, лемма 2] *Для двусвязного графа* G *выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(G)$ – *либо цикл, либо* 3*-блок.*

2) *Если часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ – *цикл, то все вершины из* $\mathrm{Int}(A)$ *имеют степень* 2 *в графе* G.

3) *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ – *цикл длины хотя бы* 4. *Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа* G *и других неодиночных разделяющих множеств в графе* G *нет.*

Лемма 4. *Если часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ – 3*-блок и* $w \in \mathrm{Int}(B)$, *то граф* $G - w$ *двусвязен.*

Доказательство. Вершина w не может входить в одиночные разделяющие множества графа G, так как она – внутренняя вершина части из $\mathrm{Part}(G)$. Вершина w не входит в неодиночные разделяющие множества графа G по пункту 3 леммы 3. Следовательно, w не входит в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$, а значит, граф $G - w$ двусвязен. $\square$

Лемма 5. [10, теорема 2]. *Пусть G – двусвязный граф без одиночных множеств. Тогда либо G трёхсвязен, либо G – простой цикл.*

Лемма 6. *Пусть G – двусвязный граф, $S = \{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$, а B – объединение нескольких частей* $\mathrm{Part}(G; S)$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *Граф $G(B) + ab$ двусвязен.*

2) *Если $T \in \mathfrak{R}_2(G(B) + ab)$, то $T \in \mathfrak{R}_2(G)$.*

3) *Если B – объединение хотя бы двух частей* $\mathrm{Part}(G; S)$ *то граф $G(B)$ двусвязен.*

Доказательство. Утверждения пунктов 1 и 2 – частный случай леммы 3 из [10].

3) Пусть части $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(G; S)$ содержатся в B. Тогда для каждого $i \in \{1, 2\}$ существует ab-путь P_i, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(A_i)$. Понятно, что пути P_1 и P_2 не имеют общих внутренних вершин, а значит, по теореме Менгера вершины a и b в графе $G(B)$ нельзя разделить точкой сочленения. Так как по пункту 1 граф $G(B) + ab$ двусвязен, граф $G(B)$ также двусвязен. □

§3. Максимальные множества

В этом разделе двусвязный граф G удовлетворяет условию теоремы 1.

Определение 10. 1) Будем обозначать через $m(G, T)$ размер наибольшей компоненты связности графа $G - T$ (в том числе в случае, когда наибольших компонент несколько).

2) Пусть

$$c = \max_{T \in \mathfrak{R}_2(G)} c(G - T), \quad \mathfrak{T} = \{T \in \mathfrak{R}_2(G) \,:\, c(G - T) = c\}.$$

3) Назовём множество $T \in \mathfrak{T}$ *максимальным*, если $m(G, T) \geqslant m(G, S)$ для любого множества $S \in \mathfrak{T}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ подмножество $\mathfrak{T}$, состоящее из всех максимальных множеств. Введем обозначения $m = m(G; T)$ и $m' = v(G) - m$, где $T \in \mathfrak{M}$.

Замечание 3. 1) Параметры m, m' и c будут использоваться на протяжении всей статьи. Из условия основной теоремы следует, что $c \geqslant 3$.

2) В силу леммы 1 мы имеем $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{O}(G)$.

Определение 11. Пусть G – двусвязный граф.

1) Обозначим через $\mathrm{Int}_2(G)$ множество всех таких вершин $x \in V(G)$, что граф $G - x$ двусвязен.

2) Для $U \subset V(G)$ положим $\mathrm{Int}_2(U) = U \cap \mathrm{Int}_2(G)$, а для подграфа H графа G положим $\mathrm{Int}_2(H) = \mathrm{Int}_2(V(H))$.

Лемма 7. *Пусть G – двусвязный граф с $\delta(G) \geqslant 3$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) $\mathrm{Int}_2(G)$ *состоит из всех внутренних вершин* 3*-блоков графа* G.

2) *Пусть $T \in \mathfrak{O}(G)$, $A \in \mathrm{Part}(G;T)$. Тогда* $\mathrm{Int}_2(A) \neq \varnothing$.

Доказательство. 1) $\mathrm{Int}_2(G)$ состоит из всех вершин $x \in V(G)$, не входящих в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$. По лемме 3 это в точности все внутренние вершины 3-блоков графа G.

2) По лемме 2 существует такая крайняя часть $B' \in \mathrm{Part}(G)$, что $B' \subset A$. Так как $\delta(G) \geqslant 3$, часть B – это крайний 3-блок. Теперь утверждение следует из пункта 1. $\square$

Определение 12. Для множества $T \in \mathfrak{M}$ обозначим через A_T строго наибольшую по количеству вершин часть $\mathrm{Part}(G;T)$ (если такая есть). *Обрезок* $B(G;T)$ – это граф $G - \mathrm{Int}(A_T)$ (в случае, когда определена компонента A_T).

Замечание 4. 1) Если в $\mathrm{Part}(G;T)$ несколько частей наибольшего размера, то часть A_T не определена. Если часть A_T определена, то $m(G;T) = |\mathrm{Int}(A_T)|$.

2) Если для множества $T \in \mathfrak{M}$ определен обрезок $B(G;T)$, то $v(B(G;T)) = m'$.

Далее мы будем работать с частями разбиения графа (не обязательно двусвязного) одним двухвершинным разделяющим множеством.

Определение 13. Пусть $T \in \mathfrak{R}_2(G)$, а U – объединение нескольких частей $\mathrm{Part}(G;T)$.

1) Граф $G(U)$ мы будем называть *T-графом* или *T-подграфом* графа G.

2) Положим $\mathrm{Int}(U) = U \setminus T$. Говоря о $G(U)$ как о T-графе, мы будем применять обозначение $\mathrm{Int}(G(U)) = \mathrm{Int}(U)$.

Определенный выше обрезок $B(G;T)$, безусловно, является T-графом.

Определение 14. Пусть $\mathcal{D}^2(G) = \{G - x \ :\ x \in \mathrm{Int}_2(G)\}$ и $\mathcal{D}^1(G) = \mathcal{D}(G) \setminus \mathcal{D}^2(G)$.

Замечание 5. Набор $\mathcal{D}^2(G)$ состоит из всех двусвязных графов набора $\mathcal{D}(G)$, а набор $\mathcal{D}^1(G)$ – из всех недвусвязных. Таким образом, несложно разбить $\mathcal{D}(G)$ на два набора $\mathcal{D}^2(G)$ и $\mathcal{D}^1(G)$.

Лемма 8. *Пусть G – двусвязный граф. Тогда по набору $\mathcal{D}(G)$ можно определить параметры c, m и $|\mathfrak{M}|$.*

Доказательство. Пусть $T = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$. Тогда граф $G - a \in \mathcal{D}(G)$ имеет связность 1, вершина b – его точка сочленения. Наоборот, если b – точка сочленения графа $G - a$, то $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$. Очевидно, $c((G - a) - b) = c(G - T)$.

Таким образом, по точкам сочленения графа $G - a \in \mathcal{D}^1(G)$ можно понять, сколько множеств из $\mathfrak{R}_2(G)$ содержит вершину a и на сколько частей каждое из этих множеств делит граф G. Следовательно, мы можем найти c – максимальное количество компонент связности графа $G - T$.

Граф $G - a \in \mathcal{D}^1(G)$ имеет точку сочеленения b, делящую граф на c частей, если и только если $\{a, b\} \in \mathfrak{T}$. Таким образом, мы можем определить в $\mathcal{D}^1(G)$ все те графы $G - x$, где x – вершина множества из $\mathfrak{T}$.

Для каждой точки сочленения y, которая делит граф $G - x \in \mathcal{D}^1(G)$ на c частей, мы имеем $T = \{x, y\} \in \mathfrak{T}$ и знаем размеры всех компонент связности графа $G - T$. Таким образом, мы можем узнать $m(G, T)$, а значит, и m. Кроме того, мы можем определить все графы $G - x \in \mathcal{D}(G)$, где x – вершина множества из $\mathfrak{M}$.

Более того, мы можем узнать, для какого количества множеств $T \in \mathfrak{T}$ выполнено $m(G, T) = m$. Действительно, каждое множество T встречается ровно в двух графах $G - a \in D^1(G)$ и мы можем найти размер наибольшей компоненты связности графа $G - T$. Остается посчитать количество ситуаций, когда граф $G - a$ делится точкой сочленения b на c компонент связности и наибольшая из них имеет m вершин, и поделить это количество на 2. Таким образом, мы определим $|\mathfrak{M}|$. □

Далее мы будем работать с графами из $\mathcal{D}^2(G)$.

