

Н. Ю. Власова

**КАЖДЫЙ 3-СВЯЗНЫЙ ГРАФ НА НЕ МЕНЕЕ ЧЕМ
13 ВЕРШИНАХ ИМЕЕТ СЯГИВАЕМЫЙ
5-ВЕРШИННЫЙ ПОДГРАФ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Основные определения. В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а минимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $N_G(x)$.

Для множества вершин $U \subset V(G)$ будем обозначать через $G(U)$ *индуцированный подграф* графа G на множестве U . Назовем множество U *связным*, если граф $G(U)$ связан.

Определение 1. 1) Пусть $R \subset V(G)$. За $G - R$ мы обозначим граф, получаемый из G удалением всех вершин R и всех рёбер, инцидентных вершинам R . Множество R называется *разделяющим*, если $G - R$ несвязен.

2) Граф G называется *k -связным*, если $|V(G)| > k$ и G не содержит разделяющего множества размера меньше, чем k .

3) Пусть G – трехсвязный граф. Множество $R \subset V(G)$ назовем *стягиваемым*, если $G(R)$ связан и $G - R$ двусвязен.

4) Стягиваемое множество R назовем *нерасширяемым*, если оно не содержится ни в каком стягиваемом множестве размера $|R| + 1$.

5) Если F – двусвязный подграф G , то через $h_G(F)$ мы будем обозначать максимальный по включению двусвязный подграф G , содержащий F .

Ключевые слова: связность, 3-связный граф, стягиваемый подграф.

6) Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ смежна с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную с u . Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они смежны, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

7) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет множества X и Y (или, что то же самое, отделяет множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности графа $G - R$.

8) Пусть $X \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет X , если R разделяет какие-то две вершины X .

1.2. История вопроса и основные результаты. В 1994 была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза (W. McCuaig, K. Ota, 1994.). Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое n , что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из m вершин.

Для $m = 1$ утверждение гипотезы очевидно, для $m = 2$ также достаточно несложно и широко известно. Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы [3], случай $m = 4$ доказал в 2000 году M. Kriesell [1] (и это доказательство является весьма технически сложным). Ни для какого $m > 5$ на настоящий момент гипотеза ни доказана, ни опровергнута.

В работе Д. В. Карпова [12] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $m \geq 4$ – натуральное число, а G – трёхсвязный граф с $v(G) \geq 2m + 1$. Тогда G имеет стягиваемое множество W с $m \leq |W| \leq 2m - 4$.

Тем самым, доказано, что любой трёхсвязный граф на хотя бы 11 вершинах содержит стягиваемое подмножество на 5 или 6 вершинах. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть G – трёхсвязный граф с $v(G) \geq 13$. Тогда в G найдется стягиваемое множество на 5 вершинах. При этом существует трёхсвязный граф на 12 вершинах, в котором нет стягиваемого множества (см. Рис. 58).

1.3. Вспомогательные инструменты. Нам потребуется структура разбиения двусвязного графа 2-вершинными разделяющими множествами. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из

книги Татта [4], а в целом аналогичную структуру – *дерево блоков* из работы [10]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [8].

1.3.1. Разбиение графа набором разделяющих множеств. Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geq 2$, а G – k -связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество из всех k -вершинных разделяющих множеств G .

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором $\mathfrak{S}$, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\text{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \text{Part}(G; \mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\text{Int}(A)$.

Вершины части A , входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество – *границей* и обозначать через $\text{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\text{Part}(G; \mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение – подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Замечание 1. Нетрудно доказать (см., например, [9]), что для $A \in \text{Part}(G; \mathfrak{S})$ граница $\text{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A , имеющих смежные вне A . Если $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, то $\text{Bound}(A)$ отделяет $\text{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

Рассмотрим простейший и самый нужный нам пример – разбиение двусвязного графа G одним множеством $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $\text{Part}(G; S) = \{A_1, \dots, A_k\}$. Тогда $\text{Int}(A_1), \dots, \text{Int}(A_k)$ – все компоненты связности графа $G - S$, а каждая вершина $x \in S$ смежна со всеми этими компонентами (если x не смежна с $\text{Int}(A_i)$, то эта компонента выделяется и одновершинным множеством $S \setminus \{x\}$, что противоречит двусвязности графа G).

Определение 3. Два множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S . В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

В работе [7] доказано, что для k -связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

1.3.2. *Разбиение двусвязного графа и его свойства.* В этом разделе граф G – двусвязный.

Определение 4. 1) Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ называется *одиночным*, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{D}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G .

2) Вместо $\text{Part}(G; \mathfrak{D}(G))$ мы будем писать просто $\text{Part}(G)$, а части этого разбиения будем называть *частями* графа G .

Определение 5. *Дерево разбиения* двусвязного графа G – это граф $\text{BT}(G)$, вершины которого соответствуют одиночным множествам и частям графа G . Вершины $S \in \mathfrak{D}(G)$ и $A \in \text{Part}(G)$ смежны в $\text{BT}(G)$, если и только если $S \subset A$. Других рёбер в $\text{BT}(G)$ нет.

Следующая лемма – это частный случай теоремы 1 из статьи [10].

Лемма 1. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\text{BT}(G)$ – это дерево, все висячие вершины дерева $\text{BT}(G)$ соответствуют частям $\text{Part}(G)$.

2) Для каждого множества $S \in \mathfrak{D}(G)$ выполняется $d_{\text{BT}(G)}(S) = |\text{Part}(G; S)|$. Более того, для каждой части $A \in \text{Part}(G; S)$ существует ровно одна такая часть $B \in \text{Part}(G)$, что $B \subset A$ и B смежна с S в $\text{BT}(G)$.

3) Множество $S \in \mathfrak{D}(G)$ разделяет в графе G части $B, B' \in \text{Part}(G)$, если и только если S разделяет B и B' в $\text{BT}(G)$.

Определение 6. Часть $A \in \text{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\text{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \text{Part}(G)$ – крайняя часть, то $\text{Bound}(A)$ – одиночное множество графа G .

2) Внутренности двух различных частей $\text{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 7. 1) Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{D}(G)\}$.

2) Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ – простой цикл и 3-блоком, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A .

Лемма 2 ([11, Лемма 2]). *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

- 1) *Каждая часть из $\text{Part}(G)$ – либо цикл, либо 3-блок.*
- 2) *Если часть $A \in \text{Part}(G)$ – цикл, то все вершины из $\text{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G . При $\delta(G) \geq 3$ все крайние части $\text{Part}(G)$ – 3-блоки.*
- 3) *Пусть $A \in \text{Part}(G)$ – цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неединичное разделяющее множество графа G и других неединичных разделяющих множеств в графе G нет.*

Лемма 3 ([11, Лемма 4]). *Пусть S – одиночное множество двусвязного графа G , а $x \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

- 1) *Если одиночное множество S имеет степень d в $\text{BT}(G)$, то $d_G(x) \geq d$. Если $d_G(x) = d$, то вершины множества S несмежны.*
- 2) *$d_G(x) \geq 3$.*

1.3.3. *Стягиваемые множества в трехсвязном графе.* В этом разделе граф G – трехсвязный. Мы процитируем ряд доказанных ранее результатов, которые нам понадобятся, после чего докажем две новые леммы.

Очевидно, можно считать, что граф G – минимальный трехсвязный граф, то есть, что G перестает быть трехсвязным при удалении любого его ребра. А тогда выполнена следующая теорема.

Теорема 3 (R. Halin, 1969. [5]). *Пусть G – минимальный k -связный граф, где $k \in \{2, 3\}$. Тогда любой цикл в графе G содержит хотя бы две вершины степени k .*

Теорема 4 ([6, Раздел 2]). *Пусть в трехсвязном графе G хотя бы 11 вершин, и $H \subset V(G)$ – стягиваемое множество из четырех вершин, такое что граф $G - H$ является простым циклом. Тогда в G есть стягиваемая пятерка.*

Лемма 4 ([12, Лемма 4]). Пусть G – трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ – нерасширяемое стягиваемое множество, такое что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Множество H смежно со всеми внутренними вершинами частей-циклов $G - H$.
- 2) Есть хотя бы две крайние части $\text{Part}(G - H)$, все эти крайние части – циклы длины хотя бы 4. Граница каждой крайней части – одиночное разделяющее множество $G - H$.
- 3) Пусть $A \in \text{Part}(G - H)$ – крайняя часть. Тогда граф $G - H - \text{Int}(A)$ – двусвязный.

На самом деле в пункте 3 леммы 4 не требуется условие, что множество H – нерасширяемое. Приведем доказательство этого факта, чтобы убедиться в этом.

Лемма 5. Пусть G – двусвязный граф. Пусть $A \in \text{Part}(G)$ – крайняя часть-цикл. Тогда граф $G - \text{Int}(A)$ – двусвязный.

Доказательство. Пусть $\text{Bound}(A) = \{x, x'\}$. Так как A – часть-цикл, вершины множества $\text{Int}(A)$ образуют простой xx' -путь в G . Предположим, что граф $G' = G - \text{Int}(A)$ – не двусвязный. Так как G' становится двусвязным после добавления xx' -пути, существует точка сочленения G' , отделяющая x от x' . С другой стороны, $\text{Bound}(A) = \{x, x'\}$ – одиночное множество в G . По теореме Менгера в G существуют три xx' -пути, не пересекающихся по внутренним вершинам. Не более одного из этих путей проходит по вершинам $\text{Int}(A)$. Следовательно, хотя бы два из этих путей лежат в G' . То есть не может существовать точка сочленения, отделяющая x от x' в $G - \text{Int}(A)$. Полученное противоречие доказывает, что граф $G' - \text{двусвязный}$. $\square$

Замечание 3. Из замечания 1 следует, что если A_1 и A_2 – две части $\text{Part}(G - H)$, то их внутренности несмежны друг с другом.

Очевидным следствием из предыдущих лемм является следующая лемма. В других обозначениях это леммы 3 и 4 из [1].

Лемма 6. Пусть G – трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ – нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Пусть $A_1, A_2 \in \text{Part}(G - H)$ – две крайние части $G - H$, $W_i = \text{Int}(A_i)$. Тогда $G(W_1)$ и $G(W_2)$ – простые пути, удовлетворяющие следующим условиям.

- 1) $|W_1| \geq 2, |W_2| \geq 2$.
- 2) Все вершины $W_1 \cup W_2$ имеют степень 2 в $G - H$.
- 3) $N_G(W_1) \cap V(W_2) = \emptyset, N_G(W_2) \cap V(W_1) = \emptyset$.
- 4) Графы $G - H - W_1$ и $G - H - W_2$ двусвязны.

Определение 8. В обозначениях леммы 6 пусть

$$H_1 = V(h_{G-W_2}(G - H - W_2)) \cap H, \quad H_2 = V(h_{G-W_1}(G - H - W_1)) \cap H, \\ H_1^* = H_1 \setminus H_2, \quad H_2^* = H_2 \setminus H_1.$$

Лемма 7 ([1, Лемма 5]). Пусть G – трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ – нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда для множеств W_1 и W_2 из леммы 6 выполнены следующие утверждения:

- 1) $N_G(G - H - W_2) \cap H \subset H_1$ и $N_G(G - H - W_1) \cap H \subset H_2$.
- 2) $H = H_1 \cup H_2$. Каждая компонента связности $G(H_1^*)$ и $G(H_2^*)$ имеет ровно одного соседа в H_2 и H_1 , соответственно.
- 3) Предположим, что W – подпуть $G(W_1)$ такой, что $N_G(H_1^*) \cap W_1 \subset V(W)$. Тогда множество $H_1^* \cup V(W)$ стягиваемо.
- 4) Если $|H_1^*| = 0$, то множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.
- 5) Предположим, что G не содержит стягиваемого подграфа на $|H| + 1$ вершине. Если $|H_1^*| = 1$, то выполнено одно из двух условий:
 - (1) $|W_1| \leq |H| - 1$.
 - (2) $|W_1| = |H| + 1$, обе конечные вершины $G(W_1)$ смежны с H_1^* и множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.

Лемма 8. [6, Лемма 6] В обозначениях леммы 6 пусть $S_i = \text{Bound}(A_i)$. Тогда

- 1) граф $G - H - W_1 - W_2$ связан;
- 2) если вершины S_i смежны хотя бы для одного $i \in \{1, 2\}$, то граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины.

Лемма 9. В обозначениях леммы 6 пусть $\{p, q\} = \text{Bound}(A_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Пусть $|H| \leq 4$.

Предположим, что в множестве $W_i \cup H$ нашлась стягиваемая четверка H' , и граф $G - H'$ не является циклом. Для графа $G - H'$ также выполнены все утверждения леммы 4. Пусть A – крайняя часть графа $G - H'$, $W = \text{Int}(A)$. Тогда

- 1) вершина из H не может соседствовать в $G(W)$ с вершиной из $V(G - H - W_i)$.

2) [6, Лемма 7] Если $N_G(H') \subset \{p, q\} \cup H$, то $\{p, q\}$ — внутренность одной из крайних частей графа $G - H'$. В частности, $pq \in E(G)$.

Доказательство. 1) Предположим, что вершина $x \in H$ соседствует в $G(W)$ с вершиной $f \in V(G - H - W_i)$. Граф $G - H - W_i$ двусвязен, поэтому вершина f имеет в нем степень хотя бы 2. Так как $x \notin H'$ и $fx \in E(G)$, мы имеем $d_{G-H'}(f) \geq 3$, что невозможно, если f — внутренняя вершина части-цикла из $\text{Part}(G - H')$. $\square$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО $|H_i^*| \neq 1$

Теперь разберемся со случаем, когда при удалении любой стягиваемой четверки остается не цикл. Тогда верны леммы 6 и 7.

Докажем, что $|H_1^*| \neq 1$, $|H_2^*| \neq 1$.

Предположим, что $H_1^* = \{x\}$. Тогда $H_2 = H \setminus \{x\} = \{y, z, t\}$.

По пункту 2 леммы 7 вершина x смежна ровно с одной вершиной H_2 и по пункту 1 этой же леммы x несмежна с W_2 . Так как G трехсвязен, $d_G(x) \geq 3$. Следовательно, x смежна хотя бы с двумя вершинами множества $V(G - H - W_2)$. По пункту 4 леммы 6 граф $G - H - W_2$ двусвязен, а тогда двусвязен и граф $G - H_2 - W_2$, так как получается добавлением к $G - H - W_2$ вершины x , смежной хотя бы с двумя вершинами. Как уже было сказано, x — висячая вершина в $G(H)$, поэтому граф $G(H_2)$ связан. Очевидно, H_2 смежно с W_2 . Таким образом, множество $H_2 \cup W_2$ стягиваемо. Так как $|W_2| \geq 2$, и, по нашему предположению, в G нет стягиваемой пятерки, выполнено $|W_2| \geq 3$.

