

В. А. Воронов, А. Я. Канель-Белов, Г. А. Струков,
Д. Д. Черкашин

О ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ ТРЕХМЕРНЫХ СЛОЕК

§1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения являются раскраски множества $\text{Slice}(n, k, \varepsilon) = \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]^k$ в конечное количество цветов с запрещенным расстоянием 1 между одноцветными точками; такие множества мы будем называть *слоями*. Для удобства назовем n *размерностью* слоя.

Определим граф $G(n, k, \varepsilon)$, вершинами которого являются точки слоя, а ребрами связаны точки, находящиеся на единичном евклидовом расстоянии в метрике, индуцированной вложением в евклидово пространство. Пусть

$$\chi[\text{Slice}(n, k, \varepsilon)] := \chi[G(n, k, \varepsilon)].$$

Очевидно, что для любого положительного ε выполнены неравенства

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq \chi[\text{Slice}(n, k, \varepsilon)] \leq \chi(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Поскольку $\chi(\mathbb{R}^n) = (3 + o(1))^n$ (см. [9]), хроматическое число слоя конечно. По теореме де Брёйна – Эрдёша хроматическое число достигается на конечном подграфе.

1.1. Задача Нельсона–Хадвигера и ее плоские обобщения. В наших обозначениях классическая задача Нельсона – Хадвигера заключается в нахождении $\chi[\text{Slice}(2, 0, 0)]$, но мы будем использовать стандартное обозначение $\chi(\mathbb{R}^2)$ для этой величины. Наилучшими известными на сегодняшний день являются оценки

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Верхняя оценка следует из классической раскраски замощения плоскости шестиугольниками, впервые показанной Избеллом. Нижняя оценка получена де Греем [4] в 2018, и улучшает результат 70-летней давности (другие конструкции приведены в [6, 7, 11, 12, 14]).

Ключевые слова: дистанционные графы, хроматическое число пространства.
Работа А. Я. Канель-Белова поддержана грантом РФФИ No. 22-11-00177.

Раскраски слоев начали изучаться в работе [8], приведем её основной результат.

Теорема 1. *Для любого положительного ε выполняется*

$$6 \leq \chi[\text{Slice}(2, 2, \varepsilon)].$$

Теорема 1 усиливает неравенство $\chi_\varepsilon(\mathbb{R}^2) \geq 6$ (Карри – Эгглтон [3]), где χ_ε обозначает минимальное число цветов, в которое можно покрасить плоскость так, что расстояние между любой парой одноцветных точек не попадает в интервал $[1 - \varepsilon, 1]$. Экзо [5] предположил, что для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство $\chi_\varepsilon(\mathbb{R}^2) = 7$.

С другой стороны, раскраска Избелла влечет неравенство

$$\chi_\varepsilon(\mathbb{R}^2) \leq 7$$

для любого $\varepsilon < 0.13\dots$. Как следствие, для любого натурального k найдется такое $\varepsilon_k > 0$, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_k$ выполняется

$$\chi[\text{Slice}(2, k, \varepsilon)] \leq 7.$$

Структура статьи. Результаты про трехмерные вещественные и двумерные рациональные слои изложены в подразделах 1.2 и 1.3, соответственно. Технические утверждения изложены в разделе 2. Доказательства результатов приведены в разделах 3, 4 и 5. Дальнейшие вопросы обсуждаются в разделе 6.

1.2. Хроматические числа вещественных трехмерных слоев.

Перейдем к хроматическому числу трехмерного пространства. Классическая нижняя оценка $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 6$ принадлежит Нечуптану [10]. Верхняя оценка $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$, получена независимо Кулсоном [2] и Радойчи-чем и Тотом [13].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом положительном $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняются неравенства*

$$10 \leq \chi[\text{Slice}(3, 6, \varepsilon)] \leq 15.$$

Оценка сверху непосредственно следует из доказательств верхней оценки на $\chi(\mathbb{R}^3)$, аналогично двумерному случаю. Оценка снизу требует несколько более сложных рассуждений, чем для плоских слоев.

В частности, мы доказываем следующую, представляющую отдельный интерес, теорему, которая является количественным усилением теоремы 10 из [8].

Теорема 3. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ – правильный симплекс со стороной $a = \sqrt{2n(n+1)}$. Тогда при произвольной правильной раскраске \mathbb{R}^n в конечное число цветов найдется точка из T , принадлежащая замыканию хотя бы $n+1$ множества цветов.

Следствие 1. Для любого положительного ε' выполняется неравенство

$$\chi_{\varepsilon'}(\mathbb{R}^3) \geq 10.$$

В самом деле, граф единичных расстояний, обеспечивающий нижнюю оценку в Теореме 2 для какого-либо конкретного значения ε , в ортогональной проекции на \mathbb{R}^3 имеет длины ребер из отрезка $[\sqrt{1-6\varepsilon^2}, 1]$.

1.3. Хроматические числа двумерных рациональных слоев.

Обозначим через $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}$ множество рациональных чисел, принадлежащих отрезку $[0, \varepsilon]$. В статье [15] показано, что $\chi(\mathbb{Q} \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^3) = 3$. Бенда и Перлес [1] показали, что $\chi(\mathbb{Q}^4)$ равно 4. Значит, хроматическое число пространства $\mathbb{Q}^2 \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2$ никак не может быть больше 4.

Утверждение 1. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\chi(\mathbb{Q}^2 \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2) = 4.$$

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Далее мы рассматриваем слойку $\text{Slice}(3, 6, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^9$. Через $S_r^n(x)$ будем обозначать n -мерную сферу радиуса r с центром в точке x .

Определение 1. Назовем присоединенной сферой симплекса с вершинами $\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}$, $3 \leq k \leq 4$ множество точек, лежащих на расстоянии 1 от каждой из его вершин:

$$S(v_1, \dots, v_k; 1) := \bigcap_i S(v_i; 1) \subset \mathbb{R}^9.$$

Заметим, что если радиус r описанной $(k-2)$ -мерной сферы v_1, \dots, v_k меньше единицы, то $S(v_1, \dots, v_k; 1)$ является $(9-k)$ -мерной сферой радиуса $\sqrt{1-r^2}$.