Лемма 9. *Пусть G – двусвязный граф с $\delta(G) \geqslant 3$, $T \in \mathfrak{R}_2(G)$, $x \in \mathrm{Int}_2(G)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *Пусть $U_1, \dots, U_k$ – все компоненты связности графа $G - T$ и $x \in \mathrm{Int}(U_1)$. Тогда $T \in \mathfrak{R}_2(G - x)$, причем $U_2, \dots, U_k$ – компоненты связности графа $G - x - T$.*

2) $c(G-T-x) \geqslant c(G-T)$.

3) *Каждая компонента связности графа $G-T-x$ смежна с обеими вершинами множества T.*

Доказательство. 1) и 2) Ввиду $\delta(G) \geqslant 3$ мы имеем $|U_i| \geqslant 2$. Тогда $U_2, \dots, U_k$ – компоненты связности графа $G-x-T$, а непустое множество $U_1 \setminus \{x\}$ – объединение нескольких компонент связности.

3) Следует из двусвязности графа $G-x$. □

Лемма 10. *Пусть G – двусвязный граф с $\delta(G) \geqslant 3$, множества $T, S \in \mathfrak{R}_2(G)$ независимы, $c(G-T) \geqslant 3$. Пусть $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(G;T)$, $B \in \mathrm{Part}(G;S)$, $x \in \mathrm{Int}_2(A_1)$, $S \subset A_2$ и $T \subset B$. Тогда граф $G(\mathrm{Int}(B))-x$ связен, а $c(G-x-S) = c(G-S)$.*

Доказательство. Пусть $T = \{a, a'\}$, а $A_3, \dots, A_k \in \mathrm{Part}(G;T)$ – части, отличные от A_1 и A_2. Тогда $B \supset A = A_1 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k$, а значит, $B \setminus S = \mathrm{Int}(B) \supset \mathrm{Int}(A) = A \setminus T$. Граф $G(\mathrm{Int}(B))$ связен (это компонента связности графа $G-S$). Так как множество $T = \{a, a'\}$ отделяет $\mathrm{Int}(A_1)$ от $\mathrm{Int}(B) \setminus \mathrm{Int}(A_1)$, то либо граф $G(\mathrm{Int}(B) \setminus \mathrm{Int}(A_1))$ связен, либо имеет две компоненты связности, причем одна из них содержит a, а другая – a'.

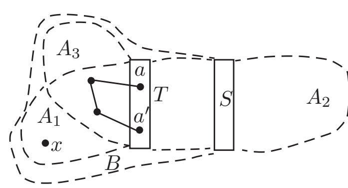

Рис. 1. Разбиение графа G множествами T и S.

Пусть $S \cap T = \varnothing$. Тогда $a, a' \in \mathrm{Int}(B)$. Граф $G(\mathrm{Int}(A_3))$ связен, а обе вершины a и a' множества T смежны с $\mathrm{Int}(A_3)$. Следовательно, в этом случае граф $G(\mathrm{Int}(B) \setminus \mathrm{Int}(A_1))$ связен. Если $S \cap T = \{a\}$, то $a \notin \mathrm{Int}(B)$ и граф $G(\mathrm{Int}(B) \setminus \mathrm{Int}(A_1))$ связен из сказанного выше.

Так как граф $G-x$ двусвязен, каждая компонента связности графа $G(\mathrm{Int}(A_1)-x)$ смежна с обеими вершинами множества T, а значит, смежна с $T \setminus S$. Следовательно, граф $G(\mathrm{Int}(B))-x$ связен. В силу леммы 9 имеем $c(G-x-S) = c(G-S)$. □

Лемма 11. *Пусть G – двусвязный граф, $\delta(G) \geqslant 3$, $T \in \mathfrak{M}$, $F \in \mathrm{Part}(G;T)$ – одна из частей наибольшего размера m. Предположим, что $x \in \mathrm{Int}_2(G) \setminus F$ и $S \in \mathfrak{R}_2(G-x)$ таковы, что $m(G-x,S) \leqslant m$. Тогда $S \subset F$ и $S \in \mathfrak{R}_2(G)$.*

Доказательство. Пусть $T = \{a,b\}$, а $n_1,\ldots,n_c$ – размеры всех компонент связности графа $G-T$, причем $n_c = m$. Тогда $n_i \geqslant 2$ для всех $i \in \{1,\ldots,c\}$. Пусть часть $A \in \mathrm{Part}(G;T)$ такова, что $\mathrm{Int}(A) \ni x$ и, скажем, $|\mathrm{Int}(A)| = n_1$. По условию, $A \neq F$. Введем обозначения $H = G - \mathrm{Int}(A)$ и $H' = H + ab$.

По лемме 6 граф H двусвязен. Если граф $H-S$ связен (в частности, при $S \not\subset V(H)$), то

$$v(H-S) \geqslant v(G) - n_1 - 2 \geqslant n_2 + n_c \geqslant n_c + 2 = m + 2,$$

а значит, в графе $G-x-S$ есть компонента связности, имеющая не менее $m+2$ вершин, противоречие. Остаётся случай, когда $S \subset V(H)$ и $S \in \mathfrak{R}_2(H)$.

По лемме 6 граф $H' = H+ab$ двусвязен, а все множества из $\mathfrak{R}_2(H')$ – это лежащие в H множества из $\mathfrak{R}_2(G)$. Предположим, что $S \notin \mathfrak{R}_2(H')$, но $S \in \mathfrak{R}_2(H)$. Тогда $c(H-S) = 2$, одна компонента связности графа $H-S$ содержит a, а другая – содержит b (так как при добавлении ребра ab граф становится связным). Пусть $U \subset \mathrm{Int}(A)$ – компонента связности графа $G-x-T$. Ввиду двусвязности $G-x$, обе вершины a и b смежны с U, а значит, в графе $G-x$ существует ab-путь P, внутренние вершины которого лежат в U. Тогда P не содержит вершин из S, а значит, граф $G-x-S$ связен, противоречие.

Остается случай, когда S – лежащее в H множество из $\mathfrak{R}_2(G)$. Так как T – одиночное множество, множества T и S независимы, а значит, $S \subset A'$, где $A' \in \mathrm{Part}(G;T)$ – часть, отличная от A. Тогда объединение внутренностей отличных от A' и A частей $\mathrm{Part}(G;T)$ и непустого множества $T \setminus S$ связано как в графе $G-x-S$, так и в графе $G-S$.

Если $A' \neq F$, то в графе $G-x-S$ есть компонента связности, имеющая строго больше чем $m = |\mathrm{Int}(F)|$ вершин, противоречие. Следовательно, $S \subset F$. □

Лемма 12. *При $|\mathfrak{M}| \geqslant 2$ выполнены следующие утверждения.*

1) *Для каждого множества $T \in \mathfrak{M}$ определена часть A_T (то есть, часть максимального размера в* $\mathrm{Part}(G;T)$ *единственна) и обрезок $B(G,T)$.*

2) *Для любых двух множеств* $S, T \in \mathfrak{M}$ *выполнено* $\mathrm{Int}(B(G,T)) \cap \mathrm{Int}(B(G,S)) = \varnothing$.

Доказательство. 1) Пусть $S \in \mathfrak{M}$, $S \neq T$. Тогда множества S и T независимы. Следовательно, множество S лежит в одной из частей $A' \in \mathrm{Part}(G;T)$. Пусть $F_S \in \mathrm{Part}(G;S)$ и $F_T \in \mathrm{Part}(G;T)$ – части наибольшего размера. Тогда $|F_S| = |F_T| = m + 2$. Если $A' \neq F_T$, то S не разделяет $V(G) \setminus A' \supsetneq F_T$, но тогда в $\mathrm{Part}(G;S)$ есть часть, строго большая чем F_T, что не так. Следовательно, $S \subset F_T$. Так как это верно для любой части наибольшего размера из $\mathrm{Part}(G,T)$, такая часть единственна. Таким образом, определены часть A_T и обрезок $B(G,T)$.

2) Мы доказали, что $S \subset A_T$ и $T \subset A_S$. Тогда S не разделяет $B(G;T) \supset T$, откуда ввиду $T \subset A_S$ следует, что $B(G;T) \subset A_S$. $\square$

Лемма 13. *Пусть* G*– двусвязный граф,* $\delta(G) \geqslant 3$*,* $T \in \mathfrak{M}$*,* $F_T \in \mathrm{Part}(G;T)$ *– одна из частей наибольшего размера* $m{+}2$ *и* $x \in \mathrm{Int}_2(G) \setminus F_T$*. Тогда в графе* $G - x$ *однозначно определяется множество* T*: это единственное множество с* $m(G-x,T) = m$ *и* $c(G-x-T) \geqslant c$*. Если максимальная часть* F_T *единственна (то есть,* $F_T = A_T$*), то она определяется в графе* $G - x$*.*

Доказательство. Пусть $T = \{a, a'\}$, $A \in \mathrm{Part}(G;T)$, $x \in \mathrm{Int}(A)$. По лемме 9 мы имеем $T \in \mathfrak{R}_2(G-x)$, причем все отличные от $\mathrm{Int}(A)$ компоненты связности графа $G-T$ – это компоненты связности графа $G-x-T$, а $c(G-x-T) \geqslant c(G-T) = c$. Наибольшая компонента связности графа $G-T-x$ имеет ровно m вершин и это $\mathrm{Int}(F_T)$.