По пункту 5 леммы 7 $|W_1| \leq 3$ или $|W_1| = 5$.

2.1. $|W_1| = 2$, $G(W_1) = uv$. По пункту 2 леммы 7 вершина x имеет ровно одного соседа в H_2 (не умаляя общности, y), и по пункту 1 этой же леммы в $G - H$ вершина x смежна только с вершинами W_1 . Так как $d_G(x) \geq 3$, $N_G(x) = \{y, u, v\}$.

Также будем считать, что y смежна с вершиной z . Тогда t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$, иначе пятерка $\{u, v, x, y, z\}$ будет стягиваема (граф $G - \{u, v, x, y, z\}$ получается добавлением к двусвязному графу $G - H - W_1$ вершины t , смежной с двумя вершинами).

Разберем несколько случаев.

Случай 1. Вершина t смежна с W_1 .

Можно считать, что t смежна с u . Пятерка $\{u, v, x, y, t\}$ нестягиваема, поэтому y не более одного соседа в $G - H - W_1$. Так как

$d_G(z) \geq 3$, вершина z должна быть смежна с множеством $\{t, u, v\}$. Пятерка $\{x, u, v, z, t\}$ не стягиваема, значит u и v тоже не более одного соседа в $G - H - W_1$.

Из пункта 1 леммы 4 и пункта 1 леммы 7 следует, что каждая вершина W_2 смежна хотя бы с одной вершиной H_2 , а из каждой вершины H_2 выходит не более одного ребра в W_2 , поэтому $|W_2| \leq 3$. Ранее было доказано, что $|W_2| \geq 3$. Тогда $|W_2| = 3$, между W_2 и H_2 идёт 3 независимых ребра, и других ребер из H_2 в $V(G - H - W_1)$ не идёт. Пусть $G(W_2) = pqr$.

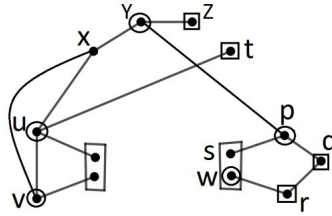


Рис. 1. Четверка $\{z, t, q, r\}$ и ее окрестность.

Предположим, что y смежна с одной из крайних вершин W_2 , не умаляя общности, с p . Докажем, что четверка $\{z, t, q, r\}$ стягиваема и расширяема (см. Рис 1). Во-первых, она связна, так как между множествами $\{z, t\}$ и $\{q, r\}$ идёт два независимых ребра, и вершины q и r смежны. Во-вторых, граф $G - \{z, t, q, r\}$ получается из двусвязного графа $G - H - W_2$ добавлением пути $uxyp$, где s – сосед p в множестве $V(G - H - W_2)$. Заметим, что $u \neq s$ по пункту 3 леммы 6, поэтому присоединение такого пути действительно сохраняет двусвязность. Таким образом, четверка $\{z, t, q, r\}$ стягиваема. Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{u, v, y, p, w\}$ (как было доказано выше, множество $\{x\} \cup V(G - H - W_1 - \{q, r\})$ несмежно с $\{z, t\}$), где w – сосед r в $G - H - W_2$. Но u и v имеют степень 3 в графе $G - \{z, t, q, r\}$, поэтому не могут входить в пути, удовлетворяющие лемме 6. Тогда в пути могут входить только три вершины $\{y, p, w\}$, но из трёх путей не составить два пути из не менее чем двух вершин в каждом. Противоречие.

Получаем, что y смежна с q . Можно считать, что t смежна с p , а z – с r . Тогда стягиваема пятерка $\{q, r, x, y, z\}$ (см. Рис. 2).

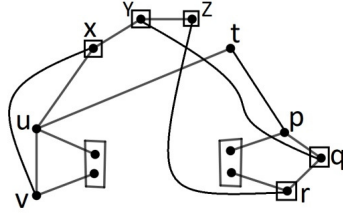


Рис. 2. Стыгиваемая пятерка $\{q, r, x, y, z\}$.

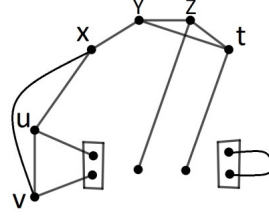


Рис. 3. В H только вершина y смежна с W_2 .

Случай 2. Вершина t несмежна с W_1 .

Но $d_G(t) \geq 3$ и t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$, поэтому она смежна с y и z . Теперь мы можем повторить рассуждения случая 1, поменяв местами z и t , так как t смежна с y . Получим, что вершина z также несмежна с W_1 и имеет ровно одного соседа в $G - H - W_1$. Кроме того, соседи z и t , лежащие в $G - H$, должны быть различны в силу трехсвязности графа G .

Покажем, что хотя бы одна из вершин z, t должна быть смежна с W_2 . Пусть это не так и с W_2 смежна только y (см. Рис 3). Но тогда, если

- а) $|W_2| = 3$, то пятерка $W_2 \cup \{x, y\}$ стягиваема,
- б) $|W_2| \geq 4$. Заметим, что граф $G - W_2$ двусвязен, так как он получается присоединением к двусвязному графу $G - H - W_2$ сначала пути $x y z$, причем x и z смежны с разными вершинами $G - H - W_2$, а затем вершины t , которая смежна с z и ещё одной вершиной. Следовательно, $H_1 = H$, $H_2^* = \emptyset$, поэтому по пункту 4 леммы 7 любой подпуть из четырёх вершин в W_2 стягиваем. Подпуть также расширяем, так как имеет всего три вершины в окрестности (из трёх вершин не составить два пути, удовлетворяющие лемме 6).

Далее будем считать, что t смежна с W_2 . Мы уже доказали, что $|W_2| \geq 3$. Разберем два подслучая.

Подслучай 2.1. $|W_2| \geq 4$.

Если в $G(W_2)$ можно выделить такой подпуть W из четырёх вершин, что t с ним смежна, а z — нет (или наоборот), то этот подпуть в

объединении с t ($с z$) будет стягиваемым. Действительно, пусть t смежна с W . Тогда все вершины $W_2 \setminus W$ представляются в виде объединения не более двух подпутей: $w_1 \dots w_k$ и $w_i \dots w_m$. Вершины w_k и w_m смежны с y или z . Поэтому если мы к двусвязному графу $G - H - W_2$ присоединим сначала путь $xy(z)w_k \dots w_1$, затем $(z)w_i \dots w_m$ (z мы добавляем в том случае, если w_k или w_i соответственно смежна с z), а затем, если нужно, вершину z , смежную хотя бы с двумя вершинами в полученном графе, то новый граф будет тоже двусвязен. Новый граф – это в точности граф $G - W - \{t\}$. Следовательно, пятерка $W \cup \{t\}$ стягиваема.

Если в W_2 можно выделить такой подпуть из трёх вершин, что z и t с ним смежны, то этот подпуть в объединении с $\{z, t\}$ будет стягиваемым, так как, в W_2 есть вершины, не входящие в этот подпуть, и все они смежны с y (в начале пункта мы доказали, что z и t имеют ровно одного соседа в $G - H$).

Значит ни одного такого подпути нет. Тогда $|W_2| = 4$, а вершины z и t смежны с разными крайними вершинами W_2 . Пусть t смежна с p . Тогда четверка $\{z\} \cup W_2 \setminus \{p\}$ стягиваема и расширяема, ведь в ее окрестности всего 4 вершины, одна из которых смежна с двумя другими (см. Рис 4).

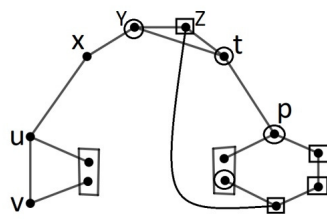


Рис. 4. Четверка $\{z\} \cup W_2 \setminus \{p\}$ и ее окрестность.

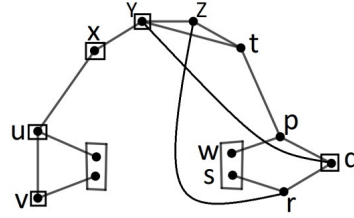


Рис. 5. Стягиваемая пятерка $\{u, v, x, y, q\}$.

Подслучай 2.2. $|W_2| = 3$.

Пусть $G(W_2) = pqr$. Также обозначим соседей p и r в $G - H - W_2$ через w и s , соответственно.

Если z и t соединены двумя независимыми ребрами с p и r , то y смежна с q и пятерка $\{u, v, x, y, q\}$ стягиваема (см. Рис. 5). Поэтому можно выбрать одну из крайних вершин W_2 (не умаляя общности, p) так, что y с ней смежна, а z и t – нет.

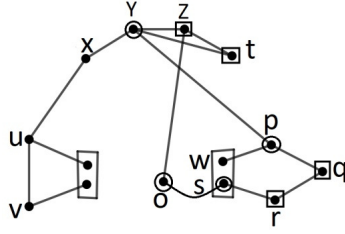


Рис. 6. Четверка $\{z, t, r, q\}$ и ее окрестность.

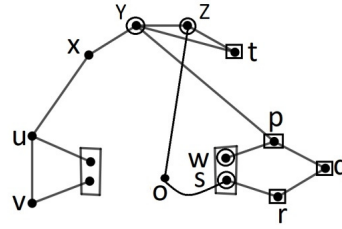


Рис. 7. Четверка $\{p, q, r, t\}$ и ее окрестность.

Напомним, что ранее мы доказали, что t смежна с W_2 . Четверка $H' = \{z, t, r, q\}$ стягиваема и нерасширяема, в ее окрестности лежат вершины y, p, s и, возможно, какая-то вершина, являющаяся соседом z . Чтобы в $G - H'$ существовали пути, удовлетворяющие лемме 6, необходимо, чтобы z имела соседа в $G - H - W_2$ (см. Рис. 6).

Четверка $H'' = \{p, q, r, t\}$ стягиваема и нерасширяема. Ее окрестность состоит из вершин $\{y, z, w, s\}$ (см. Рис. 7). Вершины y и z смежны, поэтому, вершины w и s образуют второй путь. Из леммы 6 следует, что граф $G - H'' - \{w, s\}$ двусвязен, но к нему можно добавить t и двусвязность сохранится. Получаем, что пятерка $\{p, q, r, w, s\}$ стягиваема.

2.2. $|W_1| = 3$, $G(W_1) = u_1 u_2 u_3$. Пусть $G(W_2) = w_1 w_2 \dots w_k$, w_1 смежна в $G - H$ с r и w_2 , а w_k – с s и w_{k-1} . Кроме того, обозначим соседей W_1 в $G - H - W_1$ за p и q так, что $pu_1, qu_3 \in E(G)$.

По пункту 2 леммы 7 вершина x имеет ровно одного соседа в H_2 , пусть это будет y . Так как $d_G(x) \geq 3$, вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1 .

Предположим, что $N_G(\{z, t\}) \cap W_1 = \emptyset$. Тогда либо z и t несмежны и имеют хотя бы по два соседа в $G - H - W_1$, либо z и t смежны и

имеют хотя бы по одному соседу в $G - H - W_1$, причем этих соседей можно выбрать так, что они не совпадут, ведь если у них только один общий сосед, то он и y отделяют $\{z, t\}$ от остальных вершин G , что противоречит трехсвязности G . В обоих случаях пятерка $\{x, y\} \cup W_1$ будет стягиваемой.

Значит, $N_G(\{z, t\}) \cap W_1 \neq \emptyset$. Не умаляя общности, z смежна с W_1 , тогда $z \in H_1$, $z \notin H_2^*$ (по пунктам 1 и 1 леммы 7). Могут ли y и t одновременно принадлежать H_2^* ? Пусть так. Воспользуемся пунктом 2 леммы 7. Вершина y смежна не более чем с одной вершиной H_1 , поэтому y несмежна с z .

Если y смежна с t , то y и t входят в одну компоненту связности H_2^* . Вершина y из этой компоненты уже смежна с $x \in H_1$, поэтому y и t не могут быть смежны с $z \in H_1$. Но тогда z не смежна ни с одной вершиной $G(H)$.

Если же y и t несмежны, то $\{x, y\}$ несмежно с $\{z, t\}$.

Получаем, что $|H_2^*| \leq 1$, то есть, по лемме 7 (пункты 4 и 5), $|W_2| \leq 5$.

Четверка $W_1 \cup \{x\}$ стягиваема по пункту 3 леммы 7 и нерасширяема, поэтому в ее окрестности есть два пути из леммы 6. По лемме 9 одним из путей является pq . Вторым путем не может быть $G(\{y, z, t\})$. Действительно, в этом случае от H к W_2 идет не более двух ребер. Но в W_2 не менее трёх вершин (это было доказано в начале раздела 2) и все они должны иметь степень не менее 3 в G .

Выделим отдельно несколько утверждений, которые мы сейчас доказали и которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Утверждение 1. 1) Вершина x смежна только с y и W_1 , причем в W_1 смежна хотя бы с двумя вершинами.

2) $|H_2^*| \leq 1$ и $3 \leq |W_2| \leq 5$.

3) Четверка $W_1 \cup \{x\}$ стягиваема. Одним из путей для нее является pq , а второй образован ровно двумя вершинами из множества $\{y, z, t\}$.

4) Вершины p и q смежны. Значит, по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины.

2.2.1. $|W_2| = 3$. Так как мы предположили, что $v(G) \geq 13$, то $v(G - H - W_1 - W_2) \geq 13 - 4 - 3 - 3 = 3$, то есть граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен.

Разберем два случая:

Случай 1. Вершины z и t несмежны.

Тогда они смежны с y .

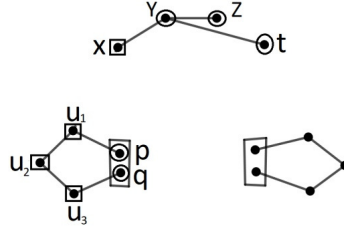


Рис. 8. Четверка $W_1 \cup \{x\}$ и ее окрестность.

Пути для четверки $W_1 \cup \{x\}$ должны быть pq и yz или yt . Та из вершин z, t , которая входит в путь, должна быть смежна с W_1 . Ранее мы обозначили вершины так, что z смежна с W_1 . Следовательно, если t несмежна с W_1 , то путем точно является yz , а если смежна, то вершины z и t равноправны и, не умаляя общности, можно предположить, что путем будет yz .

Так как yz – путь, удовлетворяющий лемме 6 для графа $G - W_1 - x$, вершина y смежна только с x, z, t , и, быть может, вершинами из W_1 , а y, z максимум один сосед в $G - H - W_1$, поэтому t смежна хотя бы с двумя вершинами W_2 .