Определение 2. Пусть t -экватор присоединенной сферы – некоторая сфера размерности t равного с радиуса, лежащая в S .

Определение 3. Пусть пространство X раскрашено в несколько цветов. Точка v имеет цветность $c(v)$, если v принадлежит ровно $c(v)$ из множеств $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \dots, \overline{C}_m$, где C_i – множество точек, раскрашенных в i -й цвет.

Лемма 1 (Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz). Пусть $(n-1)$ -мерный симплекс покрыт замкнутыми множествами X_1, \dots, X_n таким образом, что любая грань $I \subset [n]$ лежит в объединении множеств X_i по $i \in I$. Тогда множества X_i имеют общую точку.

Следующая лемма доказывается в [8] в плоском случае. Её доказательство переносится на случай сферы напрямую.

Лемма 2. Пусть S_r^2 – сфера радиуса $r > \sqrt{\frac{1}{2}}$, ε – произвольное положительное число; $Q \subset S_r^2$ – ε -окрестность некой сферической кривой ξ , такой что

$$\text{diam } \xi > \frac{\sqrt{4r^2 - 1}}{r}.$$

Тогда $\chi(Q) \geq 3$.

Доказательство. Не умаляя общности, $\varepsilon < 1$. Найдем нечетный цикл в соответствующем графе $G(Q)$.

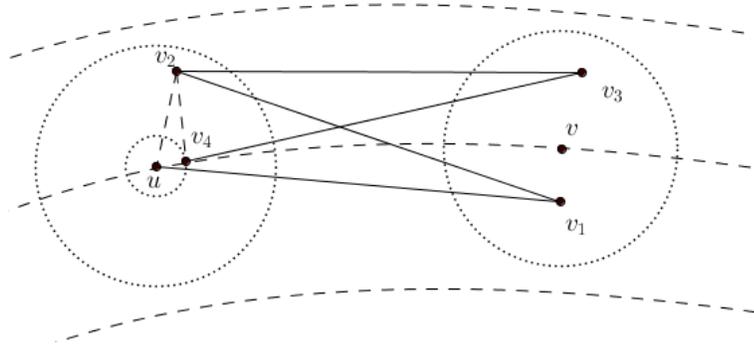
Рассмотрим произвольную точку $u \in \xi$. Поскольку $\text{diam } \xi > \frac{\sqrt{4r^2 - 1}}{r} = \text{diam } S(u; 1)$, пересечение $S(u; 1)$ и ξ непусто. Пусть $v \in S(u; 1) \cap \xi$; рассмотрим точки $v_1, v_2, v_3, v_4 \in S_r^2$, такие что $\|u - v_1\| = 1$; $\|v_i - v_{i+1}\| = 1$; $i = 1, 2, 3$. Если углы между соседними единичными звеньями ломаной $uv_1v_2v_3v_4$ не превосходят $\frac{\varepsilon}{2}$, то $\|v - v_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|u - v_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|v - v_3\| < \varepsilon$, $\|u - v_4\| < \varepsilon$, тем самым $v_i \in Q$, $i = 1, 2, 3, 4$.

При этом

$$l_1 = \|u - v_2\| \in \left[0; 2 \sin \frac{\varepsilon}{4}\right],$$

$$l_2 = \|v_2 - v_4\| \in \left[0; 2 \sin \frac{\varepsilon}{4}\right]$$

могут быть выбраны произвольным образом, а ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{v_2u}$ и $\overrightarrow{v_2v_4}$ независимо выбирается из отрезка $[-\frac{\varepsilon}{4}; \frac{\varepsilon}{4}]$. Зафиксируем прямую, содержащую вектор $\overrightarrow{v_2u}$ (пусть, например, он ортогонален uv). Тогда всевозможные положения точки v_4 образуют некоторую фигуру, содержащую ромб с центром в u , стороной $2 \sin \frac{\varepsilon}{4}$ и углом $\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, существует путь длины 4 между u и любой точкой из γ -окрестности u , где $\gamma = \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{4}$.

Рис. 1. Путь длины 4 между точками u и v_4 .

Таким образом, идя по кривой ξ шагами размера не более γ от u к v , мы строим путь четной длины между точками u и v , а значит, и нечетный цикл в $G(Q)$. \square

Лемма 3. Пусть сфера $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$, $r > \sqrt{\frac{1}{2}}$ правильно раскрашена в произвольное число цветов. Тогда на ней найдется точка цветности по крайней мере 3.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{\sqrt{4r^2 - 1}}{r} < 2r$$

при $r > \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Из-за компактности сферы нам достаточно показать, что найдется круг сколь угодно малого радиуса, содержащий точки по крайней мере трех цветов. Предположим противное: найдется правильная раскраска сферы и $\varepsilon > 0$ такие, что все круги радиуса ε содержат точки не более двух различных цветов. Разобьем сферу на клетки, каждая из которых содержит круг радиуса $\delta = \varepsilon/100$, и содержится в круге радиуса $\varepsilon/10$. Тогда каждая такая клетка раскрашена не более чем в два цвета, более того, все клетки, граничащие с данной, покрашены не более, чем в два цвета.

Рассмотрим произвольную двухцветную клетку (скажем, цветов 1 и 2), и содержащую ее максимальную по включению (возможно, неодносвязную) область A_0 , состоящую из одноцветных и двухцветных клеток, покрашенных в цвета 1 и 2. Диаметр области A_0 не может превышать $\frac{\sqrt{4r^2-1}}{r} < 2r$, иначе рассмотрев произвольный путь между диаметральноми точками, мы получим противоречие с леммой 2. Это позволяет рассмотреть внешнюю границу p области A_0 . Заметим, что каждая клетка из A_0 , примыкающая к p граничит с клеткой, не входящей в A_0 и следовательно одноцветна; также все цвета клеток из A_0 вдоль p совпадают, поскольку иначе существует круг, содержащий клетку цвета 1, клетку цвета 2, и клетку не из A_0 , что противоречит условию. Таким образом, можно считать, что все клетки из A_0 вдоль p покрашены в первый цвет. Аналогичное рассуждение показывает, что клетки не из A_0 вдоль p не могут содержать двух разных цветов, отличных от 1 и 2, а также не могут содержать цвет 2. Значит все клетки, примыкающие к p покрашены в цвета 1 или 3 (или в оба). Рассмотрим область A_1 – максимальную по включению область, содержащую клетки вдоль p , и покрашенную только в цвета 1 и 3. Для нее применимы те же рассуждения, что дает нам последовательность двухцветных областей A_i .