Предположим, что для множества $S \in \mathfrak{R}_2(G-x)$ мы также имеем $c(G-x-S) \geqslant c$ и $m(G-x,S) = m$. По лемме 11 тогда $S \subset F_T$ и $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $F_S \in \mathrm{Part}(G;S)$ – наибольшая часть (возможно, не единственная), $U_S = \mathrm{Int}(F_S)$. Тогда $|U_S| = m(G;S) \geqslant m$, а значит, $F_S \not\subset F_T$. Граф $G' = G - \mathrm{Int}(F_T)$ двусвязен по лемме 6, поэтому, множество его вершин связано в $G-S$. Из сказанного выше ясно, что $F_S \cap \mathrm{Int}(G') \neq \varnothing$, но тогда, так как $S \subset F_T$, имеем

$$F_S \supset V(G') = V(G) \setminus \mathrm{Int}(F_T) \supset \mathrm{Int}(A) \ni x$$

(см. рисунок 2). Поэтому, $m = m(G-x,S) \leqslant |\mathrm{Int}(F_S)| - 1$ и $|\mathrm{Int}(F_S)| > m$. Следовательно, $S \notin \mathfrak{T}$, то есть $c(G-S) < c$.

Все компоненты связности графа $G-S$, кроме F_S, лежат в F_T и являются компонентами связности графа $G-x-S$. По лемме 10 граф

$G(\mathrm{Int}(F_S)) - x$ связен, а значит, $F_S \setminus \{x\}$ – также компонента связности графа $G - S - x$. Таким образом, $c(G - S - x) = c(G - S) < c$, противоречие. Значит, T – единственное множество с указанными в условии параметрами. Если F_T – единственная максимальная компонента связности графа $G - T$, то она и есть единственная компонента связности графа $G - T - x$ с m вершинами. □

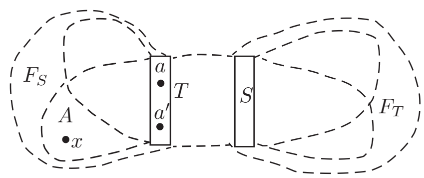

Рис. 2. Разбиение графа G множествами T и S.

Лемма 14. *Пусть G– двусвязный граф, $\delta(G) \geqslant 3$, $T \in \mathfrak{M}$, $F_T \in \mathrm{Part}(G;T)$ – единственная часть наибольшего размера $m+2$ (то есть, $F_T = A_T$) и $x \in \mathrm{Int}_2(G) \setminus F_T$. Пусть для множества $S \in \mathfrak{R}_2(G-x)$ существует такой двусвязный S-подграф G_S графа $G–x$, что $v(G_S) = m'$, $c(G_S - S) = c - 1$ и $m(G_S, S) < m$. Тогда $S \in \mathfrak{M}$ и $S \neq T$.*

Доказательство. В силу леммы 13 мы имеем $S \neq T$ (подграф $B(G,T) - x$ в качестве G_T не годится, так как имеет на одну вершину меньше, а любой другой T-подграф G_T из $c-1$ части $\mathrm{Part}(G-x-T;T)$ имеет $m(G_T, T) = m$). Очевидно,

$$m(G - x, S) \leqslant \max(|V(G - x) \setminus V(G_S)|, m - 1) = \max(v(G - x) - m', m - 1) = m - 1.$$

Следовательно, по лемме 11 мы имеем $S \subset F_T$ и $S \in \mathfrak{R}_2(G)$.

Заметим, что S не разделяет в графе G двусвязный (по лемме 6) подграф $G' = G - \mathrm{Int}(F_T)$ с $v(G') = m'$. Тогда существует такая часть $F_S \in \mathrm{Part}(G;S)$, что $V(G') \subset F_S$ (см. рисунок 2). Так как $S \neq T$, $F_S \setminus V(G')$ содержит хотя бы одну вершину множества S. Значит, $|F_S| \geqslant v(G') + 1 = m' + 1$.

Напомним, что $x \in V(G') \subset F_S$. По лемме 10 граф $G(\mathrm{Int}(F_S)) - x$ связен, а значит, $F_S \setminus \{x\} \in \mathrm{Part}(G - x; S)$ и в этой части не менее m' вершин. Так как G_S состоит из m' вершин и является объединением

$c-1 \geqslant 2$ частей $\mathrm{Part}(G-x;S)$, среди них не может быть части $F_S \setminus \{x\}$. Следовательно, $V(G_S) \cap \mathrm{Int}(F_S) = \varnothing$. Тогда G_S – это S-подграф графа G.

Так как $c(G_S-S) = c-1$, мы имеем $c(G-S) \geqslant c$, а значит, $c(G-S) = c$. Вспомним, что $v(G_S) = m'$. Так как $\mathrm{Int}(F_S) = V(G) \setminus V(G_S)$, мы имеем $|\mathrm{Int}(F_S)| = v(G) - v(G_S) = v(G) - m' = m$, откуда $S \in \mathfrak{M}$. □

Определение 15. Если $\mathfrak{M} = \{T\}$ и в $G - T$ нет строго наибольшей компоненты связности, то положим $\mathcal{D}'(G) = \mathcal{D}^2(G)$.

В остальных случаях для каждого множества из $\mathfrak{M}$ определен обрезок и тогда

$$\mathcal{D}'(G) = \{G - x \,:\, x \in \mathrm{Int}_2(B(G;T)),\ T \in \mathfrak{M}\}.$$

Лемма 15. *Пусть G– двусвязный граф, $\delta(G) \geqslant 3$. Тогда по $\mathcal{D}(G)$ можно определить набор подграфов $\mathcal{D}'(G)$.*

Доказательство. В случае, когда $\mathfrak{M} = \{T\}$ и часть A_T не определена, $\mathcal{D}'(G) = \mathcal{D}^2(G)$, а этот набор уже определен. Далее мы считаем, что для каждого $T \in \mathfrak{M}$ часть A_T определена. Пусть $p = |\mathfrak{M}|$ и $A = \cap_{T\in\mathfrak{M}}\mathrm{Int}(A_T)$.

Итак, нам известен набор $\mathcal{D}^2(G)$. Для выделения из него $\mathcal{D}'(G)$, нам достаточно научиться отличать граф $G - x$, где $x \in \mathrm{Int}_2(B(G,T))$ для некоторого $T \in \mathfrak{M}$, от графа $G - y$, где $y \in \mathrm{Int}_2(A)$.

По лемме 14 существует ровно $p - 1$ множество $S \in \mathfrak{R}_2(G - x)$, для которых $G-x$ имеет такой двусвязный S-подграф G_S на m' вершинах что $c(G_S) = c - 1$ и $m(G_S, S) < m$.

Докажем, что существует не менее чем p множеств $S \in \mathfrak{R}_2(G-y)$, для которых $G-y$ имеет такой двусвязный S-подграф G_S на m' вершинах, что $c(G_S) = c - 1$ и $m(G_S, S) < m$. Действительно, нам подойдут все множества $S \in \mathfrak{M}$ и S-подграфы $B(G,S)$. Так как $y \notin V(B(G,S))$, двусвязный S-граф G_S на m' вершинах будет подграфом $G-y$. Таким образом, мы сможем отличить $G - x$ от $G - y$. □

Замечание 6. Пусть $|\mathfrak{M}| \geqslant 2$. Тогда по леммам 13 и 14 в каждом графе из набора $\mathcal{D}'(G)$ мы можем определить множество T, для которого $x \in \mathrm{Int}(B(G;T))$, все остальные множества из $\mathfrak{M}$ и их обрезки.

§4. T, S-изоморфизм и T-симметрия. Склеевание графов по двухвершинному множеству

Определение 16. Пусть H_1, H_2 – два графа, в которых отмечены двухвершинные множества $T \subset V(H_1)$ и $S \subset V(H_2)$.

Будем говорить, что эти два графа (T, S)-изоморфны, если существует такой изоморфизм $\varphi : H_1 \to H_2$, что $\varphi(T) = S$. Обозначение: $H_1 \simeq_{T,S} H_2$.

При $T = S$ будем говорить, что эти графы T-изоморфны и писать $H_1 \simeq_T H_2$.