Если W_2 смежно только с t , то пятерка $W_2 \cup \{t, y\}$ стягиваема, так как z имеет хотя бы два соседа из $G - H - W_2$ (мы сейчас рассматриваем случай, когда z несмежна с t).

Следовательно, z смежна с одной вершиной в W_2 . Тогда y несмежна с W_1 , иначе пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ будет стягиваемой.

Если z смежна с крайней вершиной W_2 , например, с w_3 , то стягиваема пятерка $\{x, y, t, w_1, w_2\}$ (напомним, что ранее было доказано, что z смежна с W_1) (см. Рис. 9). Если t смежна с крайней вершиной W_1 , например, с u_3 , то стягиваема пятерка $\{x, y, z, u_1, u_2\}$ (см. Рис. 10).

Вершина z смежна с W_2 , но не с крайними вершинами, то есть – с w_2 . Тогда с w_1 и w_3 смежна t . В двух предыдущих абзацах было доказано, что y несмежна с W_1 , а t несмежна с крайними вершинами W_1 . Следовательно в W_1 можно выбрать две соседние вершины, одна из которых смежна с z так, что невыбранная смежна с x . Действительно, если z несмежна с какой-то из крайних вершин, например, u_1 , то u_1

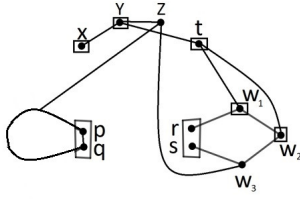


Рис. 9. Стыги-
ваемая
пятерка
 $\{x, y, t, w_1, w_2\}$.

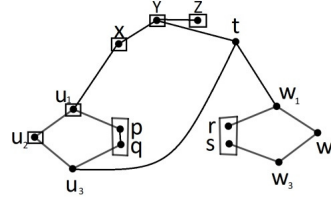


Рис. 10. Стыги-
ваемая
пятерка
 $\{x, y, z, u_1, u_2\}$ ю

может быть смежна только с x , а z тогда смежна с $\{u_2, u_3\}$. Если же z смежна и с u_1 , и с u_3 , то с одной из них смежна и x (ведь x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1). Тогда невыбранной можно оставить любую из крайних вершин, смежных с x . Не умаляя общности, выбраны вершины u_2, u_3 .

Вершина p не совпадает хотя бы с одной вершиной из множества $\{r, s\}$, пусть $p \neq r$. Тогда, в силу двусвязности графа $G - H - W_1 - W_2$, пятерка $\{z, u_2, u_3, w_2, w_3\}$ стягиваема (см. Рис. 11).

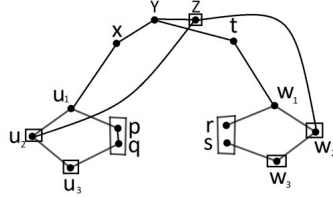


Рис. 11. Стыгиваемая пятерка $\{z, u_2, u_3, w_2, w_3\}$ ю

Случай 2. Вершины z и t смежны.

Одним из путей для четверки $W_1 \cup \{x\}$ будет pq , а вторым путем для четверки $W_1 \cup \{x\}$ может быть yz, yt или zt .

Предположим, что zt - второй путь для четверки $W_1 \cup \{x\}$.

Обе вершины z и t смежны с W_1 . Так как y смежна с $\{z, t\}$, не умаляя общности считаем, что смежны y и z . Тогда z не имеет соседей

в W_2 , t имеет максимум одного, а y — хотя бы 2. Если t смежна с y , то t несмежна с $G - H - W_1$ и граф $G - W_1 - x$ не связен (вершина y является точкой сочленения). И если t несмежна с W_2 , то она смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_2$ и пятерка $W_2 \cup \{y, z\}$ стягиваема. Значит, t смежна с W_2 .

Пусть t смежна с крайней вершиной W_2 , например, с w_1 . Тогда пятерка $\{w_2, w_3, x, y, z\}$ стягиваема, так как t смежна и с W_1 (см. Рис 12).

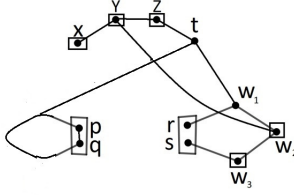


Рис. 12. Стягиваемая пятерка $\{w_2, w_3, x, y, z\}$.

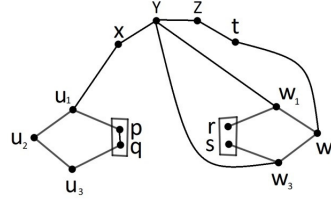


Рис. 13. t смежна с w_2 , x смежна с u_1 .

Значит, t смежна с w_2 , а y — с w_1 и w_3 .

Вершина x смежна хотя бы с одной крайней вершиной W_1 . Пусть с u_1 (см. Рис 13). Если множество $\{z, t\}$ смежно с $\{u_2, u_3\}$, то пятерка $\{u_2, u_3, z, t, w_2\}$ стягиваема. Значит, z и t смежны с u_1 .

Вершина q не совпадает хотя бы с одной вершиной из множества $\{r, s\}$, пусть $q \neq s$. Тогда, в силу связности $G - H - W_1 - W_2$, пятерка $\{z, t, u_1, w_1, w_2\}$ стягиваема (см. Рис 14).

Поэтому yz (или yt) будет вторым путем для четверки $W_1 \cup \{x\}$.

Не умаляя общности, yz . Опять же, z не имеет соседей в W_2 (так как мы рассматриваем случай, когда z смежна с t), а y должна иметь в W_2 одного соседа и не иметь соседей в $G - H - W_2$, так как иначе пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ будет стягиваемой. Не умаляя общности, y смежна с одной из вершин w_1, w_2 , тогда w_3 смежна с t .

Если t смежна с $G - H - W_2 - s$, то пятерка $\{x, y, z, w_1, w_2\}$ стягиваема (см. Рис 15).

Значит, с W_1 смежны только x и z . Причем, z смежна с W_1 , так как она входит в путь для четверки $W_1 \cup \{x\}$ и несмежна с x . Вершина z имеет ровно одного соседа в $G - H - W_2$, иначе пятерка $\{y, t\} \cup W_2$ будет стягиваемой.

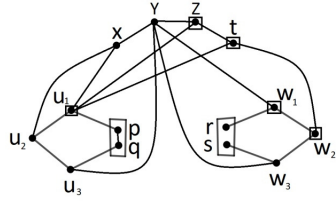


Рис. 14. Стягиваемая пятерка $\{z, t, u_1, w_1, w_2\}$.

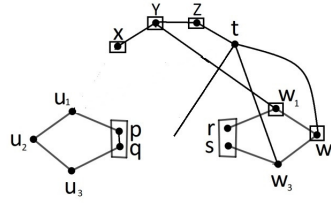


Рис. 15. Стягиваемая пятерка $\{x, y, z, w_1, w_2\}$.

Утверждение 2. В рассматриваемом случае $\{p, q\} \neq \{r, s\}$.

Доказательство. Пусть $\{p, q\} = \{r, s\}$. Заметим, что в графе $G - H$ должны быть вершины, отличные от $W_1 \cup W_2 \cup \{p, q\}$, так как $v(G) \geq 13$. Следовательно, одиночное множество $\{p, q\} = \{r, s\}$ имеет степень не менее 3 в $\text{BT}(G - H)$. Значит, в $G - H$ должна быть еще одна крайняя часть, отличная от $W_1 \cup \{p, q\}$ и $W_2 \cup \{p, q\}$. По лемме 4 эта крайняя часть – цикл длины хотя бы 4, причем все ее внутренние вершины смежны с H . Но ранее мы доказали, что ни одна вершина H не может быть смежна с вершинами $G - H - W_1 - W_2 - s$. Противоречие. $\square$

Напомним, что W_2 смежно в H только с y и t , а W_1 – только с x и z , причем y смежна ровно с одной вершиной W_2 . Рассмотрим два случая.

Подслучай 2.1. Вершина y смежна с w_2 .

Тогда t смежна с w_1 и w_3 .

Если z смежна с крайней вершиной W_1 , например, с u_1 , то пятерка $\{u_2, u_3, x, y, w_2\}$ стягиваема (см. Рис 16).

Значит, z смежна с u_2 , а x смежна с u_1 и u_3 . Не умаляя общности можно предположить, что $p \neq r$. Пятерка $\{u_2, u_3, z, t, w_3\}$ стягиваема, так как граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен (см. Рис 17).

Подслучай 2.2. Вершина y смежна с крайней вершиной W_2 .

Можно считать, что y смежна с w_1 .

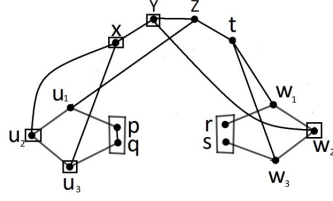


Рис. 16. Сягиваемая пятерка $\{u_2, u_3, x, y, w_2\}$.

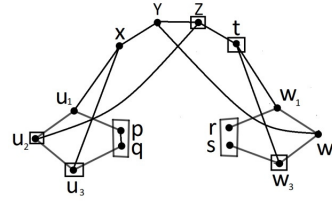


Рис. 17. Сягиваемая пятерка $\{u_2, u_3, z, t, w_3\}$.

Рассмотрим пятерку $\{z, t, w_2, w_3, u_i\}$, где u_i – сосед z в W_1 . Если $i = 2$, то рассматриваемая пятерка стягиваема (см. Рис. 18(a)). Если же $i \in \{1, 3\}$, например, $i = 1$, то рассматриваемая пятерка нестягиваема, только если $q = r$ (см. Рис. 18(b)). Аналогично, пятерка $\{u_2, u_3, x, y, w_1\}$ нестягиваема, только если $p = s$. Но мы доказали, что $\{p, q\} \neq \{r, s\}$. Следовательно, одна из рассмотренных выше пятерок стягиваема.

2.2.2. $|W_2| = 4$. Предположим, что вершина y входит во второй путь для четверки $W_1 \cup \{x\}$. Если t несмежна с W_1 , то этим путем может быть только yz . Если же t смежна с W_1 , то z и t симметричны относительно доказанных о них утверждений, поэтому, не умаляя общности можно положить, что путь – это yz . Тогда t точно смежна с W_2 , а значит, пятерка $W_2 \cup \{t\}$ стягиваема, так как x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1 , а z – хотя бы с одной.

Получаем, что вторым путем будет zt . Вершины z и t смежны с W_1 , так как входят в пути для четверки $W_1 \cup \{x\}$ и несмежны с x . Снова z и t стали симметричны относительно доказанных утверждений. Не умаляя общности, z смежна с y . Также, z и t имеют степень 2 в $G - W_1 - \{x\}$ по пункту 2 леммы 6, поэтому z смежна в этом графе только с y и t , а t смежна с z и еще одной вершиной v . Причем, $v \neq y$, так как иначе y отделяла бы $\{z, t\}$ от остальных вершин двусвязного графа $G - W_1 - \{x\}$.

Если $v \in W_2$, то пятерка $W_2 \cup \{t\}$ стягиваема (опять же, x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1 , а z – хотя бы с одной) (см. Рис. 19). Значит, t несмежна с W_2 и имеет хотя бы двух соседей в $G - H - W_2$, z –

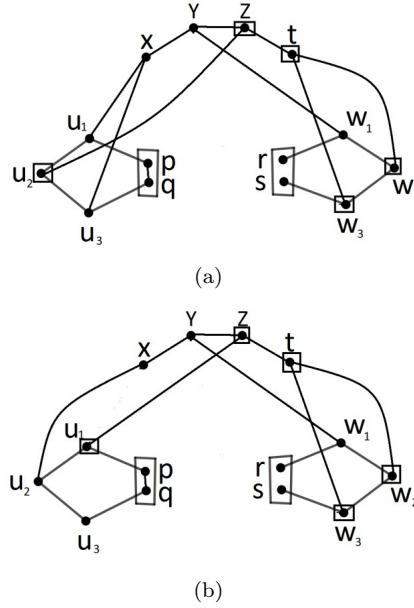


Рис. 18. Стягиваемые пятерки в случае y смежна с W_1 , слева z смежна с внутренней вершиной W_1 , справа – с крайней.

хотя бы одного в W_1 , а все вершины W_2 смежны с y . Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{y\}$ стягиваема (см. Рис. 20).

2.2.3. $|W_2| = 5$. По утверждению 1, $|H_2^*| \leq 1$. Если $|H_2^*| = 0$, W_2 – стягиваемая пятерка. Случай $|H_2^*| = 1$ подходит под условие следующего пункта, поэтому достаточно разобрать только следующий пункт.

2.3. $|W_1| = 5$, $G(W_1) = u_1u_2u_3u_4u_5$. Напомним, что мы разбираем случай $H_1^* = \{x\}$, $H_2 = \{y, z, t\}$. По пункту 5 леммы 7 вершины u_1 и u_5 смежны с x , и каждый подпуть W_1 стягиваем. Ни одна из вершин u_1, u_5 не может быть смежна с H_2 . Действительно, если, например, u_5 смежна с H_2 , то пятерка $W_1 \setminus \{u_5\} \cup \{x\}$ стягиваема.

2.3.1. u_2 смежна с x . Если $\{u_3, u_4\}$ смежно с $H_2 = \{y, z, t\}$, то пятерка $\{u_3, u_4\} \cup H_2$ стягиваема (см. Рис. 21).

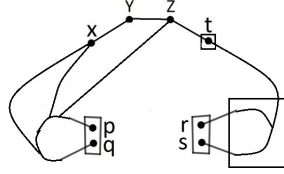


Рис. 19. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{t\}$.

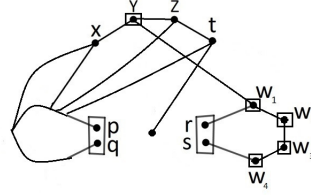


Рис. 20. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{y\}$.

Значит u_3, u_4 смежны в H только с x , аналогично и u_2 смежна в H только с x . Тогда $N_G(\{u_2, u_3, u_4, u_5\}) = \{x, u_1, s\}$, где s – вершина, смежная с u_5 в $G - (W_1 \cup H)$ (см. Рис. 22). То есть четверка $H' = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема и расширяема по лемме 6.

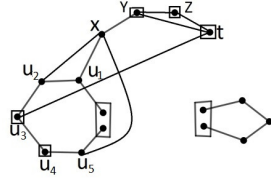


Рис. 21. Стягиваемая пятерка $\{u_3, u_4\} \cup H_2$.

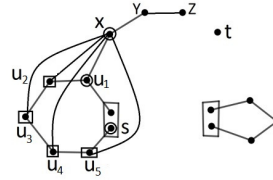
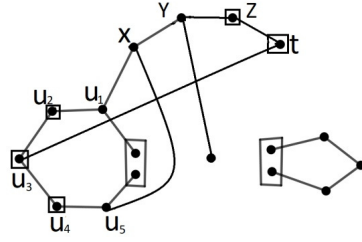


Рис. 22. Стягиваемая четверка $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ и ее окрестность.