Заметим, что (сферический) диаметр области A_i увеличивается на каждом шаге хотя бы на δ . Таким образом, в какой-то момент мы получим противоречие с леммой 2. \square

При доказательстве основного результата нам потребуется техническое утверждение, касающееся устойчивости описанной окружности треугольника, вершины которого имеют координаты вида $(0, 0, 0, b_1, \dots, b_6)$, по отношению к сдвигам вершин по направлениям, параллельным основному пространству \mathbb{R}^3 , т.е. векторам с координатами вида $(p, q, r, 0, \dots, 0)$. Будем называть такой сдвиг *ортогональным*. Далее мы будем применять следующую лемму для случая S^5 , но докажем ее в общем случае.

Лемма 4. Пусть на сфере S^k выбрано m точек так, что минимальное расстояние между выбранными точками равно $\Omega(m^{-2})$. Тогда существует треугольник T из выбранных точек, такой, что при любом ортогональном сдвиге точек на величины, равные $O(m^{-3})$, радиус R описанной окружности T меняется на $O\left(\frac{R}{m^2}\right)$, и центр описанной окружности сдвигается не более, чем на $O\left(\frac{R}{m}\right)$.

Доказательство. Найдем треугольник \mathcal{T}_0 из выбранных точек с высотами $\Omega(m^{-2})$. Предположим, что такого треугольника не найдется. Рассмотрим максимальное расстояние между данными точками, пусть оно достигается между точками A и B . Тогда все остальные точки должны лежать в $o(m^{-2})$ -окрестности большого круга AB (любого большого круга AB , если точки A и B были диаметрально противоположными): в самом деле, иначе высота из точки C на AB равна $\Omega(m^{-2})$ и она наименьшая из высот треугольника ABC , поскольку точки A и B выбирались на максимальном расстоянии и ABC подходит на роль \mathcal{T}_0 .

Рассмотрим проекции выбранных точек на большой круг AB – они определены однозначно. Поскольку попарные расстояния между выбранными точками равны $\Omega(m^{-2})$, а точки лежат в $o(m^{-2})$ -окрестности большого круга AB , проекции отстоят друг от друга хотя бы на $\Omega(m^{-2})$. На одну из дуг AB попала проекция хотя бы $m_1 \geq m/2$ точек. Пронумеруем точки по проекции на этой дуге AB ; пусть C – точка с номером $[m_1/2]$. Тогда AC и BC равны $\Omega(1/m)$. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC . Обозначим длины сторон AB, BC, AC за c, a, b , соответственно; пусть длины высот равняются h_a, h_b, h_c .

Ясно, что $\angle ACB$ – больший из углов треугольника ABC и

$$\angle ACB \leq \angle OCA + \angle OCB = \arccos \frac{b}{2R} + \arccos \frac{a}{2R} \leq 2 \arccos \frac{\Omega(1/m)}{2R},$$

так как треугольники ACO и BCO равнобедренные. Тогда

$$2 \arccos \frac{\Omega(1/m)}{2R} = \pi - \frac{\Omega(1/m)}{R}.$$

Следовательно, $\sin \angle ACB = \sin(\pi - \angle ACB) = \Omega(1/m)$. Поскольку AB – наибольшая сторона, то высота из точки C – наименьшая. Тогда, поскольку синус хотя бы одного из углов A и B также равен $\Omega(1/m)$, высота из точки C равняется $\Omega(1/m^2)$.

Треугольник $\mathcal{T}_0 = ABC$ найден, покажем, что он годится в качестве \mathcal{T} . Сохраним обозначения для параметров треугольника \mathcal{T}_0 , введенные выше. Пусть сдвинутые точки – A', B' и C' . Обозначим через Δq изменение величины q при переходе от ABC к $A'B'C'$.

Покажем, что ортогональный сдвиг концов отрезка $y_1 y_2$ на $O(m^{-3})$ изменяет (увеличивает) длину отрезка l на $O(m^{-6}l^{-1})$. Обозначим сдвинутые точки z_1, z_2 соответственно. В силу ортогональности

$(y_i - y_j, z_j - y_j) = 0$. Квадрат новой длины равен

$$(z_1 - z_2, z_1 - z_2) = \|(z_1 - y_1) + (y_1 - y_2) + (y_2 - z_2)\|^2 = \\ = (z_1 - y_1, z_1 - y_1) + (y_1 - y_2, y_1 - y_2) + (z_2 - y_2, z_2 - y_2) - 2(z_1 - y_1, z_2 - y_2);$$

То есть разница квадратов длин оценивается как

$$(z_1 - z_2, z_1 - z_2) - (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = O(m^{-6}).$$

Осталось применить формулу разности квадратов.

Получается, что $\Delta a = O(m^{-6}a^{-1})$, аналогично для других сторон. Пусть H – основание высоты CH , поскольку AB – наибольшая, H принадлежит отрезку AB . Заметим, что длина высоты h_c не может уменьшиться, а с другой стороны, расстояние от сдвинутой вершины C до точки, которая проецируется в H , меняется не больше чем на $O(m^{-6}h_c^{-1})$, и длина новой высоты h'_c не превосходит это расстояние. Пусть S – площадь треугольника ABC , тогда

$$\Delta S = O(c\Delta h_C + \Delta c \cdot h_C) = O(h_c m^{-6} c^{-1}) + O(c m^{-6} h_c^{-1}),$$

следовательно,

$$\frac{\Delta S}{S} = O(m^{-6} c^{-2}) + O(m^{-6} h_c^{-2}) = O(m^{-2}).$$

Воспользовавшись известной формулой

$$R = \frac{abc}{4S},$$

получаем

$$\Delta R = O\left(\max\left(\frac{\Delta a \cdot bc}{S}, \frac{\Delta b \cdot ac}{S}, \frac{\Delta c \cdot ab}{S}, \frac{abc\Delta S}{S^2}\right)\right) \\ = O\left(\max\left(\frac{\Delta a}{a}R, \frac{\Delta b}{b}R, \frac{\Delta c}{c}R, \frac{\Delta S}{S}R\right)\right) = O\left(\frac{R}{m^2}\right),$$

что и требовалось.