Определение 17. Пусть $T \in \mathfrak{R}_2(G)$. *T-разложение* графа G – это набор $\mathrm{Dec}(G, T)$ подграфов $G(A)$ для всех $A \in \mathrm{Part}(G; T)$, в каждом из которых отмечены вершины множества T.

Все графы из $\mathrm{Dec}(G, T)$ мы считаем T-графами, соответственно, у них определена *внутренность*.

Определение 18. Пусть H – граф, $V(H) \supset T = \{a, b\}$. Граф H называется T-симметричным, если существует автоморфизм графа H, меняющий местами вершины множества T.

Определение 19. Пусть $V(H) \supset T = \{a, b\}$, причем граф H не T-симметричен.

1) Пусть $F \simeq_T H$, а $\varphi : F \to H$ – T-изоморфизм. Будем писать, что $F = \overrightarrow{H}$, если $\varphi(a) = a$ и $F = \overleftarrow{H}$, если $\varphi(a) = b$.

2) Если $F = \overrightarrow{H}$ и $F' = \overleftarrow{H}$ (или наоброт), то будем говорить, что графы F и F' имеют *разную ориентацию*. Если $F = \overrightarrow{H}$ и $F' = \overrightarrow{H}$ или $F = \overleftarrow{H}$ и $F' = \overleftarrow{H}$, то будем говорить, что графы F и F' имеют *одинаковую ориентацию*.

Замечание 7. Пусть $T = \{a, b\}$, $F \simeq_T H$.

1) Если один из графов F и H является T-симметричным, то и другой тоже.

2) Пусть F и H не являются T-симметричными. Тогда либо для любого T-изоморфизма $\varphi : F \to H$ выполнено $\varphi(a) = a$, либо для любого T-изоморфизма $\varphi : F \to H$ выполнено $\varphi(a) = b$. Таким образом, пункт 2 определения 19 корректен.

Лемма 16. *Пусть G' и G_1 – это T-подграфы графа G, причем G' – T-симметричен, а G_1 – нет. Пусть $\mathcal{G}' = \{G' - y : y \in \mathrm{Int}_2(G')\}$. Тогда* *суммарное количество T-подграфов вида $\overrightarrow{G_1}$ у всех графов из $\mathcal{G}'$ равно суммарному количеству T-подграфов вида $\overleftarrow{G_1}$ у всех графов из $\mathcal{G}'$.*

Доказательство. T-симетричный граф G' имеет такой автоморфизм φ, что $\varphi(a) = b$ и $\varphi(b) = a$. Пусть $F = \overrightarrow{G_1}$ – T-подграф графа $G' - y$, где $y \in \mathrm{Int}_2(G')$. Тогда $\varphi(y) \in \mathrm{Int}_2(G')$, а $\varphi(F) = \overleftarrow{G_1}$ – T-подграф графа $G' - \varphi(y)$. □

Определение 20. 1) Пусть G_1, G_2 – два графа, $T = \{a, b\} \subset V(G_1)$, $S = \{c, d\} \subset V(G_2)$, $|S| = |T| = 2$. *Склеить по множествам T и S* графы G_1 и G_2 – это отождествить одну из вершин a и b с c, а другую – с d.

2) Если $S = T$, то мы будем называть описанную выше операцию *склееванием по множеству T*.

Замечание 8. 1) Существует не более двух способов склеить графы G_1 и G_2 по множествам $T \subset V(G_1)$ и $S \subset V(G_2)$.

2) Пусть нам известны T-подграф G_1 графа G и граф $H = G - \mathrm{Int}(G_1)$ (в котором также отмечено множество T). Тогда (как минимум) одно из двух склеиваний G_1 и H по множеству T даёт граф G.

§5. Доказательство теоремы в случае $|\mathfrak{M}| = 1$

В силу леммы 8 мы по $\mathcal{D}(G)$ можем определить m и $|\mathfrak{M}|$. Пусть нам известно, что $|\mathfrak{M}| = 1$, то есть, максимальное множество T единственно. Также нам известно $c = c(G - T)$ и размеры всех компонент связности графа $G - T$ – пусть это $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_c = m$. Введем обозначения $\mathrm{Part}(G; T) = \{A_1, \ldots, A_c\}$, где $U_i = \mathrm{Int}(A_i)$ – компонента связности графа $G - T$, $|U_i| = n_i$, $G_i = G(A_i)$, $Q_i = \mathrm{Int}_2(A_i)$ и $q_i = |Q_i|$. Множество Q_i непусто по лемме 7.

Определение 21. Если $m > n_{c-1}$, то часть A_c и компонента U_c – *главные*. Если $n_{c-1} = n_c = m$, то главной части в $\mathrm{Part}(G, T)$ нет.

Напомним, что мы можем по $\mathcal{D}(G)$ определять его поднабор

$$\mathcal{D}'(G) = \{G - x \, : \, x \in Q_i, \text{ часть } A_i - \text{ не главная}\}.$$

Более того, по лемме 13 в каждом графе $G - x \in \mathcal{D}'(G)$ однозначно определяется множество T.

Пусть $n_1 = \cdots = n_s$ – минимальный размер компонент связности графа $G - T$, а остальные компоненты имеют строго больший размер, $I = \{1, \ldots, s\}$. Тогда в $\mathcal{D}'(G)$ однозначно определяются все графы

$G-x$, где $x \in \cup_{i\in I} Q_i$: это в точности те графы $G-x \in \mathcal{D}'(G)$, для которых граф $G-x-T$ имеет компоненты связности всех размеров $n_{s+1}, \ldots, n_k$ и ровно $s-1$ компоненту связности размера n_1. Все такие графы с отмеченным множеством T в них составляют набор $\mathcal{D}'_1$, который нам понадобится далее.

Формулировки и доказательства всех утверждений этого раздела используют введенные выше обознаяения и даны в предположении, что максимальное множество T единственно.

Утверждение 5.1. *Можно определить* $\mathrm{Dec}(G,T)$.

Доказательство. Рассмотрим любой граф $G-x \in \mathcal{D}'_1$. В графе $G-x-T$ есть компоненты связности размеров $n_{s+1},\ldots,n_c$, а остальные компоненты имеют не более чем по n_1 вершин. Таким образом, мы определим все компоненты $U_{s+1},\ldots,U_c$, а значит и графы $G_{s+1},\ldots,G_c$ $\in \mathrm{Dec}(G,T)$. Остается найти графы $G_1,\ldots,G_s \in \mathrm{Dec}(G,T)$ минимального размера. Рассмотрим два случая: $s \geqslant 2$ и $s=1$.

Утверждение 5.1.1. *При* $s \geqslant 2$ *можно определить* $\mathrm{Dec}(G,T)$.

Доказательство. Рассмотрим любой граф $G-x \in \mathcal{D}'_1$ и любой T-граф $H \in \mathrm{Dec}(G-x,T)$, имеющий n_1+2 вершин (ему соответствует компонента связности графа $G-x-T$ с n_1 вершинами – одна из $s-1>0$ таких в графе $G-x$). Тогда $H=G_i$, где $i \in I$. И наоборот, каждый граф G_i, где $i \in I$, входит в $\mathrm{Dec}(G-x,T)$ при $x \in U_j$, $j \in I \setminus \{i\}$.

Проанализируем $\mathrm{Dec}(G-x,T)$ для всех графов $G-x \in \mathcal{D}'_1$ и выберем в их T-разложениях максимальное множество графов на n_1+2 вершинах так, чтобы среди выбранных графов не было T-изоморфных. Таким образом мы установили все различные (с точностью до T-изоморфизма) графы из $G_1,\ldots,G_s$.

Остается для каждого из них понять, сколько в $\mathrm{Dec}(G,T)$ есть T-изоморфных ему графов. Возьмем любой граф на n_1+2 вершинах из $\mathrm{Dec}(G,T)$ – скажем, G_1. Если в каждом графе $G-x \in \mathcal{D}'_1$ все графы размера n_1+2 из $\mathrm{Dec}(G-x,T)$ T-изоморфны G_1, то вообще все графы $G_1,\ldots,G_s$ T-изоморфны G_1.

Пусть существует такой граф $G-y \in \mathcal{D}'_1$, что не все графы размера n_1+2 из $\mathrm{Dec}(G-y,T)$ T-изоморфны G_1. Тогда среди $G_2,\ldots,G_s$ есть графы, не T-изоморфные G_1. В этом случае рассмотрим граф $G-z \in \mathcal{D}'_1$, в котором количество графов из $\mathrm{Dec}(G-z,T)$, T-изоморфных G_1

– наибольшее (пусть оно равно t). Тогда в $\mathrm{Dec}(G,T)$ ровно t графов, T-изоморфных G_1.