Получили, что u_2 и u_4 несмежны с x . Так как граф $G(H)$ связан и x несмежна с $\{z, t\}$, будем считать, что y смежна с x и z .

2.3.2. Вершина t смежна с $\{u_2, u_3, u_4\}$. Но пятерки $\{u_2, u_3, u_4, u_5, t\}$, $\{u_1, u_2, u_3, u_4, t\}$ нестягиваемы. Следовательно, z смежна в $G - H$ только с $\{u_2, u_3, u_4\}$ (мы уже показали, что с крайними вершинами W_1 ни одна вершина H_2 не смежна). При этом $H_2 = \{y, z, t\}$, а по определению H_2 граф $G - W_1 - x$ двусвязен. Значит y имеет соседа в $G - H - W_1$,

Рис. 23. Стягиваемая пятерка $\{u_2, u_3, u_4, z, t\}$.

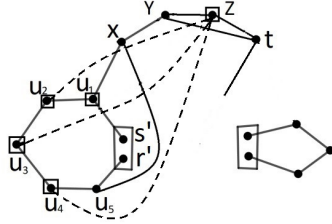
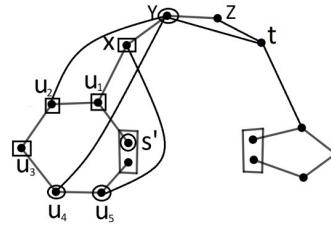
а z смежна с t . Легко видеть, что пятерка $\{u_2, u_3, u_4, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 23).

2.3.3. С вершинами u_2, u_4 смежны только y или z . Пусть $s', r' \in G - W_1 - H$ смежны с u_1 и u_5 , соответственно.

Пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ нестягиваема. Это возможно только если t смежна с y, z и ровно одной вершиной в $G - H - W_1$.

Предположим, что z смежна с u_2, u_3 или u_4 . Вершина t смежна ровно с одной вершиной $G - H - W_1$, поэтому не умаляя общности можно считать, что t несмежна с r' . Тогда пятерка $\{u_1, u_2, u_3, u_4, z\}$ стягиваема (см. Рис. 24, из трех пунктирных рёбер хотя бы одно существует, ребро от t идёт к одной из вершин $G - H - W_1$).

Следовательно, y смежна с u_2 и u_4 .

Рис. 24. Стягиваемая пятерка $\{u_1, u_2, u_3, u_4, z\}$.Рис. 25. Четверка $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ и ее окрестность.

Из всего вышеперечисленного следует, что

$$N_G(\{u_1, u_2, u_3, x\}) = \{s', y, u_4, u_5\}.$$

Эта четверка стягиваема и расширяема, так как при ее удалении не образуются два пути, удовлетворяющие лемме 6 (см. Рис. 25). Действительно, вершина u_4 смежна и с y , и с u_5 , поэтому из четырех вершин $\{s', y, u_4, u_5\}$ нельзя составить два пути так, чтобы один из них не пересекал окрестность другого.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО $|H_i^*| \neq 3$

Далее будем изучать случаи, когда $|H_i^*| \neq 1$. При этом некоторые случаи разберутся сразу, а некоторые останутся под подозрением. Их разбор мы закончим только после того, как выявим все *подозрительные* четверки.

Докажем, что $|H_1^*| \neq 3$. Пусть равно. Тогда $|H_2^*| \leq 1$, Случай $|H_2^*| = 1$ уже разобран, поэтому можно считать, что $H_2^* = \emptyset$. Из пункта 4 леммы 7 следует, что $|W_2| \leq 4$.

Обозначим $H_1^* = \{x, y, z\}$, $H_2 = \{t\}$. Не умаляя общности, t смежна с z . По пункту 1 леммы 7 вершины H_1^* смежны в $G - H$ только с вершинами W_1 .

3.1. $|W_2| = 4$. Так как $H_2^* = \emptyset$, то $H = H_1$, а следовательно четверка W_2 стягиваема. По пункту 1 леммы 7 в окрестности этой четверки лежат ровно три вершины (t и две вершины в $G - H$), поэтому четверка W_2 расширяема по лемме 6.

3.2. $|W_2| = 3$. По пункту 1 леммы 7 с W_2 смежна только t . Следовательно, множество $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваемо. Поэтому $|W_1| \geq 3$.

Предположим, что вершина t смежна в H только с z .

Из двух предыдущих абзацев следует, что либо x и y несмежны и у них хотя бы по два соседа в $G - H - W_2$, либо они смежны, у них хотя бы по одному соседу в $G - H - W_2$, причем, в силу трехсвязности G , этих соседей можно выбрать так, чтобы они были различны. В любом случае множество $W_2 \cup \{z, t\}$ стягиваемо (см. Рис. 26).

Следовательно, вершина t смежна в H хотя бы с двумя вершинами. По пункту 1 леммы 7 вершины $H_1^* = \{x, y, z\}$ смежны в $G - H$ только с вершинами W_1 .

Это будет наша первая подозрительная четверка (см. Рис. 27).

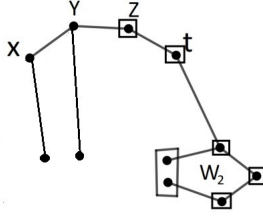


Рис. 26. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$.

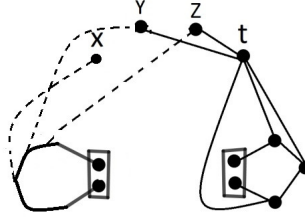


Рис. 27. Первая подозрительная четверка.

Еще раз сформулируем ее свойства: внутренность одной из крайних частей $G - H$ имеет размер 3 и со всеми внутренними вершинами этой крайней части смежна только одна из вершин H , причем эта вершина смежна хотя бы с двумя вершинами H . А три другие вершины H смежны только с внутренними вершинами другой крайней части.

3.3. $|W_2| = 2$. Пусть ℓ – лист остова дерева H . Если $\ell \in H_1^*$, то ℓ имеет не более одного соседа в W_1 , иначе пятерка $V(H) \setminus \{\ell\} \cup W_2$ стягиваема. Следовательно, любой лист из H_1^* имеет хотя бы двух соседей в H , откуда получаем, что в H есть цикл.

Выясним, как может выглядеть $G(H)$.

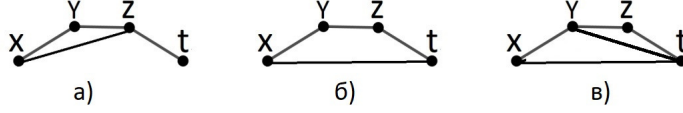
а) Вершины x, y, z образуют цикл.

Предположим, что хотя бы две вершины из H_1^* смежны с t , например, y и z . Тогда по теореме 3 из трех вершин y, z, t , образующих треугольник, две должны иметь степень 3 в G . Так как t смежна с вершинами W_2 , это могут быть только y и z . Но тогда множество $\{x, t\}$ отделяет множество $\{y, z\}$ от остальных вершин графа G , что противоречит его трехсвязности.

Значит, t смежна только с z (см. Рис. 28а).

б) Вершины x, y, z не образуют цикл.

Но каждая из них имеет степень хотя бы 2 в $G(H)$. Тогда в графе $G(\{x, y, z\})$ каждая вершина имеет степень хотя бы 1. Следовательно, можно считать, что $G(\{x, y, z\})$ – это путь $x y z$. Вершины x и z обязательно смежны с t , а y может быть как смежна, так и не смежна с t (см. Рис. 28б,в).

Рис. 28. Три возможных варианта графа H .

3.3.1. $G(H)$ – цикл $xuzt$ или цикл xuz с добавленным ребром zt . Это графы а) и б) на рисунке 28.

По пункту 1 леммы 7 вершины $H_1^* = \{x, y, z\}$ смежны в $G-H$ только с вершинами W_1 . Пятерки $\{y, z, t\} \cup W_2$ и $\{x, z, t\} \cup W_2$ нестягиваемы, следовательно, x и y имеют ровно по одному соседу в W_1 . Обозначим этих соседей через u и v , соответственно. Из трехсвязности графа G следует, что $u \neq v$.

Разбор этого случая следует из леммы 10.

Лемма 10. Пусть $G(H)$ – либо треугольник xuz и ведущее из него ребро zt , либо индуцированный цикл $xuzt$. Известно, что

- 1) вершины x и y имеют в W_1 ровно по одному соседу u и v , соответственно, (причем, $u \neq v$), и несмежны с остальными вершинами $G-H$;
- 2) t смежна хотя бы с двумя вершинами $G-H-W_1$;
- 3) $|W_2| = 2$.

Тогда в G найдется стягиваемая пятерка.

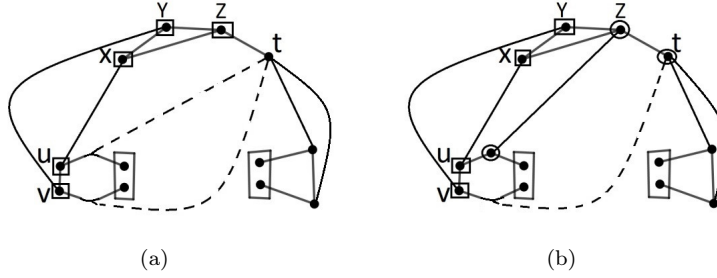
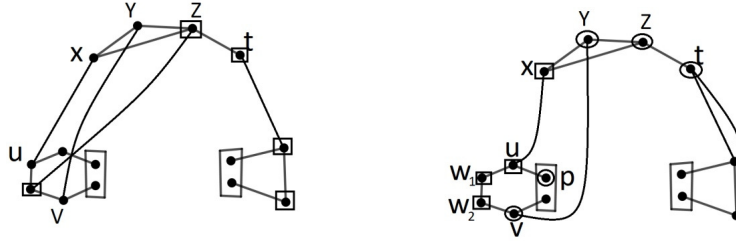
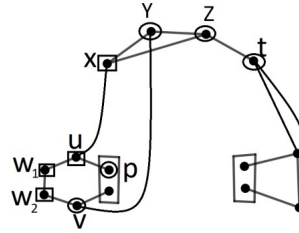
Доказательство. Разберем несколько случаев.

Вершины u и v смежны.

Тогда, если z не имеет соседей в W_1 , кроме быть может u и v , то пятерка $\{u, v, x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 29(a), пунктирные ребра ведут к вершинам, которых может не быть в G).

Если же z имеет в $W_1 \setminus \{u, v\}$ хотя бы одного соседа, то стягиваемая четверка $H' = \{u, v, x, y\}$ (см. Рис. 29(b) пунктирное ребро ведёт к вершине, которой может не быть в G). В окрестности этой четверки не более четырех вершин – это могут быть z, t и два соседа $\{u, v\}$ в графе $G-H$. Вершина t имеет степень минимум три в $G-H'$, то есть эта четверка расширяема по лемме 6.

Расстояние между u и v в W_1 равно 2.

Рис. 29. Стягиваемые пятерки в случае $|W_2| = 2$.Рис. 30. Стягиваемая пятерка $\{z, t\} \cup W_2$.Рис. 31. Четверка $\{w_1, w_2, u, x\}$ и ее окрестность.

Тогда вершина между u и v смежна с $\{z, t\}$ и потому в объединении с $\{z, t\} \cup W_2$ дает стягиваемую пятерку (см. Рис. 30).

Расстояние между u и v в W_1 хотя бы 3.

Если в W_1 есть подпуть W на четырех вершинах, содержащий u , но не содержащий v , то пятерка $W \cup \{x\}$ стягиваема. Следовательно, $W_1 = uw_1w_2v \dots$

Четверка $\{w_1, w_2, u, x\}$ – стягиваема, но нерасширяемая, то есть в ее окрестности должны содержаться два пути, удовлетворяющие лемме 6 (см. Рис. 31). Окрестность этой вершины содержится в множестве $\{p, v, y, z, t\}$, где p – второй сосед вершины u в графе $G - H$. Вершина t не может входить в пути, так как у нее степень больше 2 в графе

$G - \{w_1, w_2, u, x\}$. А вершина y смежна и с z , и с v , поэтому не найдутся два пути таких, что один не пересекается с окрестностью второго. $\square$

3.3.2. $G(H)$ – цикл $xyzt$ с диагональю yt . Этот граф изображен на рисунке 28в.

Вершины x, y, t и z, y, t образуют треугольники. По теореме 3 в каждой этой тройке должно быть хотя бы две вершины степени 3 в G . Так как $d_G(t) \geq 5$, степени 3 имеют вершины x, y и z . Тогда y несмежна с $G - H$.

Вершины x и z имеют ровно по одному соседу в W_1 (напомним, $x, z \in H_1^*$), причем их соседи различны в силу трехсвязности G . Пусть x смежна с $u \in W_1$, z смежна с $v \in W_1$.

Расстояние между u и v равно 1.

Тогда стягиваемая пятерка $\{x, y, z, u, v\}$ (см. Рис. 32).

Расстояние между u и v хотя бы 2.

Обозначим через w соседа u , лежащего в W_1 между u и v . Четверка $\{x, y, u, w\}$ стягиваемая и расширяема, так как в ее окрестности всего четыре вершины, одна из которых – t , имеющая большую степень (см. Рис. 33).

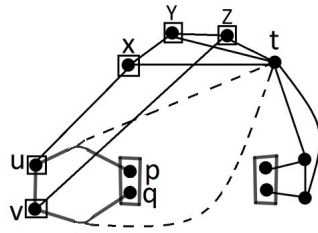


Рис. 32. Стягиваемая пятерка $\{x, y, z, u, v\}$.

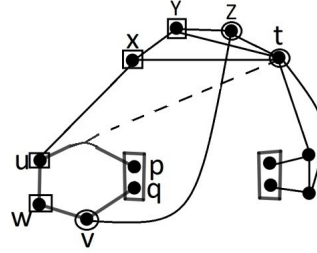


Рис. 33. Четверка $\{x, y, u, w\}$ и ее окрестность.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО $|H_i^*| \neq 2$

Докажем, что $|H_1^*| \neq 2$. Пусть так, тогда, исходя из доказанного выше, $|H_2^*| = 2$ или $|H_2^*| = 0$.

Обозначим вершины H так, что $\{x, y\} = H_1^*$, $\{z, t\} = H_2$. По пункту 1 леммы 7 вершины x и y смежны в $G - H$ только с вершинами W_1 .

Пусть $G(W_1) = u_1 \dots u_k$, $G(W_2) = w_1 \dots w_\ell$.

По пункту 2 леммы 7 каждая из вершин x, y может быть смежна только с одной из вершин z, t . Причем, если x и y смежны, то они могут быть смежны только с одной и той же вершиной из $\{z, t\}$. В любом случае, чтобы граф $G(H)$ был связан, необходимо, чтобы z и t были смежны.