Ограничим сдвиг центра описанной окружности при изменении по одной координате. Выше мы показали, что высоты и стороны треугольника слабо изменяются при ортогональном сдвиге вершин на величины $O(m^{-3})$, а значит можно будет повторить следующую оценку несколько раз.

Рассмотрим трехмерные декартовы координаты, где C – центр, плоскость ABC порождена первыми двумя координатами, а последняя отвечает инфинитезимальному сдвигу. Тогда нормаль к плоскости ABC

имеет вид

$$\bar{v}_1 = \bar{AC} \times \bar{BC} = (0, 0, 2S).$$

Тогда нормаль к плоскости $A'B'C'$ равна

$$\bar{v}_2 = A'\bar{C}' \times B'\bar{C}' = (A_y B'_z - A'_z B_y, A_x B'_z - A'_z B_x, 2S).$$

Не умаляя общности, $a \geq b$ и тогда $|A_x|, |B_x|, |A_y|, |B_y| \leq a$. Следовательно $|A_y B'_z - A'_z B_y|, |A_x B'_z - A'_z B_x| = O(am^{-3})$. Напомним, что $S = 0.5ah_a = \Omega(am^{-2})$, что влечет $|A_y B'_z - A'_z B_y|, |A_x B'_z - A'_z B_x| = O(Sm^{-1})$. Оценим угол ϕ между плоскостями ACB и $A'B'C'$:

$$\cos \phi = \frac{(v_1, v_2)}{\sqrt{(v_1, v_1) \cdot (v_2, v_2)}} = \frac{4S^2}{2S \cdot \sqrt{4S^2 + O(S^2 m^{-2})}} = 1 - O(m^{-2}),$$

$$\phi = O(m^{-1}).$$

Следовательно, изменение центра не превосходит $O(R \sin \phi) = O(R/m)$. \square

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Предположим противное. Пусть C_i – множество всех точек \mathbb{R}^n , раскрашенных в i -й цвет, $1 \leq i \leq m$. Пусть также

$$C_i^* := \overline{\text{Int } \bar{C}_i} \quad (\text{замыкание внутренности замыкания}).$$

Разобьем каждое из множеств C_i^* на компоненты связности (в смысле стандартной топологии):

$$C_i^* = \bigcup_{\alpha \in A_i} D_\alpha.$$

Для краткости введем обозначение $\{D_\alpha\} = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{\alpha \in A_i} D_\alpha$.

(i). Множества C_i^* образуют покрытие \mathbb{R}^n .

Пусть верно обратное: $\exists v : \forall i \quad v \notin C_i^*$. Тогда существует открытый шар $B(v; \eta)$:

$$B(v; \eta) \cap C_i^* = \emptyset; \quad B(v; \eta) \subset \bigcup C_i.$$

Рассмотрим некоторый шар

$$B^1 \subset B(v; \eta) \setminus \bar{C}_1.$$

Очевидно, B^1 не может быть подмножеством \overline{C}_i – иначе пересечение внутренности \overline{C}_i и $B(v; \eta)$ было бы непусто. Определим последовательность вложенных шаров

$$B^{k+1} \subset B^k \setminus \overline{C}_k.$$

Точки из B^{m+1} не принадлежат ни одному из \overline{C}_i , что противоречит исходным предположениям.

(ii). Пусть точка $v \in T$ принадлежит ровно k множествам из C_i^* ; без ограничения общности, $1 \leq i \leq k$; кроме того, $k \leq n$ (иначе точка цветности по крайней мере $n + 1$ найдена). Тогда для любого $\mu_0 > 0$ найдется такое положительное $\mu < \mu_0$, что сфера $S(v; 1 - \mu)$ не пересекается хотя бы с одним из этих k множеств.

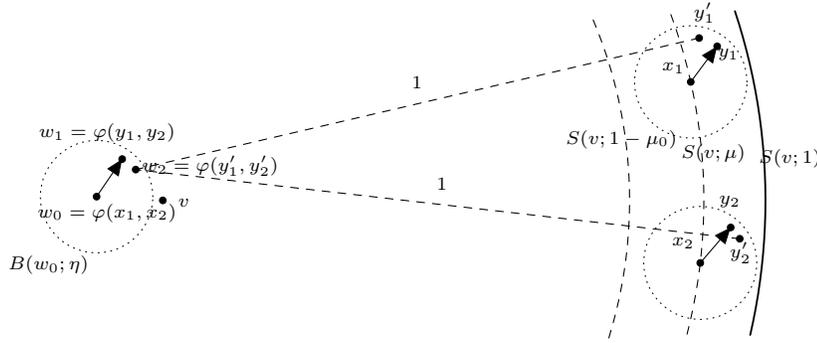


Рис. 2. К пункту (ii).

В противном случае найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $\mu \in (0, \mu_0)$ выполнено

$$S(v; 1 - \mu) \cap C_i^* \neq \emptyset, \quad 1 \leq i \leq k.$$

По построению множества C_i^* таковы, что в произвольно малой окрестности любой точки $x \in C_i^*$ найдется точка из $\text{Int } \overline{C}_i$. Следовательно, множество

$$\mathcal{M}_0 := \{\mu \in (0, \mu_0) \mid \exists i : S(v; 1 - \mu) \cap \text{Int } \overline{C}_i = \emptyset\}$$

замкнуто и нигде не плотно.