Таким образом, при $s \geqslant 2$ мы найдем $\mathrm{Dec}(G,T)$. □

Утверждение 5.1.2. *При* $s = 1$ *можно определить* $\mathrm{Dec}(G,T)$.

Доказательство. В этом случае мы знаем все графы $G_2, \dots, G_c$. Пусть $n_2 = \dots = n_t$, причем $t = c$ или $n_t < n_{t+1}$, а $I' = \{2, \dots, t\}$. Объясним, как определить набор $\mathcal{D}'_2 = \{G - y \ : \ y \in Q_i, \ i \in I'\}$. Части $A_2, \dots, A_t$ не могут быть главными (даже при $t = c$). Поэтому, $\mathcal{D}'_2 \subset \mathcal{D}'(G)$. Рассмотрим все графы $G - y \in \mathcal{D}'(G)$, для которых граф $G - y - T$ содержит компоненты связности всех размеров $n_{t+1}, \dots, n_k$ и имеет ровно $t-1$ компонент связности размера n_2. Тогда $y \in Q_i$, где $i \in I'$. Пусть $|\mathcal{D}'_2| = q$.

Рассмотрим T-разложения всех графов $G-y \in \mathcal{D}'_2$. Уберем из T-разложений все графы, содержащие не $n_1 + 2$ вершин. Что же могло остаться в полученном наборе $\mathcal{N}$? Во-первых, q раз остался T-граф G_1. Во-вторых, остались T-подграфы графов $G_i - y$, где $i \in I'$. Нам известны T-графы $G_2, \dots, G_t$. Для каждого $i \in I'$ и каждой вершины $y \in Q_i$ рассмотрим $\mathrm{Dec}(G_i - y, T)$ и определим в этом разложении все подграфы на $n_1 + 2$ вершинах. Каждый найденный подграф ровно один раз включен в набор $\mathcal{N}$, поэтому, нужно его из $\mathcal{N}$ исключить. В результате в $\mathcal{N}$ останутся только подграфы G_1 и мы этот подграф определим. □

Таким образом, мы определили $\mathrm{Dec}(G,T)$ во всех случаях. □

Определение 22. 1) Для каждого $p \in \{1, 2, \dots, c\}$ пусть I_p – множество всех таких индексов $i \in \{1, 2, \dots, c\}$, что $G_i \simeq_T G_p$. Назовём множество индексов I_p *полным* и будем использовать обозначение $s_p = |I_p|$.

2) Пусть $J_p \subset \{1, \dots, c\}$ – множество всех таких индексов j, что $n_j > n_p$.

3) Будем использовать обозначение $G'_p = \cup_{i \in I_p} G_i$.

4) Пусть $\mathcal{G}'(G_p) = \{G - x : x \in Q_i, i \in I_p\}$ и $\mathcal{G}(G_p) = \{G - U_i : i \in I_p\}$.

Замечание 9. Для каждого $j \in I_p$, очевидно, $I_j = I_p$. Таким образом, $\{1, 2, \dots, c\}$ – объединение непересекающихся полных множеств индексов.

Утверждение 5.2. *Для каждого* $p \in \{1, 2, \dots, c\}$ *можно определить набор* $\mathcal{G}'(G_p)$.

Доказательство. Пусть A_p – не главная часть. Тогда $\mathcal{G}'(G_p)$ – это набор из всех таких графов $G - x \in \mathcal{D}'(G)$, что в $\mathrm{Dec}_T(G - x)$ есть все графы G_j при $j \in J_p$ и ровно $s_p - 1$ граф, T-изоморфный G_p.

Пусть A_p – главная часть. Тогда $p = c$, $s_c = 1$, $I_c = \{c\}$ и $\mathcal{G}'(G_c) = \mathcal{D}^2(G) \setminus \mathcal{D}'(G)$. □

Напомним, что $I = \{1, \dots, s\}$ – множество всех таких индексов p, что $n_p = |U_p|$ минимален (то есть, $n_p = n_1$).

Утверждение 5.3. *Для каждого $p \in I$ можно определить набор $\mathcal{G}(G_p)$.*

Доказательство. Пусть $G - x \in \mathcal{G}'(G_p)$ и, скажем, $x \in U_p$. Удалим из графа $G - x$ вершины всех компонент связности графа $G - x - T$, имеющих менее n_1 вершин – очевидно, их объединение есть $U_p \setminus \{x\}$. В результате удаления получится граф $G - U_p$.

Поступим таким образом со всеми графами $G - x \in \mathcal{G}'(G_p)$. В результате для каждого $i \in I_p$ граф $G - U_i$ будет получен ровно q_p раз. Так как число q_p мы можем определить, можно определить и набор $\mathcal{G}(G_p)$. □

Утверждение 5.4. *Если для некоторого $p \in I$ граф G_p является T-симметричным, то можно определить граф G.*

Доказательство. Рассмотрим любой граф $H \in \mathcal{G}(G_p)$. Так как граф G_p T-симметричен, оба склеивания G_p и H по множеству T дадут один и тот же граф – искомый граф G. □

Далее можно считать, что среди графов $G_1, \dots, G_s$ нет T-симметричных.

Утверждение 5.5. *Если $s_1 \geqslant 3$, то можно определить граф G.*

Доказательство. В графе G_1 можно различить вершины множества T, которые мы будем обозначать через a и b. Будем называть T-изоморфные G_1 графы его *копиями.*

В склейке из нескольких копий G_1 могут быть графы двух разных ориентаций $\overrightarrow{G_1}$ и $\overleftarrow{G_1}$ (в графах одной ориентации вершины a склеиваются друг с другом и вершины b склеиваются друг с другом, а в графах разной ориентации a склеивается с b и b склеивается с a). Мы можем сказать про две склеенные копии G_1, одинаковой или разной они ориентации.

Предположим, что α копий G_1 в $\mathrm{Dec}(G,T)$ имеет одну ориентацию (скажем $\overrightarrow{G_1}$), а $\alpha' = s_1 - \alpha$ – другую ориентацию $\overleftarrow{G_1}$. Для каждого $i \in I_1$ в $\mathrm{Dec}(G - U_i, T)$ есть $s_1 - 1$ копий графа G_1.

Если $\alpha, \alpha' \geqslant 1$, то в $\mathcal{G}'(G_1)$ есть граф, в T-разложении которого не все копии G_1 ориентированы одинаково (так как $\alpha + \alpha' = s_1 \geqslant 3$). Если в T-разложении каждого графа из $\mathcal{G}(G_1)$ все копии G_1 ориентированы одинаково, то все они одинаково ориентированы и в $\mathrm{Dec}(G,T)$. В этом случае рассмотрим любой граф $H \in \mathcal{G}(G_1)$ и приклеим к нему по множеству T еще один граф G_1 – в такой же ориентации, как и остальные.

Далее остается случай, когда $\alpha, \alpha' > 0$. Тогда в графах из $\mathcal{G}(G_1)$ может быть $\alpha - 1$ копий $\overrightarrow{G_1}$ и α' копий $\overleftarrow{G_1}$ или α копий $\overrightarrow{G_1}$ и $\alpha' - 1$ копий $\overleftarrow{G_1}$. В этом случае нужно выбрать такой граф $H \in \mathcal{G}(G_1)$, что разность между количествами копий G_1 разных ориентаций в его T-разложении максимальна и приклеить к нему по множеству T еще один граф G_1 – в ориентации, отличной от большинства. $\square$

Рассмотрим граф из $\mathcal{G}(G_1)$ – скажем, $G - U_1$. Существует два способа склеить графы G_1 и $G - U_1$ по множеству T, один из них дает искомый граф G, пусть второй способ дает граф G^*. Будем говорить, что G^* получен из G *переворотом* графа G_1, то есть, заменой подграфа $G_1 = \overrightarrow{G_1}$ на $G_1^* = \overleftarrow{G_1}$.

Если граф $G - U_1$ является T-симметричным, то $G = G^*$ и теорема доказана. Далее считаем, что $G - U_1$ не T-симметричен, тогда в нем различимы вершины a и b множества T.

Очевидно, $T \in \mathfrak{O}(G^*)$, причем $\mathrm{Part}(G^*;T) = \mathrm{Part}(G;T)$. Поэтому, каждое множество $S \in \mathfrak{R}_2(G^*)$ независимо с T и является разделяющим множеством либо в $G_1 + ab$, либо в $G - U_1 + ab$ (эти графы двусвязны по лемме 6). Наоборот, каждое 2-разделяющее множество одного из этих графов будет разделяющим в G^*. Аналогичное утверждение верно и для графа G. Таким образом, существует биекция между $\mathfrak{R}_2(G)$ и $\mathfrak{R}_2(G^*)$ (каждое отличное от T множество S переходит в себя, его вершины будем именовать так же, как в том из графов G_1 и $G - U_1$, в котором S лежит).