4.1. $|H_2^*| = 0$. То есть $H_1 = H$.

По пункту 4 леммы 7 каждый подпуть W_2 – стягиваемый, следовательно, $|W_2| \leq 4$.

4.1.1. $|W_2| = 4$. Обозначим через p и q вершины, смежные с W_2 в $G - H$, тогда $N_G(W_2) \subset \{z, t, p, q\}$. Четверка W_2 стягиваема, но не расширяема, поэтому вершины $\{z, t, p, q\}$ должны образовывать два пути, удовлетворяющие лемме 6. Из леммы 9 следует, что это пути zt и pq . Значит, вершины z и t смежны, имеют степень 2 в графе $G - W_2$ и каждая из них смежна с W_2 . Кроме того, по лемме 6 $\{p, q\}$ не смежно с $\{z, t\}$.

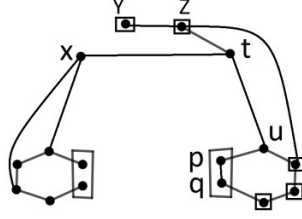
Пусть x и y несмежны.

Так как граф $G(H)$ связан, $d_{G-W_2}(z) \leq 2$ и $d_{G-W_2}(t) \leq 2$, одна из вершин x и y смежна с z (скажем, y), а другая (x) – с t . У каждой из вершин x и y есть по два соседа в W_1 (два в силу трехсвязности G и в W_1 по пункту 1 леммы 7). Из вершин z, t можно выбрать одну так, чтобы выбранная вершина была смежна хотя бы с одной крайней вершиной в W_2 , а невыбранная была смежна хотя бы с одной из трех оставшихся вершин W_2 . Пусть выбранная вершина – t , смежную с ней крайнюю вершину назовем u . Тогда пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 \setminus \{u\})$ стягиваема (см. Рис. 34).

Значит, x и y смежны.

Можно считать, что y смежна с z . Тогда по пункту 2 леммы 7 x, y не могут быть смежны с t . Кроме того, x не может быть смежна с z , так как $d_{G-W_2}(z) = 2$. Мы доказали, что граф $G(H)$ является простым путем $xyzt$.

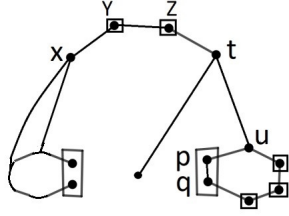
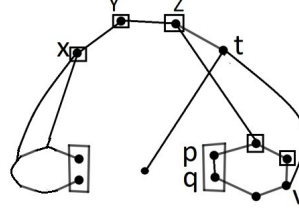
Тогда у x есть хотя бы два соседа в W_1 , у y – хотя бы один (так как они имеют степень 3 в G и лежат в H_1^*). В начале раздела 4.1 сказано, что мы разбираем случай $H_1 = H$. При этом $G(H)$ – это путь $xyzt$, и z смежна только с y и t в $G - W_2$. Но, по определению H_1 , граф $G - W_2$

Рис. 34. Стягиваемая пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 - u)$.

двусвязен. Это возможно только если у t есть сосед в $G - H - W_2$. Напомним, что в начале раздела 4.1.1 мы доказали, что этим соседом не является ни p , ни q .

Предположим, что t смежна с крайней вершиной u пути W_2 (см. Рис. 35). Пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 \setminus \{u\})$ нестягиваема, хотя z смежна с W_2 . Значит, z смежна в W_2 только с u . Но тогда t смежна со второй крайней вершиной w пути W_2 и пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 \setminus \{w\})$ стягиваема.

Следовательно, t смежна хотя бы с одной внутренней вершиной v пути W_2 и не смежна с его крайними вершинами. Крайние вершины W_2 смежны с z , поэтому, если взять внутреннюю вершину W_2 , отличную от v , и смежную с ней крайнюю вершину W_2 , то в объединении с $\{x, y, z\}$ они дадут стягиваемую пятерку (см. Рис. 36).

Рис. 35. t смежна с крайней вершиной W_2 .Рис. 36. t смежна с внутренней вершиной W_2 .

4.1.2. $|W_2| = 3$. Подграф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связан, так как вершины z и t смежны и хотя бы одна из них смежна с W_2 . Посмотрим, что будет, если удалить этот подграф.

Если x и y несмежны, то каждая из них смежна ровно с одной из вершин z, t и хотя бы двумя вершинами W_1 . Если x и y смежны, то они могут быть смежны только с одной из вершин $\{z, t\}$ и должны иметь хотя бы по одному соседу в W_1 , причем, в силу трехсвязности G , этих соседей можно выбрать так, чтобы они были различны.

В любом случае пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ стягиваема.

4.1.3. $|W_2| = 2$. Предположим, что одна из вершин x и y имеет степень 1 в $G(H)$. Пусть x . Тогда x имеет не менее двух соседей в W_1 . Так как граф $G(H)$ связан, граф $G(\{y, z, t\})$ тоже связан, и по пункту 1 леммы 7 W_2 смежно с $H_2 = \{z, t\}$. Следовательно, пятерка $\{y, z, t\} \cup W_2$ стягиваема.

Значит, вершины x и y имеют степень не менее 2 в H . По пункту 2 леммы 7 вершина x не может быть смежна одновременно и с z , и с t . Поэтому можно считать, что x смежна с y и z . По пункту 2 леммы 7, вершина y несмежна с t . Следовательно, y смежна с z . Таким образом, граф $G(H)$ – это треугольник xyz и ребро zt .

Пятерки $W_2 \cup \{y, z, t\}$ и $W_2 \cup \{x, z, t\}$ нестягиваемы, поэтому x и y имеют ровно по одному соседу в W_1 . В силу трехсвязности G , эти соседи различны.

Итак, $G(H)$ – это треугольник и ведущее из него ребро zt . Если вершина t имеет хотя бы двух соседей в $G - H - W_1$, то по лемме 10 в графе G найдется стягиваемая пятерка. Значит, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$. Тогда t смежна с W_1 и z смежна с W_2 .

Если t имеет хотя бы двух соседей в $G - H - W_2$, то пятерка $\{x, y, z\} \cup W_2$ стягиваема (см. Рис. 37). Значит, t смежна с W_2 .

Можно обозначить вершины W_2 так, что z смежна с w_1 , а t смежна с w_2 , так как с каждой из вершин W_2 смежна хотя бы одна из вершин $\{z, t\}$.

Пусть $|W_1| \geq 3$.

В третьем абзаце раздела 4.1.3 мы доказали, что x и y имеют ровно по одному соседу в W_1 , причем эти соседи различны. Предположим, что в W_1 можно выбрать подпуть $u_{i-1}u_iu_{i+1}$, содержащий соседей обеих вершин x, y . Пятерка $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, x, y\}$ связна (см. Рис. 38). Каждая вершина W_1 не из тройки $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}\}$ смежна с z или с t , так

как все соседи x и y содержатся в тройке. Следовательно, пятерка $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, x, y\}$ стягиваема.

Значит, такой подпуть выбрать нельзя. Значит, $|W_1| \geq 4$ и расстояние между соседями x и y в W_1 не меньше 3.

Предположим, что в W_1 можно выделить подпуть W такой, что $|W| = 4$ и W содержит соседа ровно одной из вершин x, y , например, x . Тогда пятерка $W \cup \{x\}$ стягиваема.

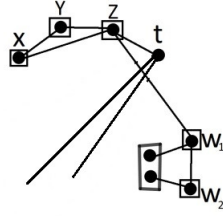


Рис. 37. Стягиваемая пятерка $\{x, y, z\} \cup W_2$.

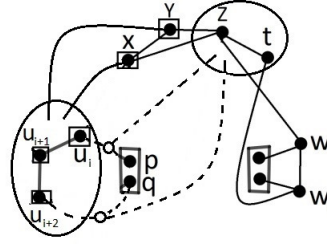


Рис. 38. Стягиваемая пятерка $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, x, y\}$.

Если такой подпуть выделить нельзя, то $|W_1| = 4$, и можно считать, что x смежна с u_1 , а y — с u_4 . Четверка $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ стягиваема (см. Рис. 39). Ее окрестность содержится в множестве $\{u_4, p, y, z, t\}$. Вершина p несмежна с u_4 и не может соседствовать в пути с y, z или t по пункту 1 леммы 9. А оставшиеся четыре вершины образуют путь $u_4 y z t$, поэтому из них не составить два пути так, чтобы ни один не лежал в окрестности второго. Следовательно, четверка $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ расширяема.

Значит, $|W_1| = 2$.

Выше было доказано, что x и y имеют ровно по одному соседу в W_1 , причем эти соседи различны. Не умаляя общности будем считать, что x смежна с u_1 , а y с u_2 . Также было доказано, что t смежна с W_1 . Так как пары $\{x, u_1\}$ и $\{y, u_2\}$ симметричны (обе вершины x, y смежны с z и несмежны с t), можно считать, что t смежна с u_2 .

Четверка $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема и нерасширяема (см. Рис. 40). Окрестность этой четверки лежит в множестве $\{p, q, z, t\}$. По лемме 9, $\{p, q\}$ — внутренность одной из частей. Следовательно, внутренность

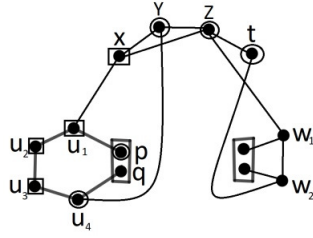


Рис. 39. Стыгиваемая четверка $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ и ее окрестность.

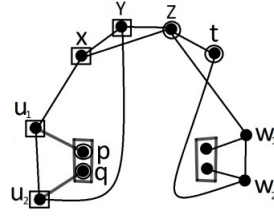


Рис. 40. Стыгиваемая четверка $W_1 \cup \{x, y\}$ и ее окрестность.

второй части $\{z, t\}$. Тогда по пункту 2 леммы 6, z смежна в $G - H - W_1$ только с w_1 , а вершина t — только с w_2 .

Пусть w_1 смежна в $G - H$ с w_2 и r , а w_2 — с w_1 и s . Четверка $\{u_1, x, y, z\}$ стягиваема. Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{u_2, t, p, w_1\}$ (см. Рис. 41). Вершины t и u_2 смежны, поэтому два пути, удовлетворяющие лемме 6 могут существовать только если w_1 смежна с p , а значит, $p = r$ и $d_{G-H-W_1-W_2}(p) = 1$.

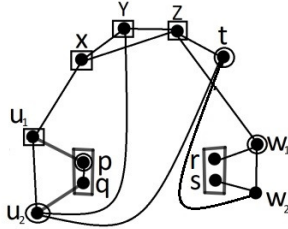


Рис. 41. Стыгиваемая четверка $\{u_1, x, y, z\}$ и ее окрестность.

Значит, граф $G - H - W_1 - W_2$ не связен. Очевидно, $v(G - H - W_1 - W_2) \geq 5$. С другой стороны, вспомним, что $pq \in E(G)$, а, следовательно, по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины. Противоречие.

4.2. $|H_2^*| = 2$. Пусть $H_1^* = \{x, y\}$, $H_2^* = \{z, t\}$.

Если в H_1^* две компоненты связности, то каждая из них должна быть соединена ровно с одной вершиной из $H_2 = H_2^*$, поэтому там тоже две компоненты связности, но тогда H несвязен. Следовательно, в H есть ребро xy и, аналогично, zt . Кроме того, будем считать, что y смежна с z . Тогда x по пункту 2 леммы 7 не может быть смежна с t , а z не может быть смежна с x . И, аналогично, t несмежна с x и y . Таким образом, $G(H)$ – это путь $xyzt$.

Тогда x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1 , y – хотя бы с одной вершиной W_1 , z – хотя бы с одной вершиной W_2 , t – хотя бы с двумя вершинами W_2 .

4.2.1. $|W_1| \geq 6$. Если хотя бы одна из вершин $u_6, \dots, u_k$ смежна с x , то множество $\{u_1, u_2, \dots, u_5\}$ стягиваемо. Следовательно, $u_6, \dots, u_k$ смежны только с y , и, аналогично, u_1 смежна только с y . Но тогда x смежна хотя бы с одной из вершин $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$, и пятерка $\{u_2, u_3, u_4, u_5, x\}$ стягиваема (см. Рис 42(a)).

4.2.2. $|W_1| = 5$. Если одна из крайних вершин W_1 , например, u_1 , смежна с y , то пятерка $W_1 \setminus \{u_1\} \cup \{x\}$ стягиваема (см. Рис. 42(b)).

Иначе, вершины u_1 и u_5 смежны только с x . Тогда стягиваема будет пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ (см. Рис. 42(c)).

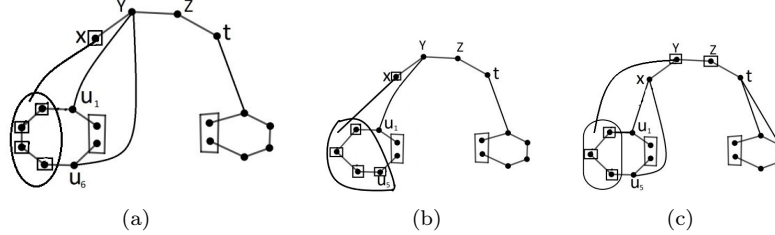


Рис. 42. Стягиваемые пятерки в случае $|W_1| \geq 5$.

4.2.3. $|W_1| = 4$. Если y смежна с одной из крайних вершин W_1 , скажем с u_1 , то четверка $\{x, u_2, u_3, u_4\}$ – стягиваемая и расширяемая по лемме 6, так как в ее окрестности лежат всего три вершины (напомним, что $x \in H_1^*$ несмежна с $G - H - W_1$) (см. Рис. 43(a)).

Если же u_1 и u_4 смежны только с x , то пятерка $\{u_2, u_3, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 43(b)).

4.2.4. $|W_1| = 3$. Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема, так как z имеет хотя бы одного соседа в W_2 , а t — хотя бы два (см. Рис. 43(c)).

4.2.5. $|W_1| = 2$. Пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема, так как t имеет хотя бы двух соседей в W_2 (см. Рис. 43(d)).