Зафиксируем некоторое $\mu \in (0, \mu_0) \setminus \mathcal{M}_0$. Заметим, что некоторая окрестность μ не содержит точек из \mathcal{M}_0 . Можно выбрать точки

x_1, \dots, x_k таким образом, что

$$x_i \in S(v; 1 - \mu) \cap \text{Int } \overline{C}_i, \quad 1 \leq i \leq k;$$

и $\{v, x_1, \dots, x_k\}$ находятся в общем положении (в смысле невырожденности симплексов). Определим такое $\eta > 0$, что $B(x_i; \eta) \subset C_i^*$, $1 \leq i \leq k$. Пусть

$$z \in B(0; \eta); \quad y_i = x_i + z.$$

Определим

$$w_0 = \varphi(x_1, \dots, x_k) := \text{Arg min}_{u \in U} \|u - v\|, \quad U = \bigcap_{1 \leq i \leq k} S(x_i; 1),$$

$$w_1 = \varphi(y_1, \dots, y_k).$$

По построению цвет точки w_1 отличается от каждого из цветов точек y_1, \dots, y_k .

В достаточно малой окрестности набора точек $\{y_i\}$ функция $\varphi(\cdot)$ определена и непрерывна по каждому из аргументов. Выберем такие точки

$$y'_i \in C_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

что существует $w_2 = \varphi(y'_1, \dots, y'_k)$. Тогда

$$w_2 \in \bigcup_{j=k+1}^m C_j.$$

При этом

$$\delta(y'_1, \dots, y'_k) := \max_{1 \leq i \leq k} \|y'_i - y_i\|$$

может быть сколь угодно малым, следовательно

$$w_1 \in \bigcup_{j=k+1}^m \overline{C}_j.$$

Поскольку $z \in B(0; \eta)$ произвольно,

$$B(w_0; \eta) \subset \bigcup_{j=k+1}^m \overline{C}_j.$$

Следовательно, в произвольно малой окрестности w_0 найдется внутренняя точка хотя бы одного из множеств \overline{C}_j , $k+1 \leq j \leq m$, откуда $w_0 \in C_j^*$ для некоторого j . Поскольку $w_0 = \varphi(x_1, \dots, x_k) \rightarrow v$ при $\mu \rightarrow 0$, то v принадлежит хотя бы одному из C_j^* , $k+1 \leq j \leq m$, что противоречит первоначальному предположению.

(iii). Существует такое покрытие T множествами из $\{D_\alpha\}$, что каждое из покрывающих множеств содержится в некотором открытом единичном шаре.

Достаточно заметить, что согласно (ii) каждая точка покрыта хотя бы одним множеством, удовлетворяющим условию, и воспользоваться аксиомой выбора. Для каждого из цветов обозначим $\{D_\beta^{(i)}\}$ выбранные подмножества. Кроме того, пусть $\gamma(x) \in \{1, \dots, t\}$ означает цвет множества, сопоставленного точке $x \in T$.

(iv). Существует конечное покрытие T замкнутыми множествами D'_{ik} , $1 \leq i \leq t$, $1 \leq k \leq K_i$, каждое из которых является объединением некоторого набора множеств из $\{D_\alpha\}$ и содержится в открытом единичном шаре.

Для каждого цвета i ($1 \leq i \leq t$) построим некоторую последовательность точек $v_1^i, v_2^i, \dots \in \bigcup D_\beta^{(i)}$, удовлетворяющую условиям

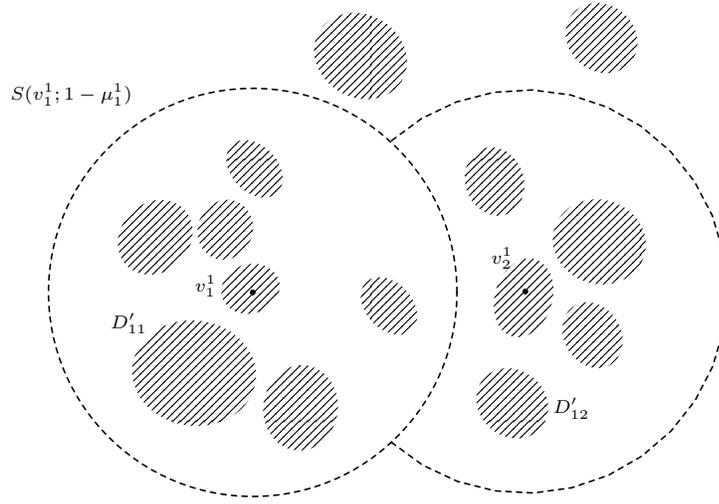
$$\begin{aligned} \gamma(v_j^i) &= i; \\ v_{s+1}^i &\in \bigcup D_\beta^{(i)} \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq s} B(v_j^i; 1). \end{aligned}$$

Будем выбирать новые точки, пока это возможно. Парные расстояния между v_j^i , $j = 1, 2, \dots$ не меньше единицы, и в силу компактности T последовательность будет конечной. Теперь определим

$$D'_{ik} = B(v_k^i; 1) \cap \left(\bigcup D_\beta^{(i)} \right) \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k-1} D'_{ij}.$$

Каждое из множеств D'_{ik} , согласно построению из пункта (ii), отделено от остальных компонент связности C_i^* сферой радиуса $1 - \mu_k^i$, где $\mu_k^i > 0$ можно выбрать сколь угодно близким к нулю (рис. 3). Отметим, что множества D'_{ik} замкнуты, поскольку сфера, построенная в (ii), находится на положительном расстоянии от компактного множества C_i^* , а значит, и от D'_{ik} .

Возвращаясь к основной конструкции, заметим, что ни одно из множеств D'_{ik} не может пересекаться со всеми гранями симплекса T , поскольку каждое из этих множеств содержится в открытом шаре единичного радиуса, а диаметр вписанной сферы T равен единице. Разобьем набор покрывающих множеств $\mathcal{D}' = \bigcup_i \{D'_{ik}\}$ на $n + 1$ подсемейство, сопоставив каждому множеству какую-либо из граней T , с которой оно не пересекается, и противоположную вершину. Пусть X_i , $i = 1, \dots, n + 1$ — объединения соответствующих подсемейств. Тогда по

Рис. 3. К пункту (iv). Построение множеств D'_{ik}

лемме 1 множества X_i имеют общую точку x_* , а значит, x_* принадлежит по крайней мере $n + 1$ множеству из семейства $\{D_\alpha\}$. Они, в свою очередь, являются подмножествами по крайней мере $n + 1$ различного множества из $\{C_i^*\}$ (в противном случае они не могли бы быть различными компонентами связности). Следовательно, x_* имеет цветность по крайней мере $n + 1$.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Схема доказательства. Во-первых, требуется найти такие четыре разноцветные точки v_1, v_2, v_3, v_4 , чтобы пересечение I присоединенной сферы $S(v_1, v_2, v_3, v_4; 1)$ со слойкой содержало двумерный экватор S^2 этой сферы, и чтобы радиус сферы был как можно ближе к единице.