Из сказанного выше понятно, что $c(G^* - S) = c(G - S)$ и части $\mathrm{Part}(G^*, S)$ имеют такие же размеры, как части $\mathrm{Part}(G, S)$. Следовательно, параметры c и m в графе G^* такие же, как и в G, а T – единственное максимальное множество графа G^*.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что наборы $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{D}(G^*)$ различны – тогда мы можем по $\mathcal{D}(G)$ определить граф G.

Утверждение 5.6. *При $s_1 = 2$ можно определить граф G.*

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что $I_1 = \{1, 2\}$. Пусть $H = G - U_1 - U_2$. Рассмотрим два случая.

Утверждение 5.6.1. *Если H не T-симметричен, то можно определить граф G.*

Доказательство. Обозначим вершины T в графе H за c и d, эти вершины различимы в H. Тогда по $\mathcal{G}(G_1)$ несложно понять, как к H приклеивать графы G_1 и G_2. Если эти графы приклеены к H в разных ориентациях, то в $\mathcal{G}(G_1)$ поровну графов, где a склеено с c и где a склеено с d, а если G_1 и G_2 приклеены к H в одинаковых ориентациях, то и вершина a в графах из $\mathcal{G}(G_1)$ все время склеевается с одной и той же вершиной из c и d. В этих случаях мы сможем восставновить граф G. □

Утверждение 5.6.2. *Если H T-симметричен, то $\mathcal{D}(G) \neq \mathcal{D}(G^*)$.*

Доказательство. Две копии графа G_1 можно склеить друг с другом двумя способами: пусть это F (T-подграф графа G) и F^* (T-подграф графа G^*), причем $F \not\simeq_T F^*$. Пусть $\mathcal{N}$ – это набор всех таких S-подграфов L графов из $\mathcal{G}'(G_3)$, что $L \simeq_{S,T} F$ или $L \simeq_{S,T} F^*$ (двухвершинное множество S не фиксировано). Аналогично, по графу G^* определим набор $\mathcal{N}^*$.

Пусть S-подграф $L \in \mathcal{N}$ нашли в графе $G - y \in \mathcal{G}'(G_3)$. Если L не пересекает U_1, то L является S-подграфом и в графе $G^* - y$. Таким образом, подграфы из $\mathcal{N}$, не пересекающие U_1, и подграфы из $\mathcal{N}^*$, не пересекающие U_1 – одни и те же. Если $S \neq T$, то S лежит в одной из частей $\mathrm{Part}(G - y; T)$ и S-подграф L, очевидно, не может содержать T (иначе один из графов разложения $\mathrm{Dec}(L, S)$ строго больше, чем G_1). Тогда L не пересекает U_1, этот случай разобран.

Остается случай, когда $S = T$ и L пересекает U_1. Тогда $G_1 \in \mathrm{Dec}(L, T)$. В каждом $G - y \in \mathcal{G}'(G_3)$ есть T-подграф $G(A_1 \cup A_2) = F$, что дает нам $\ell = |\mathcal{G}'(G_3)|$ графов F в $\mathcal{N}$. Аналогично, в $\mathcal{N}^*$ есть ℓ графов F^*.

Откуда еще могут взяться T-подграфы графа $G - y \in \mathcal{G}'(G_3)$, содержащие G_1 и изоморфные F или F^*? Все они содержат T-изоморфные $\overrightarrow{G_1}$ или $\overleftarrow{G_1}$ T-подграфы графов $G_i - y$, где $i \in I_3$ и $y \in \mathrm{Int}_2(A_i)$. Это в точности T-изоморфные $\overrightarrow{G_1}$ или $\overleftarrow{G_1}$ T-подграфы графов $G_3' - y$, где $y \in \mathrm{Int}_2(G_3')$. Так как граф H T-симметричен, граф G_3' также T-симметричен. Тогда по лемме 16 в G_3' поровну T-подграфов вида $\overrightarrow{G_3}$ и $\overleftarrow{G_3}$ (возможно, $\overrightarrow{G_3} = \overleftarrow{G_3}$). Значит, в графах $G_3' - y$, где $y \in \mathrm{Int}_2(G_3')$, поровну подграфов вида $\overrightarrow{G_1}$ и $\overleftarrow{G_1}$, что дает нам одинаковый вклад F и F^* в $\mathcal{N}$. Аналогично для набора $\mathcal{N}^*$.

Таким образом, наборы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^*$ различны, что позволяет нам отличить $\mathcal{D}(G)$ от $\mathcal{D}(G^*)$. □

Следовательно, по $\mathcal{D}(G)$ можно определить граф G. □

Утверждение 5.7. *При $s_1 = 1$ можно определить граф G.*

Доказательство. Как мы отметили выше, граф $H = G - \mathrm{Int}(A_1)$ не является T-симметричным. Тогда существует такое полное множество $I_p \subset \{2, \dots, c\}$, что граф G_p' не является T-симметричным. Выберем I_p так, чтобы n_p было наибольшим.

На этот раз, мы будем считать подграфы, изоморфные графу, склеенному из G_1 и G_p по множеству T. Эти два графа можно склеить двумя разными способами – пусть это F (склееваются $\overrightarrow{G_1}$ и $\overrightarrow{G_p}$ или, что то же самое, $\overleftarrow{G_1}$ и $\overleftarrow{G_p}$) и F^* (склееваются $\overrightarrow{G_1}$ и $\overleftarrow{G_p}$ или $\overleftarrow{G_1}$ и $\overrightarrow{G_p}$). Мы разберем два случая.

Утверждение 5.7.1. *При $|I_p| = 1$ выполнено $\mathcal{D}(G) \neq \mathcal{D}(G^*)$.*

Доказательство. В этом случае в $\mathrm{Part}(G; T)$ существует хотя бы одна часть кроме A_1 и A_p. Значит, существует и полный набор $I_j \not\ni \{1, p\}$. Если часть A_j – главная, то рассмотрим все графы $G - y \in \mathcal{G}'(G_j)$, и в каждом из них все такие S-подграфы L (где $S \in \mathfrak{R}_2(G - y)$), что $L \simeq_{S,T} F$ или $L \simeq_{S,T} F^*$. Такие подграфы L образуют набор $\mathcal{N}$.

Если же часть A_j – не главная, то во всех графах из $\mathcal{G}'(G_j)$ определено множество T. В этом случае рассмотрим все графы $G - y \in \mathcal{G}'(G_j)$, и в каждом из них все такие T-подграфы L, что $L \simeq_T F$ или $L \simeq_T F^*$. На этот раз набор $\mathcal{N}$ состоит из указанных T-подграфов.

В обоих случаях по графу G^* аналогично определим набор $\mathcal{N}^*$. Аналогично утверждению 5.6.2, в обоих случаях подграфы из $\mathcal{N}$, не пересекающие U_1, и подграфы из $\mathcal{N}^*$, не пересекающие U_1 – одни и те же.

Пусть $S \neq T$ и S-подграф $L \in \mathcal{N}$. Это возможно в случае, когда часть A_j – главная, значит, часть A_p – не наибольшего размера. Множество S лежит в одной из частей $U \in \mathrm{Part}(G-y;T)$. Нас интересует случай, когда S-подграф L пересекает U_1, следовательно, $T \subset V(L)$. Тогда множество вершин одного из графов $H \in \mathrm{Dec}(L,S)$ содержит T и все части $\mathrm{Part}(G-y;T)$, кроме U. Если $U \neq A_p$, то H больше чем G_p а значит, и больше чем G_1, противоречие. Если же $U = A_p$, то H содержит $A_j \setminus \{y\}$ и A_1. Так как в нашем случае A_j – единственная часть наибольшего размера, и на этот раз $v(H) > v(G_p) \geqslant v(G_1)$, противоречие. Случай, когда в $\mathcal{N}^*$ есть S-подграф L, где $S \neq T$, аналогичен.

Остается подсчитать T-подграфы $L \in \mathcal{N}$, содержащие U_1. Тогда $L = G_1 \cup G_p = F$ (такой подграф ровно один в каждом графе $G - y \in \mathcal{G}'(G_j)$) или $L = G_1 \cup L'$, где $L' \simeq_T G_p$ – подграф графа $G'_i - y$, где $y \in \mathrm{Int}_2(G'_i)$ (подграфы из второго варианта назовем *лишними*).

Докажем, что среди лишних подграфов поровну тех, что изоморфны F и тех, что изоморфны F^*. Если $n_j \leqslant n_p$, лишних подграфов просто нет. Если же $n_j > n_p$, то по выбору p граф G'_j является T-симметричным. Тогда, аналогично рассуждению из утверждения 5.6.2, в силу леммы 16 в графах вида $G'_i - y$, где $y \in \mathrm{Int}_2(G'_i)$, поровну T-подграфов вида $\overrightarrow{G_p}$ и $\overleftarrow{G_p}$. Следовательно, среди лишних подграфов поровну изоморфных F и изоморфных F^*.