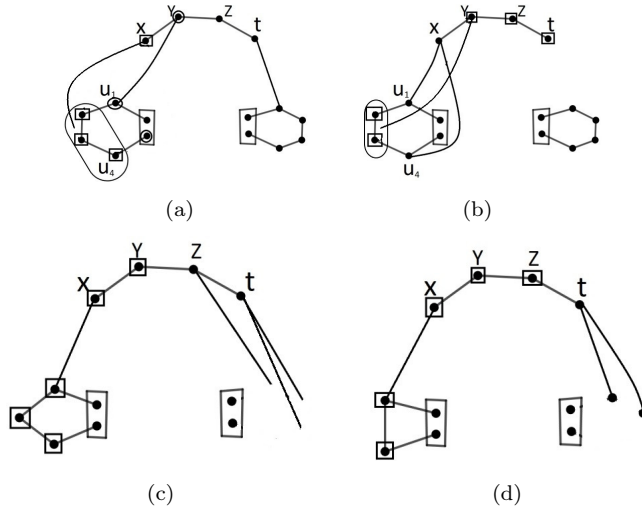


Рис. 43. Стягиваемые пятерки в случае $|W_1| \leq 4$.

Далее будем рассматривать случаи, когда $H_1^* = H_2^* = \emptyset$, любые подпути в W_1 и W_2 стягиваемы по пункту 4 леммы 7 и $|W_1|, |W_2| \in \{2, 3, 4\}$.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО $|W_i| \neq 4$.

Пусть $|W_1| = 4$.

Четверка W_1 стягиваема, поэтому в $G - W_1$ есть два пути, удовлетворяющие условиям леммы 6. Обозначим эти пути за W'_1 и W'_2 . Также обозначим вершины, смежные W_1 в $G - H$ за p и q , а вершины W_1 за u_1, u_2, u_3, u_4 в порядке следования от p до q .

По лемме 9 ребро pq является одним из путей. Можно считать, что $pq = G(W'_2)$ и $xy \in G(W'_1)$.

5.1. $|W_2| = 4$. Четверка W_2 также стягиваема, для нее существуют пути W'_1 и W''_1 , удовлетворяющие условиям леммы 6, и, аналогично рассуждениям выше, можно считать, что $W''_1 \subset H$.

Посмотрим, могут ли пути W'_1 и W''_1 пересекаться. Пусть $x \in W'_1 \cap W''_1$. Тогда x смежна и с W_1 , и с W_2 , но при этом степень x в $G - W_1$ и в $G - W_2$ равна 2. Следовательно, x должна иметь степень 1 в $G(H)$. То есть x смежна в H только с вершиной y . Значит, $y \in W'_1 \cup W''_1$, и ее степень в $G(H)$ тоже равна 1. Противоречие со связностью $G(H)$.

Следовательно, эти пути не пересекаются и можно считать, что $G(W'_1) = xy$, $G(W''_1) = zt$. Также будем считать, что y смежна с z .

Предположим, что x и t смежны. Тогда по теореме 3 одна из вершин цикла $xyzt$ должна иметь степень 3 в G . Пусть это будет x . Не умаляя общности можно считать, что u_4 несмежна с x . Тогда u_4 смежна с y , ведь z и t имеют степень 2 в $G - W_2$. Получаем, что пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, t\}$ стягиваемая, ведь z смежна с W_2 , а u_4 смежна с y (см. Рис. 44).

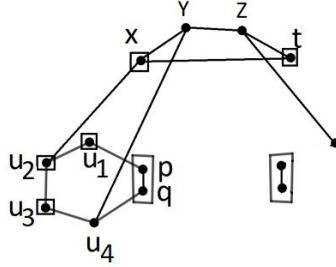


Рис. 44. Стягиваемая пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, t\}$.

Значит, x и t несмежны и у них есть ровно по одному соседу в $G - H - W_1$ и $G - H - W_2$, соответственно. Ровно по одному, так как они входят в пути для четверок W_1 и W_2 .

Итак, у вершины x есть ровно один сосед в $G - H - W_1$. Напомним, что xy и pq – пути для четверки W_1 . По пункту 3 леммы 6 для четверки W_1 множества $\{x, y\}$ и $\{p, q\}$ несмежны.

Если x смежна с внутренней вершиной W_1 , к примеру, u_2 , то или пятерка $\{u_3, u_4, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 45), или с вершинами u_3, u_4 смежна только x и тогда y смежна с $\{u_1, u_2\}$, а значит, пятерка $\{u_1, u_2, y, z, t\}$ стягиваема.

Следовательно, x может быть смежна только с крайними вершинами W_1 . Пусть x смежна с u_1 . Граф $G(\{u_2, u_3, u_4, y, z\})$ связан, так как с множеством $\{u_2, u_3\}$ могут быть смежны только y и t , но t смежна не более чем с одной вершиной из этого множества. Но пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ нестягиваема. Это возможно только в том случае, когда $N_G(t) \cap V(G - H - W_2) \subset \{u_2, u_3, u_4\}$ и t имеет ровно одного соседа в W_2 (см. Рис. 46). Напомним, что xy – путь для четверки W_1 . По пункту 2 леммы 6 для четверки W_1 , вершины x и y имеют степень 2 в графе $G - W_1$. То есть x имеет только одного соседа в $G - H - W_1$, а y вообще не имеет соседей. По пункту 1 леммы 4 для четверки H , все вершины W_2 смежны с H . Было доказано, что y не имеет соседей в W_2 , а каждая из вершин x и t имеет там не более одного соседа. Следовательно, z смежна хотя бы с двумя вершинами W_2 . Но тогда пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, t\}$ стягиваема.

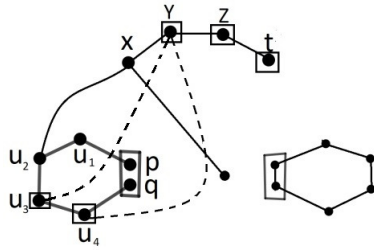


Рис. 45. Стягиваемая пятерка $\{u_3, u_4, y, z, t\}$.

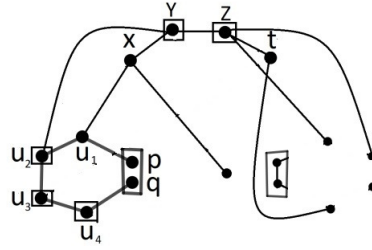


Рис. 46. Нестягиваемая пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ и Стягиваемая $\{u_2, u_3, u_4, y, t\}$.

5.2. $|W_2| = 3$. Напомним, что четверка W_1 стягиваема, одним путем для нее является ребро pq , а второй путь содержит ребро xy . Не умаляя общности будем считать, что y и z смежны. Тогда $N_G(y) \subset \{z, x\} \cup W_1$,

а x имеет ровно одного соседа в $G - W_1 - \{y\}$ и несмежна с z . Возможны два случая.

5.2.1. *Граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ несвязен.* Либо z , либо t смежна с W_2 , так как не более чем одна вершина W_2 смежна с $\{x, y\}$. Значит, z и t несмежны. Так как граф H связен, вершина t смежна с $\{x, y\}$. Но t не может быть смежна с y , а значит, t смежна с x . После этих рассуждений вершины z и t стали взаимозаменяемы. Мы рассматриваем случай, когда граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ несвязен, поэтому, не умаляя общности, можно предположить, что t смежна с W_2 , а z – нет. Тогда пятерка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема, так как вершина y имеет хотя бы одного соседа в W_1 , а z смежна с хотя бы двумя вершинами $G - H - W_2$ (так как $d_G(z) \geq 3$, и мы доказали, что z несмежна с x, t и W_2) (см. Рис. 47).

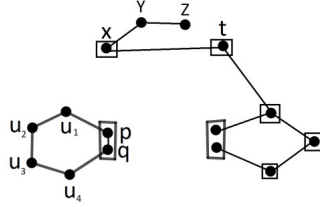


Рис. 47. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, t\}$.

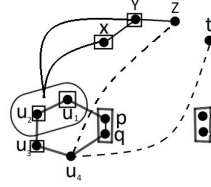


Рис. 48. Стягиваемая пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, y\}$.

5.2.2. *Граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен.* Но пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ нестягиваема. Тогда x и y имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_2$, причем эти соседи совпадают и лежат в W_1 .

Можно считать, что этот сосед лежит в множестве $\{u_1, u_2\}$.

Вспомним, что xy – ребро из пути $G(W'_1)$, удовлетворяющего лемме 6 для графа $G - W_1$.

Если $G(W'_1) = xy$, то множество $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваемо. Но u_4 смежна с q и одной из вершин z, t . Значит, пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 48).

Значит, еще одна вершина H лежит в W'_1 . Отметим, что $H \neq W'_1$, так как иначе в W_2 могут идти не более двух ребер из H , но $|W_2| = 3$ и в каждую вершину W_2 должно идти ребро из H . Пусть $G(W'_1) = xyz$.

Теперь можно повторить все рассуждения выше для вершин y и z (ведь $yz \in G(W'_1)$) и получить, что единственный сосед z в W_1 совпадает с соседом y . Откуда следует, что t смежна с u_3 . Кроме того, t смежна с W_2 , поэтому пятерка $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ стягиваема.

5.3. $|W_2| = 2$. Опять будем считать, что y и z смежны, а ребро xu принадлежит пути $G(W'_1)$ для четверки W_1 . Напомним, что из этого следует, что x и y имеют степень 2 в $G - W_1$.

Рассмотрим два случая.

5.3.1. $G(W_2 \cup \{z, t\})$ несвязен. Аналогично сказанному в начале раздела 5.2.1, можно считать, что вершины z и t несмежны, t смежна с x , t смежна с W_2 , а z несмежна с W_2 . Так как $d_{G-W_1}(x) = 2$, вершины x и z несмежны. Тогда пятерка $W_2 \cup \{x, y, t\}$ стягиваема (см. Рис. 49), так как z смежна с одной вершиной H и несмежна с W_2 , следовательно, смежна хотя бы с двумя вершинами из $G - H - W_2$.

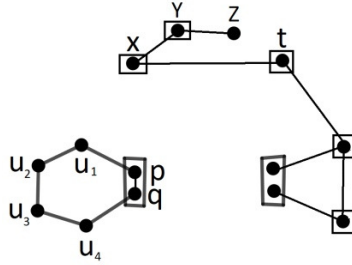


Рис. 49. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, y, t\}$.

5.3.2. $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен. Тогда связан также граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$. Если пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ нестягиваема, то x имеет ровно одного соседа в $G - H - W_2$. Следовательно, x смежна с t или с W_2 . В любом случае пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ связна. Она нестягиваема только в том случае, когда y имеет в W_1 ровно одного соседа.

Итак, далее x и y имеют по одному соседу в W_1 . Напомним, что ребро xu лежит в пути W'_1 для четверки W_1 . Далее мы разберем несколько случаев, каким может быть путь $G(W'_1)$. Если $W'_1 \neq \{x, y\}$, то путь должен продолжаться или соседом y , и/или соседом x в $G - W_1$. При этом x имеет ровно двух соседей в $G - W_1$ — это y и ещё один сосед из

множества $\{t\} \cup W_2$ (это было доказано в предыдущем абзаце). Но вершины W_2 не могут лежать в пути для четверки W_1 , так как по лемме 4 вершина из внутренности крайней части должна быть смежна с четверкой. А по лемме 6, множества W_1 и W_2 несмежны. Вершина y также имеет в $G - W_1$ ровно двух соседей – вершины x и z (наличие именно этих ребер мы предположили в начале раздела 5.3). Следовательно, если путь $G(W'_1)$ продолжается соседом x , то только вершиной t . А если соседом y , то только вершиной z . Оба этих случая симметричны. Действительно, единственное условие, которое различало вершины x и y , а также z и t , было условие существования ребра yz . Но если x смежна с t , то пары $\{x, t\}$ и $\{y, z\}$ равнозначны, поэтому не умаляя общности можно считать, что если путь продолжается, то вершиной z . При этом мы не исключаем варианта, что ребро xt также входит в путь.

Случай 1. $G(W'_1) = xy$.

Тогда граф $G - W_1 - \{x, y\}$ двусвязен. Если множество $\{x, y\}$ несмежно хотя бы с одной крайней вершиной W_1 (пусть с u_4), то пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, y\}$ стягиваема.

Значит, множество $\{x, y\}$ смежно с u_1 и u_4 . Так как x и y имеют по одному соседу в W_1 , можно считать, что x смежна с u_1 , а y – с u_4 . Множество $\{u_2, u_3\}$ смежно с $\{z, t\}$.

Предположим, что x смежна с t . Тогда x и y несмежны с W_2 . Хотя бы одна из вершин z, t смежна с W_2 . Пусть эта вершина – t . Тогда пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 50).

Значит, x несмежна с t . В начале раздела 5.3.2 мы доказали, что x смежна с t или W_2 . Следовательно, x смежна с одной вершиной из W_2 , а t смежна с z (иначе $G(H)$ будет несвязным). Но тогда вершина W_2 , несмежная с x , в объединении с $\{z, t, u_2, u_3\}$ даст стягиваемую пятерку (см. Рис. 51). Действительно, мы уже доказали, что $\{z, t\}$ смежно с $\{u_2, u_3\}$, значит, пятерка связна. А по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит две вершины, поэтому после добавления цикла pu_1xu_4q останется (или, в случае двух вершин, станет) двусвязным.

Случай 2. $G(W'_1)$ содержит путь xuz .

В начале раздела 5.3.2 было доказано, что $G(W_2 \cup \{x, z, t\})$ связан. Так как z лежит в пути W'_1 , она имеет степень 2 в $G - W_1$. Следовательно, может быть смежна только с одной вершиной множества

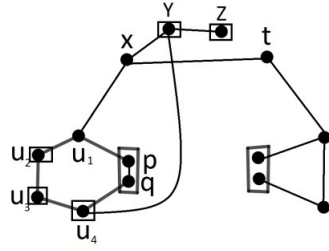


Рис. 50. Стягиваемая пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$.

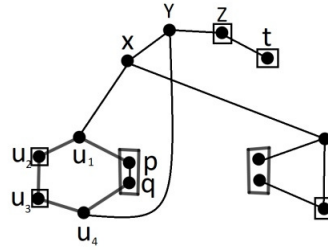


Рис. 51. Стягиваемая пятерка, если x смежна с W_2 .

$\{x, t\} \cup W_2$, и является висячей вершиной графа $G(W_2 \cup \{x, z, t\})$. Значит, граф $G(W_2 \cup \{x, t\})$ связан. Теперь вершины x и z симметричны в наложенных на них предположениях (ребра xu и yz входят в путь W'_1 , обе вершины образуют связный граф вместе с вершинами $\{t\} \cup W_2$). Про x в начале раздела 5.3.2 мы доказали, что она смежна ровно с одной вершиной W_1 , следовательно, про z это тоже верно.

Одна из вершин x и z смежна с t . Не умаляя общности, пусть z . В начале раздела 5.3.2 доказано, что x смежна с t или W_2 . Поэтому x смежна с W_2 (она не может быть смежна с t , так как тогда t — точка сочленения графа $G - W_1$, а этот граф двусвязен).

Так как y и z имеют степень 2 в $G - W_1$, со второй вершиной W_2 смежна t (пусть не умаляя общности, x смежна с w_1 , а t — с w_2).