В этом случае I очень близко (например, в смысле расстояния Хаусдорфа) к множеству $S_{1-\eta}^2 \times [0, \varepsilon]^3$ для достаточно малого η , и к нему можно применить те же рассуждения, которые были использованы для двумерной слойки [15]. Отметим, что в этом множестве запрещены цвета точек v_1, v_2, v_3, v_4 .

Найдем в I три разноцветные точки v_5, v_6, v_7 , такие, что экватор их присоединенной сферы лежит в слойке. Тогда присоединенная сфера

точек v_1, \dots, v_7 имеет экватор, лежащий в слойке, а ее пересечение со слойкой представляет собой двумерный “поясок”. Для его раскраски потребуется еще 3 цвета – в дополнение к попарно различным цветам точек v_1, \dots, v_7 .

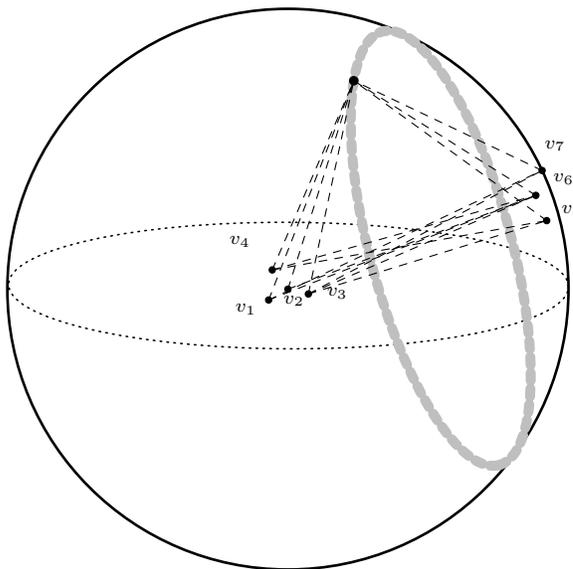


Рис. 4. Построение множества из 10 разноцветных точек.

Шаг 1. Построение четверки разноцветных точек v_1, v_2, v_3, v_4 , для которых присоединенная сфера имеет близкий к единице радиус и лежащий внутри слойки экватор.

Для этого требуется, чтобы линейное подпространство U размерности 3, содержащее v_1, v_2, v_3, v_4 , было “почти ортогонально” основному пространству \mathbb{R}^3 , а также чтобы радиус описанной сферы этих точек в U был достаточно мал.

Введем в слойке $\mathbb{R}^3 \times [0, \varepsilon]^6$ декартовы координаты:

$$v = (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_6), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad y_i \in [0, \varepsilon].$$

Определим для точки $v = (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_6)$ проекции

$$p_R(v) = (x_1, x_2, x_3, 0, \dots, 0) \quad \text{и} \quad p_\varepsilon(v) = (0, 0, 0, y_1, \dots, y_6).$$

Рассмотрим сферу $S := S_{\varepsilon_1}^5$ радиуса $\varepsilon_1 \leq \varepsilon/4$ с центром в точке $(0, 0, 0, \varepsilon/2, \varepsilon/2, \dots, \varepsilon/2)$, лежащую в кубе $(0, 0, 0) \times [0, \varepsilon]^6$. Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ – произвольный правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{6}$ и центром в начале координат; u – произвольная точка сферы S . Согласно теореме 3, в слое $T \times \{u\} \subset T \times S$ содержится точка цветности хотя бы 4.

Зафиксируем параметры $\delta, h > 0$, которые мы выберем позднее.

Рассмотрим множество точек $U = \{u_1, \dots, u_k\} \subset S$, таких, что $\|u_i - u_j\| \geq \delta$, $i \neq j$, и k максимально. Очевидно, что $k = \Omega(\delta^{-5})$. Каждой точке $u_i \in U$ сопоставим точку u_i^* цветности хотя бы 4 в слое $T \times \{u_i\}$.

Посечем множество T стандартной кубической решеткой с шагом h :

$$T_{i,j,k} := \bigsqcup_{i,j,k} T \cap Z_{i,j,k}; \quad Z_{i,j,k} := [ih, (i+1)h) \times [jh, (j+1)h) \times [kh, (k+1)h),$$

где i, j, k – целые числа. Поскольку $T \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное множество, выполняется

$$\#\{(i, j, k) : T \cap Z_{i,j,k} \neq \emptyset\} = O(h^{-3}).$$

Рассмотрим точки $w_i = p_R(u_i^*) \in T$. Пусть $h = \delta^{3/2}$. Тогда найдется множество $T_{a,b,c}$, которому принадлежат не менее

$$m = \frac{\Omega(\delta^{-5})}{O(\delta^{-9/2})} = \Omega\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right)$$

точек из $\{w_i\}$. Заметим, что $h = O(m^{-3})$, $\delta = O(m^{-2})$ и

$$\text{diam } T_{a,b,c} \leq \sqrt{3}h = \sqrt{3}\delta^{3/2} = O(m^{-3}).$$

Теперь применим для этого набора из m точек лемму 4. Она выдаст треугольник $\mathcal{T} = w_1 w_2 w_3$, такой, что его произвольный достаточно малый ортогональный сдвиг, и в частности, треугольник $u_1^* u_2^* u_3^*$ имеет описанную окружность ω радиуса не более $(1/4 + O(m^{-2}))\varepsilon$, лежащую внутри слойки. Построим (пятимерную) сферу S^* на ω как на диаметре и выберем v_4 наиболее удаленной точкой от плоскости $u_1^* u_2^* u_3^*$ на сфере S^* . Тогда симплекс $u_1^* u_2^* u_3^* v_4$ – невырожденный симплекс, чья описанная сфера принадлежит внутренности слойки.