Таким образом, в $\mathcal{N}$ подграфов, изоморфных F, строго больше чем подграфов, изоморфных F^*. Аналогично доказывается, что для $\mathcal{N}^*$ верно обратное. Следовательно, $\mathcal{D}(G) \neq \mathcal{D}(G^*)$. $\square$

Утверждение 5.7.2. *При* $|I_p| \geqslant 2$ *выполнено* $\mathcal{D}(G) \neq \mathcal{D}(G^*)$.

Доказательство. В нашем случае часть A_p – не главная и во всех графах из $\mathcal{G}'(G_p)$ определено множество T. Пусть $\mathcal{N}$ – это набор всех T-подграфов графов из $\mathcal{G}'(G_p)$, T-изоморфных F или F^*. Аналогично, по графу G^* определим набор $\mathcal{N}^*$.

Как и выше, подграфы из $\mathcal{N}$, не содержащие U_1, и подграфы из $\mathcal{N}^*$, не содержащие U_1 – одни и те же. Посчитаем T-подграфы $L \in \mathcal{N}$, содержащие U_1. Тогда $L = G_1 \cup G_i$, где $i \in I_p$. Очевидно, граф G_p не T-симметричен. Можно отличить графы из $\mathrm{Dec}(G'_p, T)$ различных ориентаций друг от друга. В подграфе $G'_p \cup G_1$ графа G ориентацию множества T задает граф G_1. Пусть в $G'_p \cup G_1$ есть α графов $\overrightarrow{G_p}$ и α^* графов $\overleftarrow{G_p}$ (в ориентации T, заданной графом G_1). Так как G'_p

не T-симметричен, $\alpha \neq \alpha^*$. Не умаляя общности будем считать, что $\alpha > \alpha^* \geqslant 0$. Тогда $\alpha \geqslant 2$.

В графе $G - y \in \mathcal{G}'(G_p)$ может быть $\alpha - 1$ графов $\overrightarrow{G_p}$ и α^* графов $\overleftarrow{G_p}$ или α графов $\overrightarrow{G_p}$ и $\alpha^* - 1$ граф $\overleftarrow{G_p}$ (последний случай невозможен при $\alpha^* = 0$). Тогда, просуммировав для всех графов $G - y \in \mathcal{G}'(G_p)$ количество ориентаций $\overrightarrow{G_p}$ и $\overleftarrow{G_p}$ в $\mathrm{Dec}(G - y, T)$, мы получим строго больше ориентаций $\overrightarrow{G_p}$. Значит, среди содержащих G_1 подграфов $L \in \mathcal{N}$ строго больше T-изоморфных F чем T-изоморфных F^*.

Так как граф G^* отличается от G заменой G_1 на G_1^*, в наборе $\mathcal{N}^*$ содержащих U_1 подграфов F^* строго больше чем содержащих U_1 подграфов F. Следовательно, в наборе $\mathcal{N}$ количество подграфов, изоморфных F строго больше чем в $\mathcal{N}^*$. Таким образом, $\mathcal{D}(G) \neq \mathcal{D}(G^*)$. □

Во всех случаях мы доказали, что $\mathcal{D}(G) \neq \mathcal{D}(G^*)$. Следовательно, по $\mathcal{D}(G)$ можно определить граф G. □

На этом разбор случая $|\mathfrak{M}| = 1$ закончен.

§6. Доказательство теоремы в случае $|\mathfrak{M}| \geqslant 2$

Пусть $\mathfrak{M} = \{T_1, \dots, T_r\}$, $r \geqslant 2$. По Лемме 12 в этом случае для каждого множества T_i существует единственная максимальная часть $A_i \in \mathrm{Part}(G; T_i)$, ее внутренность $U_i = \mathrm{Int}(A_i)$ – максимальная компонента связности графа $G - T_i$ (такая компонента в этом случае единственна по лемме 12) и обрезок $B_i = B(G, T_i)$. Как и раньше, мы используем обозначения $m = |U_i|$ и $m' = v(B_i)$.

Мы знаем по лемме 12, что внутренности разных обрезков не пересекаются. По лемме 15 мы умеем определять набор

$$\mathcal{D}'(G) = \{G - x \,:\, x \in \mathrm{Int}_2(B_i),\ i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Определение 23. Будем называть обрезки B_i и B_j *изоморфными*, если $B_i \simeq_{T_i, T_j} B_j$.

Утверждение 6.1. *Можно определить B_1, …, B_r и в каждом обрезке B_i выделить множество T_i.*

Доказательство. Рассмотрим любой граф граф $G - x \in \mathcal{D}'(G)$. По лемме 13 в $G - x$ однозначно определяется множество T_i, для которого $x \in \mathrm{Int}_2(B_i)$ и максимальная часть A_i. Для любого множества $T_j \in \mathfrak{M}$, где $j \neq i$, в силу леммы 12 имеем $x \in \mathrm{Int}(A_j)$. Тогда граф $G - x$

имеет двусвязный T_j-подграф B_j с $v(B_j) = m'$, $c(B_j - T_j) = c - 1$ и $m(B_j, T_j) < m$. По лемме 14 такими свойствами могут обладать только отличные от T_i множества из $\mathfrak{M}$, которые мы, тем самым, определим в графе $G - x$. Одновременно с этим окажутся определенными и все обрезки B_j, где $j \neq i$ (в каждом таком обрезке отметим множество T_i).

Таким образом, проанализировав все графы из $\mathcal{D}'(G)$, мы можем однозначно определить все обрезки $B_1, \ldots, B_r$. Действительно, обрезок B_i встречается (и выделяется, при этом, в нем отмечается множество T_i) во всех графах $G - x \in \mathcal{D}'(G)$, где $x \in \cup_{j \neq i} \mathrm{Int}_2(B_j)$. Пусть $\mathcal{B}(G-y)$ – набор всех обрезков, выделяемых в графе $G - y$ (то есть, всех, кроме B_i, где $x \in \mathrm{Int}_2(B_i)$), а $\mathcal{B}$ – максимальное множество встречающихся в наборах $\mathcal{B}(G-y)$ (где $G - y \in \mathcal{D}'(G)$) обрезков, никакие два из которых не изоморфны (в смысле данного выше определения).

Если $|\mathcal{B}| = 1$, то все обрезки графа G попарно изоморфны и мы их нашли. Пусть $|\mathcal{B}| \geqslant 2$. Тогда рассмотрим такой граф $G - x \in \mathcal{D}'(G)$, что в $\mathcal{B}(G - x)$ количество изоморфных B_1 обрезков максимально – ровно столько их в графе G. Определив такие количества для всех обрезков из $\mathcal{B}$, мы найдем все обрезки графа G. $\square$

Определение 24. 1) Для $p \in \{1, \ldots, r\}$ пусть I'_p – множество из всех таких индексов i, что обрезок B_i изоморфен B_p. Назовем множество индексов I'_p *полным.* Пусть $t_p = |I'_p|$.

2) Пусть $\mathcal{D}'(B_p) = \{G - y \;:\; y \in \mathrm{Int}_2(B_j),\ j \in I'_p\}$.

Замечание 10. Очевидно, $\{1, \ldots, r\}$ разбивается в объединение попарно непересекающихся полных множеств.

Утверждение 6.2. *Для каждого обрезка B_p можно определить набор $\mathcal{D}'(B_p)$.*

Доказательство. Набор $\mathcal{D}'(B_p) = \{G - y \;:\; y \in \mathrm{Int}_2(B_j),\ i \in I'_p\}$ состоит в точности из тех графов набора $\mathcal{D}'(G)$, что содержат $t_p - 1$ обрезок, изоморфный B_p (в остальных графах из $\mathcal{D}'(G)$ будет по t_p таких обрезков). $\square$

Далее мы будем рассматривать только графы из набора $\mathcal{D}'(B_1)$. Пусть $\mathrm{Dec}(B_1, T_1) = \{G^1_1, \ldots, G^1_k\}$, $U^1_i = \mathrm{Int}(G^1_i)$, $n_i = |\mathrm{Int}(G^1_i)|$ и $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$.

Определение 25. Для $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ определим I_ℓ как множество всех таких индексов j, что $G^1_j \simeq_{T_1} G^1_\ell$. Пусть $s_\ell = |I_\ell|$.