Если x смежна с внутренней вершиной W_1 , например, с u_2 , то пятерка $\{u_3, u_4, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 52). Напомним, что x имеет ровно одного соседа в W_1 , поэтому $\{u_3, u_4\}$ смежно с $\{y, z, t\}$.

Значит, x смежна с крайней вершиной W_1 , например, с u_1 .

Если t смежна с u_3 , то пятерка $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 53). Если t не смежна с u_3 и смежна с u_2 , то пятерка $\{u_3, u_4, x, y, z\}$ стягиваема, так как с u_3 смежна одна из вершин $\{y, z\}$ (см. Рис. 54).

Следовательно, t не смежна ни с u_2 , ни с u_3 . В начале раздела 5.3.2 было доказано, что каждая из вершин x и y имеет ровно одного соседа в W_1 , а в начале разбора случая 2 мы сказали, что аналогичное верно и про z . Значит, $\{y, z\}$ связано двумя независимыми ребрами с $\{u_2, u_3\}$, а t смежна с u_4 .

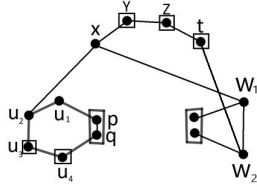


Рис. 52. Стыгиваемая пятерка $\{u_3, u_4, y, z, t\}$.

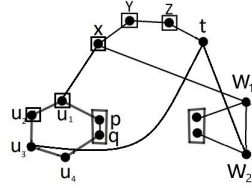


Рис. 53. Стыгиваемая пятерка $\{u_1, u_2, x, y, z\}$.

Если y смежна с u_3 , то z смежна с u_2 и пятерка $\{u_2, z, t\} \cup W_2$ стягиваема (см. Рис. 55), так как в двусвязном графе $G - H - W_2$ мы заменили путь $u_1 u_2 u_3$ на путь $u_1 x u_3$.

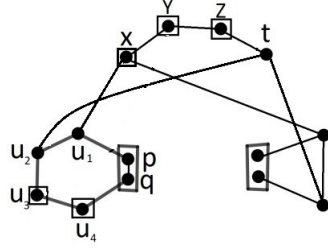


Рис. 54. Стыгиваемая пятерка $\{u_3, u_4, x, y, z\}$.

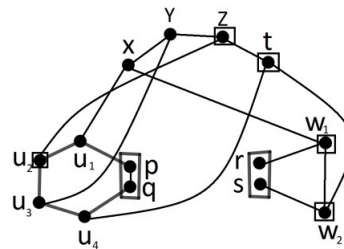


Рис. 55. Стыгиваемая пятерка $\{u_2, z, t\} \cup W_2$.

Значит, y смежна с u_2 , а z — с u_3 .

Пусть $G(W_2) = w_1 w_2$, и $\{x, w_2, r\} \subset N_G(w_1)$, а $\{t, w_1, s\} \subset N_G(w_2)$. Про существование рёбер xw_1 и tw_2 было сказано в третьем абзаце случая 2.

Если $N_G(t) \neq \{z, u_4, w_2\}$, то пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ стягиваема. Действительно, раз t несмежна с u_3 , остались неудаленными хотя бы две вершины из окрестности t . Поэтому, далее считаем, что $N_G(t) = \{z, u_4, w_2\}$.

Напомним, что вершины p и q смежны. Поэтому по лемме 8 граф $G - W_1 - W_2$ двусвязен или состоит ровно из двух вершин.

Пятерка $\{u_3, u_4, z, t, w_2\}$ нестягиваема только если $p=r$ (см. Рис. 56).
 Пятерка $\{u_1, u_2, x, y, w_1\}$ нестягиваема только если $q=s$ (см. Рис. 57).

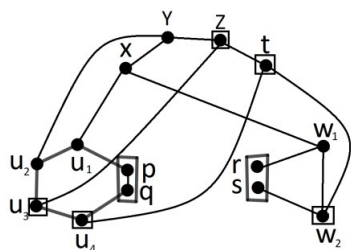


Рис. 56. Пятерка
 $\{u_3, u_4, z, t, w_2\}$.

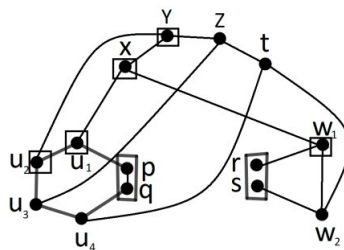


Рис. 57. Пятерка
 $\{u_1, u_2, x, y, w_1\}$.

Пусть $p = r, q = s$.

Предположим, что в графе $G - H$ есть вершины, отличные от $V(W_1) \cup V(W_2) \cup \{p, q\}$. Тогда в $G - H$ есть еще одна крайняя часть, но ее вершины не могут быть смежны с H , так как мы доказали, что из вершин H не идут ребра, отличные от тех, которые уже проведены на рисунке 57. То есть граф G не трехсвязен. Противоречие.

Значит, других вершин в графе $G - H$ нет. Перерисуем граф G (см. Рис. 58). Легко проверить, что в нем нет стягиваемой пятерки. Заметим, что в этом графе-исключении 12 вершин.

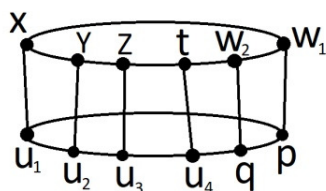


Рис. 58. Граф G .

§6. $|W_1| = 3$, $|W_2| \leq 3$

Итак, мы доказали, что если в трехсвязном графе G нет стягиваемой пятерки, то для любой стягиваемой четверки H , которая не является первой подозрительной четверкой, любая крайняя часть графа $G - H$ является циклом и размер её внутренности не превосходит 3.

Напомним, что первая подозрительная четверка обладает следующими свойствами: внутренность одной из крайних частей $G - H$ имеет размер 3 и со всеми внутренними вершинами этой крайней части смежна только одна из вершин H , причем эта вершина смежна хотя бы с двумя вершинами H . А три другие вершины H смежны только с внутренними вершинами другой крайней части. Следующая лемма доказывает, что в случае первой подозрительной четверки в графе G есть стягиваемая пятерка.

Лемма 11. *В обозначениях леммы 6 пусть $\{p, q\} = \text{Bound}(A_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$ и $\text{Int}(A_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$, где u_1 смежна с p , а u_3 — с q . Предположим, что ровно одна вершина $x \in H$ смежна с внутренними вершинами A_i . Тогда*

- 1) *множество $H' = \{p, u_1, u_2\}$ стягиваемо;*
- 2) *если x смежна хотя бы с двумя вершинами H , то множество H' расширяемо некоторой вершиной v , причем $v \neq x$, $v \neq q$.*
- 3) *если в дополнение к пункту 2 $d_{G-H'}(x) \geq 4$ или оба соседа x в графе $G(H)$ несмежны с p , то в G есть стягиваемая пятерка.*

Доказательство. 1) Граф $G - p$ двусвязен. Докажем, что граф $G - H'$ также двусвязен, что равносильно тому, что тройка H' стягиваема. Предположим, что в графе $G - H'$ есть точка сочленения v . При этом в графе $G - p$ точки сочленения не было. Рассмотрим вершины α и β из разных компонент связности графа $G - H' - v$. Очевидно, что $\{\alpha, \beta\} \neq \{x, u_3\}$, так как $xu_3 \in E(G)$. По теореме Менгера в графе $G - p$ между α и β существовало два пути, не пересекающихся по внутренним вершинам. После удаления вершин u_1 и u_2 хотя бы один из путей перестал существовать (если бы остались оба, то α и β нельзя было бы разделить одной вершиной). Следовательно, путь, переставший существовать, проходил через вершину u_1 или u_2 . Но заметим, что множество $\{x, u_3\}$ отделяет $\{u_1, u_2\}$ от остальных вершин графа $G - p$, поэтому любой простой путь, проходящий через u_1 или u_2 с концами в $G - H'$, должен посещать и вершину x , и вершину u_3 . А тогда проход через u_1 и/или u_2 можно заменить проходом по ребру

xu_3 . Таким образом, в графе $G - H'$ между любыми двумя несмежными вершинами существуют два непересекающихся по внутренним вершинам пути. Значит, $G - H'$ двусвязен, и тройка H' стягиваема.

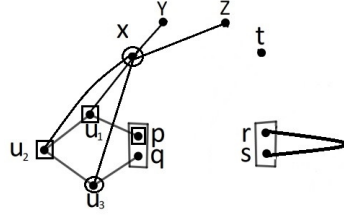


Рис. 59. Стягиваемая тройка $\{u_1, u_2, p\}$.

2) Пусть x смежна с y и z , но H' нерасширяемо. Так как $d_{G-H'}(x) \geq 3$, граф $G - H'$ не является простым циклом. По лемме 6 в окрестности H' есть пути W'_1 и W'_2 . $N_G(H') = \{x, u_3\} \cup N_G(p) \setminus \{u_1\}$. Вершина x точно не входит в эти пути, так как у нее степень больше 2 в $G - H'$, поэтому, не умаляя общности можно считать, что $W'_1 \cap \{x, u_3\} = \emptyset$. По лемме 6 множество $W'_1 \cup H'$ стягиваемо.

Если $|W'_1| = 2$, то стягиваема пятерка $W'_1 \cup \{p, u_2, u_1\}$.

Если $|W'_1| = 3$, то стягиваема пятерка $W'_1 \cup \{p, u_1\}$.

Если $|W'_1| = 4$, то стягиваема пятерка $W'_1 \cup \{p\}$.

Пусть $|W'_1| \geq 5$ и $W'_1 = u'_1 \dots u'_k P$, где P – подпуть $G(W'_1)$, содержащий 4 вершины. Граф $G - H' - W'_1$ двусвязен по лемме 6, а тогда двусвязен граф $G - P$, так как он получается добавлением к двусвязному графу $G - H' - W'_1$ пути $u_3 u_2 u_1 x$, а затем пути $u_1 p u'_k u'_{k-1} \dots u'_1 p'$, где p' – вершина из $G - H' - W'_1$, смежная с u'_1 (она точно существует и не совпадает с u_1). Итак, подпуть P – стягиваемый. Либо он расширяемый, либо в его окрестности должны содержаться два пути, удовлетворяющие лемме 6. Но в окрестности этого пути содержатся только три вершины: p и две вершины из окрестности P в графе $G - H'$. Следовательно, $V(P)$ – расширяемая четверка и в графе G есть стягиваемая пятерка.

Значит, тройка H' расширяема некоторой вершиной v . Четверка $H'' = H' \cup \{v\}$ стягиваема. Заметим, что $v \neq x$ и $v \neq q$, так как тогда в графе $G - H''$ оставалась бы вершина u_3 степени 1.

3) По лемме 6 в окрестности H'' есть пути W_1'' и W_2'' . Предположим, что вершина x входит в один из этих путей. Тогда $d_{G-H''}(x) = 2$, а $d_{G-H'}(x) = 3$. Следовательно, $N_{G-H'}(x) = \{u_3, y, z\}$ и $v \in \{u_3, y, z\}$. По условию леммы, y, z несмежны с p . Если $v \in \{y, z\}$, то чтобы четверка H'' была связной, надо, чтобы H' было смежно с $\{y, z\}$, а это в нашем случае не так. А если $v = u_3$, то x может входить в путь только с y или z , что опять же невозможно, так как y и z не лежат в окрестности H'' .

Значит, x не лежит в путях для H'' .

Случай 1. $v \neq u_3$

Тогда $v \in N_G(p)$. Не умаляя общности можно считать, что $u_3 \notin W_1''$, тогда $W_1'' \subset N_G(p)$.

Если $|W_1''| = 2$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, v, u_1\}$.

Если $|W_1''| = 3$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, v\}$.

Случай $|W_1''| \geq 4$ возможен только если $H'' = \{u_2, u_1, p, v\}$ – первая подозрительная четверка. Заметим, что в H'' только вершина p может одновременно иметь степень не менее 2 в $G(H'')$ и быть смежна с тремя вершинами $G - H''$. Из свойств первой подозрительной четверки (которые мы напоминали перед формулировкой леммы) следует, что $|W_2''| = 3$, W_2'' несмежно с $\{u_2, u_1, v\}$ и $u_3 \notin W_2''$, так как u_3 несмежна с p . По лемме 6 граф $G - H'' - W_2''$ двусвязен, а тогда двусвязен граф $G - \{p, v\} - W_2''$, так как получается добавлением пути $u_3 u_2 u_1 x$ к двусвязному графу $G - H'' - W_2''$. Следовательно, пятерка $\{p, v\} \cup W_2''$ стягиваема.

Случай 2. $v = u_3$

Напомним, что x не лежит в путях для H'' . Не умаляя общности можно считать, что $q \notin W_1''$, тогда $W_1'' \subset N_G(p)$.

Если $|W_1''| = 2$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, u_2, u_1\}$.

Если $|W_1''| = 3$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, u_1\}$.

Случай $|W_1''| \geq 4$ возможен только если H'' – первая подозрительная четверка, но в $G(H'')$ нет вершины степени 2, которая могла бы быть смежна с тремя вершинами пути W_2'' . Действительно, в $G(H'')$ степень 2 имеют только вершины u_1 и u_2 , но в множестве $v(G - H'')$ они смежны только с вершиной x . Следовательно, в G есть Стягиваемая пятерка. $\square$

Итак, мы доказали, что если в G нет стягиваемой пятерки, то для любой стягиваемой четверки H граф $G - H$ не является простым циклом, $H = H_1 = H_2$, все крайние части $G - H$ — циклы, и размер внутренности любой крайней части не превосходит 3.

Пусть $G(W_1) = u_1u_2u_3$, $G(W_2) = w_1w_2w_3$ или $G(W_2) = w_1w_2$. И пусть u_1 смежна с p в $V(G - H - W_1)$, а u_3 — с q .

6.1. Доказательство того, что в H есть два независимых ребра. Пусть это не так, тогда можно обозначить вершины H так, что вершина x смежна с вершинами y, z, t и никаких других ребер в H нет. Так как $H = H_1 = H_2$, каждая из вершин y, z, t смежна хотя бы с одной вершиной в $G - H - W_1$ и в $G - H - W_2$.

Докажем, что хотя бы две вершины множества $\{y, z, t\}$ имеют не более одного соседа в $G - H - W_1$. Предположим, что это не так. Не умаляя общности будем считать, что множество $\{x, y\}$ смежно с W_1 . Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ нестягиваема только тогда, когда одна из вершин z, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$ (см. Рис. 60), пусть это будет z . Значит, z смежна с W_1 . Но тогда пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$ нестягиваема, так как по нашему предположению вершины y, t имеют не менее двух соседей в $G - H - W_1$.