Осталось выбрать в произвольно малых окрестностях точек u_1^*, u_2^* и u_3^* точки v_1, v_2 и v_3 соответственно таким образом, чтобы точки v_1, v_2, v_3 и v_4 были попарно разных цветов.

Шаг 2. Построение таких точек v_5, v_6, v_7 различных цветов на присоединенной сфере $S(v_1, v_2, v_3, v_4; 1)$, чтобы экватор присоединенной (двумерная) сфера $S(v_1, \dots, v_7; 1)$ лежал внутри слойки. Заметим, что $S(v_1, \dots, v_7; 1) = S(v_1, \dots, v_4; 1) \cap S(v_5, v_6, v_7; 1)$, и подходящим выбором ε_1, h можно добиться того, что радиусы пересекаемых сфер и расстояние между ними будут близки к 1, а тогда радиус $S(v_1, \dots, v_7; 1)$ близок к $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$.

Пусть пересечение присоединенной сферы со слойкой

$$M := S(v_1, v_2, v_3, v_4; 1) \cap \mathbb{R}^3 \times [0, \varepsilon]^6 = S_{1-\eta}^5 \cap \mathbb{R}^3 \times [0, \varepsilon]^6$$

правильно раскрашено в произвольное число цветов, причем экватор $M_E = S_{1-\eta}^2$ лежит во внутренности слойки.

Рассмотрим подпространство $H \subset \mathbb{R}^9$ размерности 6, в котором лежит $S_{1-\eta}^5$, и введем в нем систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в центре сферы, а первые три координаты соответствовали трехмерному подпространству, в котором лежит M_E . Каждой точке $u \in M_E$, $u = (u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0)$ сопоставим сферу

$$S^2(u; \nu) = \{\sqrt{1 - \nu^2}u + \xi \mid \xi = (0, 0, 0, \xi_4, \xi_5, \xi_6); \|\xi\| = \nu(1 - \eta)\}.$$

Заметим, что $S^2(u; \nu)$ – подмножество M при малых ν .

Далее, достаточно рассмотреть пять точек на каждой сфере $S^2(u; \nu)$, находящиеся в вершинах правильного 5-угольника:

$$w_{u,k} = \left(u_1, u_2, u_3, \cos \frac{2\pi k}{5} \nu, \sin \frac{2\pi k}{5} \nu, 0 \right), \quad k = 1, \dots, 5.$$

Если для некоторой точки u среди $w_{u,1}, \dots, w_{u,5}$ найдутся точки трех различных цветов, то их можно взять в качестве v_5, v_6, v_7 . В противном случае в каждой такой пятерке встречается не более чем два цвета, и есть цвет, в который покрашены по крайней мере три точки. Назовем этот цвет *доминирующим* в точке u .

Пусть теперь каждая точка двумерной сферы M_E раскрашена в доминирующий цвет. Нетрудно видеть, что эта раскраска – правильная. В самом деле, если точки $p, q \in M_E$ находятся на единичном расстоянии, то $\|w_{p,k} - w_{q,k}\| = 1$, и доминирующие цвета в p и q не могут совпадать.

Применим лемму 3: на сфере M_E найдется точка u^* цветности 3, то есть в произвольно малой окрестности u^* найдутся точки с попарно

различными доминирующими цветами. Тогда из соответствующих пяттерок можно выбрать точки трех различных цветов, лежащие в произвольно малых окрестностях трех различных точек из $w_{u^*,1}, \dots, w_{u^*,5}$. В этом случае любой треугольник с вершинами в этих точках заведомо невырожден, и все попарные расстояния больше ν .

Шаг 3. Заметим, что каждая из попарно разноцветных точек v_1, v_2, v_3, v_4 находится на единичном расстоянии от каждой из попарно разноцветных точек v_5, v_6, v_7 . Кроме того, пересечение присоединенной сферы $S(v_1, \dots, v_7; 1)$ со слойкой, согласно лемме 2 (примененной к экватору, лежащему в слойке), имеет хроматическое число по крайней мере 3. Следовательно, для раскраски слойки требуется не менее $4+3+3=10$ цветов, и доказательство закончено.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1

Рассмотрим 4 точки с явно заданными рациональными координатами:

$$A = (0, 0, 0, 0), \quad (1)$$

$$B = (q, \frac{1}{2}, \alpha, \beta), \quad C = (q, -\frac{1}{2}, \alpha, \beta), \quad (2)$$

$$D = (2q, 0, 0, 0). \quad (3)$$

Видно, что

$$|AB|^2 = |AC|^2 = |BD|^2 = |CD|^2 = q^2 + \frac{1}{4} + \alpha^2 + \beta^2. \quad (4)$$

Наша цель – подобрать числа $q \in \mathbb{Q}$ и $\alpha, \beta \in [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}$ так, чтобы (4) было равно 1. Пусть $q = a/2b$, где a и b – целые числа. Тогда должно быть, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{3}{4} - \frac{a^2}{(2b)^2} = \frac{3b^2 - a^2}{4b^2}. \quad (5)$$

Например, нас устроят пары (a, b) , являющиеся решениями уравнения

$$3b^2 - a^2 = 2, \quad (6)$$

что при достаточно большом b позволяет взять α и β равными $\frac{1}{2b}$.

Построим серию решений уравнения (6) следующим образом. Из решения (a_n, b_n) получаем новое решение по формуле

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (7a_n + 12b_n, 4a_n + 7b_n). \quad (7)$$

То, что (a_{n+1}, b_{n+1}) – решение (6), проверяется непосредственно. Взяв $(a_0, b_0) = (1, 1)$, получаем бесконечно много решений, в которых b_n монотонно и неограниченно возрастает, а тогда с некоторого момента

$$\frac{3b_n^2 - a_n^2}{4b_n^2} = \frac{1}{2b_n^2} < 2\varepsilon^2, \quad (8)$$

для любого наперед взятого ε (а тогда $1/2b < \varepsilon$).