Назовем множество I_ℓ B_1-*полным.*

Понятно, что $\{1,\dots,k\}$ разбивается в объединение B_1-полных множеств индексов. У всех обрезков B_j, где $j \in I'_1$, будут аналогичные разбиения $\mathrm{Dec}(B_j,T_j) = \{G_1^j,\dots,G_k^j\}$, которые можно занумеровать так, что $G_i^j \simeq_{T_j,T_1} G_i^1$, и те же самые B_j-полные множества индексов.

Определение 26. Для $p \in \{1,\dots,k\}$ пусть

$$\mathcal{G}'(p) = \{G - y \ : \ y \in \mathrm{Int}_2(G_i^j),\ j \in I'_1, i \in I_p\}.$$

Утверждение 6.3. *Для каждого $p \in \{1,\dots,k\}$ можно определить набор $\mathcal{G}'(p)$.*

Доказательство. Рассмотрим граф $G - y \in \mathcal{D}'(B_1)$. Пусть, скажем, $y \in \mathrm{Int}_2(B_j)$, $j \in I'_1$. Тогда в графе $G - y$ однозначно определяется подграф $B_j - y$. Мы возьмём граф $G - y$ в $\mathcal{G}'(p)$, если и только если в $\mathrm{Dec}(B_j - y, T_1)$ есть все графы G_i^j, для которых $n_i > n_p$ и ровно $s_p - 1$ граф, T_j-изоморфный G_p^j. □

Рассмотрим любой граф $G - y \in \mathcal{G}'(1)$. Пусть, скажем, $y \in \mathrm{Int}_2(G_1^1)$ (иначе поменяем номера). В графе $G-y$ однозначно определяется множество T_1, графы $B_1 - y$ и $G(A_1)$. Назовем множество T_1 *главным* в графе $G - y$.

Так как $\mathrm{Int}(G_1^1 - y)$ – объединение всех компонент связности графа $G - y - T_1$, имеющих менее чем n_1 вершин, определяется также граф $H_1 = G - \mathrm{Int}(G_1^1)$. Мы можем склеить двумя способами графы G_1^1 и H_1 по множеству T_1: можно приклеить к H_1 граф $G_1^1 = \overrightarrow{G_1^1}$ (тогда получится искомый граф G), а можно приклеить граф $\overleftarrow{G_1^1}$ (тогда получится граф G^*).

Аналогично случаю $|\mathfrak{M}| = 1$, существует естественная биекция между $\mathfrak{R}_2(G)$ и $\mathfrak{R}_2(G^*)$, мы будем одинаково называть соответствующие при этой биекции разделяющие множества. Для каждого множества $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ мы имеем $|\mathrm{Part}(G;S)| = |\mathrm{Part}(G^*;S)|$, причем размеры максимальных частей совпадают. Поэтому параметры c и m в графе G^* такие же, как и в G, а $\mathfrak{M}$ – набор из всех максимальных множеств графа G^*. Следовательно, обрезки графа G^* – это $B_1^* = B(G^*,T_1)$ (результат переворота T_1-подграфа G_1^1 в графе B_1), а также $B_2,\dots,B_r$. (Отметим, что для $i \in \{2,\dots,r\}$ выполнено $B(G,T_i) = B(G^*,T_i)$.)

Нам нужно научиться отличать G от G^* по имеющимся данным.

Утверждение 6.4. *Если невозможно восстановить граф G, то выполнены следующие условия:*

1) *граф* G_1^1 *не* T_1*-симметричен;*
2) *граф* H_1 *не* T_1*-симметричен;*
3) $s_1 = 1$*;*
4) *граф* $B_1 - \mathrm{Int}(G_1^1)$ T_1*-симметричен;*
5) *граф* $G(A_1)$ *не* T_1*-симметричен;*

Доказательство. 1) и 2) Если хотя бы один из графов G_1^1 и H_1 T-симметричен, то $G \simeq G^*$.

3) У графа G^* должен быть тот же набор обрезков, что у G (иначе мы различим эти два графа). Следовательно, $B_1^* \simeq_T B_1$. Аналогично, если вместо G_1^1 мы перевернем любой T_1-подграф G_i^1, где $i \in I_1$, то обрезок B_1 все равно не изменится.

Докажем, что при $s_1 \geqslant 2$ такое невозможно. Если все копии G_1^1 в B_1 ориентированы одинаково и их хотя бы 2, то переворот G_1^1 изменит граф B_1. Если не все копии ориентированы одинаково, то пусть есть α копий в одной ориентации и α' в другой, причем $\alpha \leqslant \alpha'$. Тогда перевернем одну из копий графа G_1^1 в той ориентации, которых α – в результате, граф B_1 изменится.

4) Если граф $B_1 - \mathrm{Int}(G_1^1)$ не T_1-симметричен, то в результате переворота G_1^1 обрезок B_1 изменится.

5) Вместо G_1^1 можно перевернуть весь обрезок B_1 и аналогично получить, что наш граф – один из двух полученных при таком склеивании. Если при этом граф не изменится, теорема доказана. Значит, граф G в результате изменится, откуда следует, что $G - \mathrm{Int}(B_1) = G(A_1)$ не T-симметричен. $\square$

Завершим доказательство теоремы в последнем случае. Очевидно, $k = c - 1 \geqslant 2$. Так как $s_1 = 1$, $I_2 \not\ni 1$.

Пусть $G - y \in \mathcal{G}'(2)$. Не умаляя общности считаем, что $y \in \mathrm{Int}_2(B_1)$, более того, пусть $y \in \mathrm{Int}_2(U_2^1)$. Назовем U_1^1 *малой компонентой* графа $G - y$.

В графе $G - y$ по лемме 13 определяется главное множество T_1 и главная часть $A_1 \in \mathrm{Part}(G; T_1)$. Пусть $H = G(A_1) = G^*(A_1)$, $F = G_1^1 \cup H$ (это подграф G) и $F^* = \overleftarrow{G_1^1} \cup H$ (это подграф G^*).

Найдем в $G - y$ все такие T_1-подграфы L, что $L \simeq_{T_1} F$ или $L \simeq_{T_1} F^*$. Все аналогичные подграфы всех графов из $\mathcal{G}'(2)$ образуют набор $\mathcal{N}$ (в каждом графе $G - y$ вместо T_1 мы берем его главное множество). Аналогично, по графу G^* определим набор $\mathcal{N}^*$.

Рассмотрим подграф $L \in \mathcal{N}$, полученный из графа $G - y \in \mathcal{G}'(2)$. Если L не содержит малой компоненты графа $G - y$, то L является подграфом и у графа $G^* - y$, откуда $L \in \mathcal{N}^*$. Верно и обратное утверждение. Значит, подграфы, не содержащие малых компонент графов из $\mathcal{G}'(2)$, в которых они выбраны, дают одинаковый вклад в $\mathcal{N}$ и в $\mathcal{N}^*$.

Теперь рассмотрим подграф $L \in \mathcal{N}$, полученный из графа $G - y \in \mathcal{G}'(2)$ и содержащий его малую компоненту. Не умаляя общности будем считать, что T_1 – главное множество $G - y$.

Мы знаем, что в $\mathrm{Dec}(L, T_1)$ есть граф, изоморфный H. Так как $A_1 \in \mathrm{Part}(G; T_1)$ – главная часть, $H = G(A_1)$. Следовательно, $L = G_1^1 \cup H = F$ (такой подграф ровно один в каждом графе $G - y \in \mathcal{G}'(G_j)$). Аналогично, в $\mathcal{N}^*$ все содержащие G_1^* подграфы изоморфны F^*. Следовательно, в $\mathcal{N}$ строго больше подграфов, изоморфных F чем в $\mathcal{N}^*$. Это обстоятельство позволяет нам различить графы G и G^*, а значит, отличить G от G^* по $\mathcal{D}(G)$.

Все случаи разобраны, теорема доказана.

Список литературы

1. P. J. Kelly, *A congruence theorem for trees.* — Pacific J. Math. **7** (1957), 961–968.
2. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* — Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
3. S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems,* Wiley, New York (1960).
4. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press (1966).
5. J. A. Bondy, *On Ulam's conjecture for separable graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press (1966).
6. Y. Yongzhi, *The reconstruction conjecture is true if all 2-connected graphs are reconstructible.* — J. Graph Theory **12** (1988), 237–243.
7. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин, ПОМИ **266** (2000), 76–106.
8. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
9. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
10. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
11. Д. В. Карпов *Минимальные двусвязные графы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 106–127.

Karpov D. V. On the reconstruction of graphs of connectivity 2 having a 2-vertex set dividing this graph into at least 3 parts.

Recall that *the deck* of a graph G is the collection of subgraphs $G - v$ for all vertices v of the graph G. Let G be a of a 2-connected graph having a 2-vertex set dividing this graph into at least 3 parts. We prove that G is reconstructible by its deck. The proof contains an algorithm of the reconstruction.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 2 декабря 2022 г.