Давайте теперь докажем, что найдутся целые x и y , что

$$x \cdot \frac{a_n}{b_n} + y \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 1. \quad (9)$$

Выражение сверху эквивалентно

$$x \cdot a_n b_{n+1} + y \cdot a_{n+1} b_n = b_n b_{n+1}. \quad (10)$$

А такие x и y найдутся, если

$$\gcd(a_n b_{n+1}, a_{n+1} b_n) \mid b_n b_{n+1}. \quad (11)$$

Для этого достаточно доказать, что $\gcd(\dots) = 1$:

$$\begin{aligned} \gcd(a_n b_{n+1}, a_{n+1} b_n) &\mid (a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n), \\ a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n &= a_n(4a_n + 7b_n) - b_n(7a_n + 12b_n) \\ &= 4a_n^2 - 12b_n^2 = -4(3b_n^2 - a_n^2) = -8. \end{aligned}$$

А из (7) ясно, что

$$a_{n+1} \equiv a_n \equiv \dots \equiv a_0 = 1 \pmod{2}, \quad (12)$$

$$b_{n+1} \equiv b_n \equiv \dots \equiv b_0 = 1 \pmod{2}. \quad (13)$$

То есть искомый НОД может быть только 1, что и требовалось.

Пусть $\chi(\mathbb{Q}^2 \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2) = 3$. Тогда в начальной конструкции вершины A и D одного цвета. Значит все точки на расстоянии $k \cdot a_n/b_n + l \cdot a_{n+1}/b_{n+1}$ (где $1/2b_n^2 < 2\varepsilon^2$) от 0 (при целых k, l) одного и того же цвета. Взяв $k = x$ и $l = y$, получаем, что точка $(1, 0, 0, 0)$ того же цвета. Противоречие.

Замечание 1. Рекуррентная формула (7) получается следующим образом. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. На нём определена норма:

$$N(a + b\sqrt{3}) = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2.$$

Тогда (6) превращается в уравнение $N(\alpha) = -2$. Норма мультипликативна: для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ выполняется $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. Таким образом, если $N(\alpha) = -2$ и $N(\zeta) = 1$, то $N(\alpha\zeta) = -2$. Для получения (7) нужно взять $\zeta = 7 + 4\sqrt{3}$.

§6. ДАЛЬНЕЙШИЕ ВОПРОСЫ

Задача 1. Пусть \mathcal{M}_n – семейство таких компактных выпуклых подмножеств \mathbb{R}^n , что при правильной раскраске \mathbb{R}^n в каждом $M \in \mathcal{M}_n$ найдется точка цветности $n + 1$. Как оценить сверху $V_n^* = \inf_{M \in \mathcal{M}_n} \text{Vol } M$?

Теорема 3 дает оценку $V_n^* \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n! \sqrt{2^n}} \cdot \left(\sqrt{2n(n+1)} \right)^n = \frac{\sqrt{n^n (n+1)^{n+1}}}{n!}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Benda, M. Perles, *Colorings of metric spaces*. — *Geombinatorics* **9**, No. 3 (2000), 113–126.
2. D. Coulson, *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*. — *Discrete Mathematics* **256**, No. 1 (2002), 83–90.
3. J. D. Currie, R. B. Eggleton, *Chromatic properties of the Euclidean plane*. *arXiv preprint arXiv:1509.03667*, 2015.
4. A. D. N. J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*. — *Geombinatorics* **25**, No. 1 (2018), 18–31.
5. G. Exoo, *ε -unit distance graphs*. — *Discrete & Computational Geometry* **33**, No. 1 (2005), 117–123.
6. G. Exoo, D. Ismailescu, *The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof*. — *Discrete & Computational Geometry* (2018), 1–11.
7. M. J. H. Heule, *Computing small unit-distance graphs with chromatic number 5*. — *Geombinatorics* **28/1** (2018), 32–50.
8. A. Kanel-Belov, V. Voronov, D. Cherkashin, *On the chromatic number of an infinitesimal plane layer*. — *St. Petersburg Math. J.* **29**, No. 5 (2018), 761–775.
9. D. G. Larman, A. C. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*. — *Mathematika* **19**, No. 01 (1972), 1–24.
10. O. Nechushtan, *On the space chromatic number*. — *Discrete Math.* **256**, No. 1 (2002), 499–507.
11. J. Parts, *The chromatic number of the plane is at least 5 – a human-verifiable proof*. — *Geombinatorics* **30/2** (2020), 77–102.
12. J. Parts, *Graph minimization, focusing on the example of 5-chromatic unit-distance graphs in the plane*. — *Geombinatorics* **29/4** (2020), 137–166.
13. R. Radoičić, G. Tóth, *Note on the chromatic number of the space*. — In: *Discrete and Computational Geometry, Algorithms and Combinatorics book series*, Vol. 25, Springer (2003), pp. 695–698.
14. V. A. Voronov, A. M. Neopryatnaya, E. A. Dergachev, *Constructing 5-chromatic unit distance graphs embedded in the Euclidean plane and two-dimensional spheres*. — *Discrete Math.* **345**, No. 12 (2022), 113106.
15. А. Я. Канель-Белов, В. А. Воронов, Д. Д. Черкашин, *О хроматическом числе плоскости*. — *Алгебра анализ* **29**, No. 5 (2017), 68–89.

Voronov V. A., Kanel-Belov A. Ya., Strukov G. A., Cherkashin D. D.
On the chromatic numbers of 3-dimensional slices.

We prove that for an arbitrary $\varepsilon > 0$ holds

$$\chi(\mathbb{R}^3 \times [0, \varepsilon]^6) \geq 10,$$

where $\chi(M)$ stands for the chromatic number of an (infinite) graph with the vertex set M and the edge set consists of pairs of points at the distance 1 apart.

Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета,
Майкоп, 385000, Россия;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, 141700, Россия
E-mail: v-vor@yandex.ru

Поступило 1 декабря 2022 г.

Московский
физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, 141700, Россия
E-mail: kanelster@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: georgiistrukov@gmail.com

Институт математики и информатики
Болгарской академии наук
ул. акад. Г. Бончев 8, София 1113, Болгария
E-mail: jiocb.orlangyr@gmail.com