Таким образом, хотя бы две вершины множества $\{y, z, t\}$ имеют не более одного соседа в $G - H - W_1$. Пусть не умаляя общности, это будут y и z . Тогда y и z смежны с W_1 .

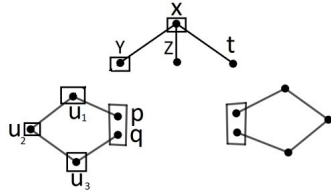


Рис. 60. Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$.

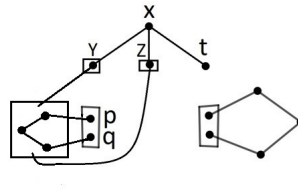


Рис. 61. Пятерка $W_1 \cup \{y, z\}$.

Пятерка $W_1 \cup \{y, z\}$ нестягиваема (см. Рис. 61). Тогда либо x несмежна с $G - H - W_1$, либо x и t обе смежны только с одной вершиной $f \in V(G - H - W_1)$. Но второго случая быть не может, так как тогда среди вершин x, t, f , образующих треугольник, только одна вершина

t может иметь степень 3 в G , что противоречит теореме 3. Действительно, вершины x и f будут иметь степень хотя бы 4. Вершина x – так как смежна с y, z, t и f , вершина f – так как смежна с x, t и хотя бы двумя вершинами в двусвязном графе $G - H$. Следовательно, x несмежна с $G - H - W_1$.

6.1.1. $|W_2| = 3$. Применим рассуждения выше к W_2 . Тогда вершина x смежна только с вершинами H . Также в H найдутся хотя бы две вершины, имеющие не более одного соседа в $G - H - W_2$. Следовательно, есть вершина – скажем, z – имеющая не более одного соседа как в $G - H - W_1$, так и в $G - H - W_2$. Значит, z имеет ровно одного соседа в W_1 , ровно одного соседа в W_2 и несмежна с $G - H - W_1 - W_2$.

Четверка $W_1 \cup \{z\}$ нестягиваема, только если y и t имеют в $G - H - W_1$ только общего соседа, но тогда у z хотя бы 2 соседа в W_2 , что противоречит выбору z . Следовательно четверка $W_1 \cup \{z\}$ стягиваема. Ее окрестность лежит в множестве $\{p, q, x, y, t, w_i\}$, где w_i – сосед z в W_2 (см. Рис. 62).

Если вершина w_i смежна с $\{x, y, t\}$, то у нее степень хотя бы 3 в $G - W_1 - z$. Значит, она может входить в один путь только с вершинами p и q . Но тогда она должна быть крайней вершиной W_2 . Если это так (например, $i = 1$), то пятерка $\{x, y, t, w_2, w_3\}$ стягиваема.

Значит, w_i не входит ни в один путь. Теперь из пункта 2 леммы 9 легко следует, что в G есть ребро pq и это ребро является путем для четверки $W_1 \cup \{z\}$. Тогда шестерка $\{z, u_1, u_2, u_3, p, q\}$ стягиваема по лемме 6 (см. Рис. 63). А тогда стягиваема пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$, так как z смежна с x и w_i .

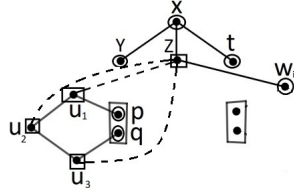


Рис. 62. Четверка $W_1 \cup \{z\}$ и ее окрестность.

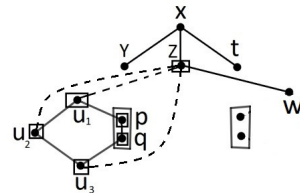


Рис. 63. Стягиваемая шестерка $\{z, u_1, u_2, u_3, p, q\}$.

6.1.2. $|W_2| = 2$. Не умаляя общности, множество $\{x, y, t\}$ смежно с W_2 . Пятерка $W_2 \cup \{x, y, t\}$ нестягиваема. Следовательно, z имеет не более одного соседа в $G - H - W_2$ и z смежна с W_2 . Рассматривая пятерки $W_2 \cup \{x, y, z\}$ и $W_2 \cup \{x, z, t\}$, получаем, что y, t смежны с W_2 и имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_2$ (напомним, что хотя бы по одному соседу в $G - H - W_2$ у них есть, так как они принадлежат множеству H_1). Если одна из вершин y, z, t смежна с крайней вершиной W_1 , скажем, y смежна с u_1 , то пятерка $\{u_2, u_3, x, z, t\}$ стягиваема. Иначе, с двумя крайними вершинами W_1 смежна x , и стягиваема пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$.

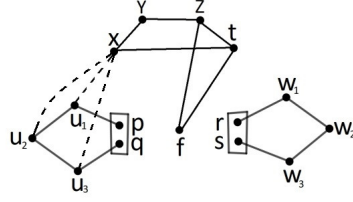
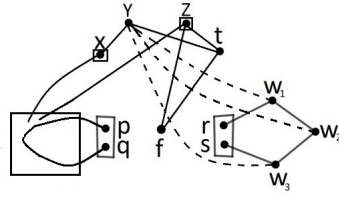
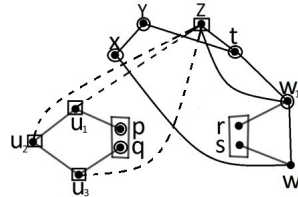
Далее считаем, что в H есть два независимых ребра. Пусть это ребра xy и zt , и пусть множество $\{x, y\}$ смежно с W_1 .

Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ нестягиваема, только если одна из вершин z, t несмежна с $G - H - W_1$ или если z и t имеют в $G - H - W_1$ одного общего соседа f и несмежны с остальными вершинами $G - H - W_1$.

6.2. Вершины z, t имеют общего соседа $f \in V(G - H - W_1)$. Вершины z, t, f образуют треугольник, поэтому по теореме 3 среди этих вершин должно быть две вершины степени 3. Это могут быть только z и t , так как f смежна с z, t и хотя бы двумя вершинами в двусвязном графе $G - H$. Третьи ребра из z и t не могут идти в одну и ту же вершину, так как тогда граф G не будет трехсвязен. Следовательно, это два независимых ребра. Одно из третьих ребер обязательно идет в вершину H , а второе – или в вершину H , или в вершину W_1 .

6.2.1. *Оба третьих ребра из z и t идут в H .* Тогда можно считать, что это ребра yz и xt , и вершина x смежна с W_1 (см. Рис. 64). Пятерка $W_1 \cup \{x, t\}$ нестягиваема только если y не смежна ни с одной вершиной $G - H - W_1$ или y смежна там только с f . Однако, если y смежна с f , то y по теореме 3 имеет степень 3 в G , а тогда множество $\{x, f\}$ отделяет $\{y, z, t\}$ от остальных вершин графа G , что противоречит трехсвязности G .

Значит y несмежна с $G - H - W_1$, но тогда y должна быть смежна с W_1 . Аналогично доказанному выше получаем, что x несмежна с $G - H - W_1$. Таким образом, с вершиной W_2 , отличной от f , не смежна ни одна из вершин H , что невозможно.

Рис. 64. Оба третьих ребра идут в H .Рис. 65. Стягиваемая пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$.Рис. 66. Четверка $W_1 \cup \{z\}$ и ее окрестность.

6.2.2. Третье ребро из z или t идет в W_1 . Тогда можно считать, что третьи ребра — zu_i и yt .

Пятерка $W_1 \cup \{z, t\}$ нестягиваема только если одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_1$ или если обе эти вершины смежны ровно с одной вершиной из $G - H - W_1$, причем одной и той же.

Второго случая быть не может. Действительно, если x и y образуют треугольник с какой-то вершиной из $G - H - W_1$, то по теореме 3 они имеют степень 3 в G . Но тогда вершины H могут быть смежны не более чем с четырьмя вершинами $W_1 \cup W_2$. Действительно, все соседи H в множестве $G - H$ исчерпываются набором u_i, f , общий сосед y и x , возможно ещё один сосед x . Других соседей быть не может, так как все вершины H имеют степень 3 в G , и имеются ребра xy, yt, tz , ребра от x и y к их общему соседу, ребра от z и t к их общему соседу f . Однако, вершин $W_1 \cup W_2$ не менее пяти, противоречие.

Значит, одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_1$.

Предположим, что x несмежна с $G - H - W_1$. Тогда x смежна с W_1 , а y смежна со всеми вершинами W_2 , кроме, быть может, f . Пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$ стягиваема (см. Рис. 65).

Следовательно, y несмежна с $G - H - W_1$, а x смежна со всеми вершинами W_2 , кроме, быть может, f .

Если $f \notin W_2$, то множества $W_2 \cup \{x, y\}$ и $W_2 \cup \{x, y, t\}$ стягиваемы и одно из них имеет размер 5. Значит, можно считать, что $f \in W_2$, $f = w_1$.

Тогда стягиваема четверка $W_1 \cup \{z\}$ (см. Рис. 66). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{p, q, w_1, x, y, t\}$. Вершина w_1 не может входить в путь, удовлетворяющий лемме 6, так как имеет степень хотя бы 3 в $G - W_1 - z$. Из пункта 2 леммы 9 получаем, что одним из путей должно быть ребро pq . А тогда по лемме 7 стягиваема шестерка $W_1 \cup \{p, q, z\}$, и, следовательно, стягиваема пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$ (так как z смежна с t и w_1).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если из двух независимых ребер H одно смежно с путем W_i из трёх вершин, то одна из вершин второго ребра несмежна с $G - H - W_i$.*

6.3. Одна из вершин z, t несмежна с $G - H - W_1$. Пусть это будет z .

6.3.1. $N_G(z) \subset H$. То есть z смежна с x, y, t и больше ни с чем. Рассмотрим два случая:

Случай 1. *Вершина t смежна с W_2 .*

Подслучай 1.1. *Вершина t смежна с W_1 .*

По утверждению 3, пятерка $W_1 \cup \{z, t\}$ нестягиваема только в том случае, когда одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_1$. Пусть x несмежна с $G - H - W_1$. В силу трехсвязности G вершина x должна быть смежна с W_1 , иначе множество $\{y, t\}$ отделяет $\{z, x\}$ от остальных вершин графа G . Вершина y должна быть смежна с $G - H - W_1$, иначе в H только t смежна с $G - H - W_1$ и $H_2 \neq H$. Тогда стягиваема четверка $W_1 \cup \{x\}$ и в ее окрестности лежат вершины p, q, y, z, t (см. Рис. 67). По пункту 2 леммы 9 ребро pq является одним из путей для этой четверки. Следовательно, шестерка $W_1 \cup \{x, p, q\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$.

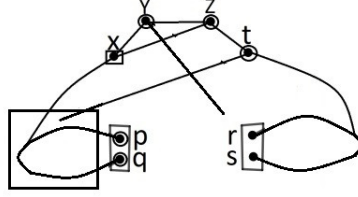


Рис. 67. Стягиваемая четверка $W_1 \cup \{x\}$ и ее окрестность.

Подслучай 1.2. Вершина t несмежна с W_1 .

Пусть $|W_2| = 2$. Так как z и t несмежны с W_1 , одна из вершин x, y смежна хотя бы с двумя вершинами W_1 , пусть x . В этом случае пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ связна (t смежна с W_2 , а z смежна с y и t) и стягиваема.

Значит, $|W_2| = 3$.

Пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ связна, так как z смежна с t , а t смежна с W_2 . По утверждению 3, она нестягиваема только в том случае, когда одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_2$. Пусть это будет y . В силу трехсвязности G вершина y должна быть смежна с W_2 (иначе $\{x, t\}$ отделяет $\{y, z\}$ от остальных вершин графа).

Значит, W_1 смежна только с x . Покажем, что к данному случаю применима лемма 11. Действительно, $|W_1| = 3$ и с вершинами W_1 смежна только x . Вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами H (с y и с z), причем в $G - (W_1 \cup \{p\})$ она смежна или только с y и z , которые несмежны с $\{p, q\}$ (выше мы предположили, что $N_G(z) \subset H$ и y несмежна с $G - H - W_2$), или хотя бы с тремя вершинами. Следовательно, в G есть стягиваемая пятерка.

Случай 2. Вершина t несмежна с W_2 .

Тогда W_2 смежно с множеством $\{x, y\}$.

Подслучай 2.1. Вершина t смежна с W_1 .

Если $|W_2| = 3$, то этот случай получается из подслучая 1.2 заменой W_1 на W_2 .

Значит, $|W_2| = 2$.

По утверждению 3, для ребра zt , смежного с W_1 , и ребра xu , одна из вершин x, u должна быть несмежна с $G - H - W_1$. Пусть это будет u . В силу трехсвязности графа G вершина u должна быть смежна с W_1 (иначе $\{x, t\}$ отделяет $\{u, z\}$ от остальных вершин графа).

Тогда с W_2 смежна только вершина x .

Но $t \in H_2$, вершины y и z несмежны с $G - H - W_1$, поэтому t должна быть смежна с $G - H - W_1$ (но не с W_2). Тогда пятерка $W_2 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 68).

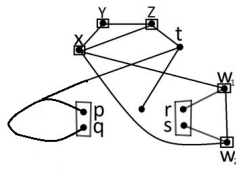


Рис. 68. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, y, z\}$.

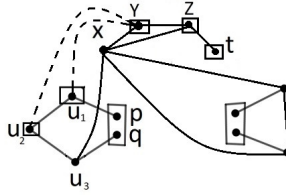


Рис. 69. Стягиваемая пятерка $\{u_1, u_2, y, z, t\}$.

Подслучай 2.2. Вершина t несмежна с W_1 .

В начале раздела 6.3.1 мы предположили, что z смежна с x и y . Кроме того, перед разделом 6.2 мы предположили, что смежны x и y . Следовательно, вершины x, y, z образуют треугольник. По теореме 3 хотя бы две из них имеют степень 3 в G . Одна из этих двух вершин — z , пусть второй будет y .

Если y несмежна с W_1 , то по лемме 11 в графе G есть стягиваемая пятерка. Действительно, с W_1 смежна только x . Вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами H . В $G - (W_1 \cup \{p\})$ она смежна или хотя бы с тремя вершинами, или только с y и z , причем z несмежна с $\{p, q\}$ (мы рассматриваем случай $N_G(z) \subset H$), а y несмежна хотя бы с одной вершиной из множества $\{p, q\}$ (так как $d_G(y) = 3$).

Значит, y смежна с W_1 . В первом абзаце подслучая сказано, что y смежна с x и z и имеет степень 3 в G . Следовательно, y смежна ровно с одной вершиной из множества $W_1 \cup W_2$. По формулировкам рассматриваемого случая и подслучая, вершина t несмежна с множеством $W_1 \cup W_2$. Наконец, по формулировке раздела 6.3.1, $N_G(z) \subset H$.

Следовательно, вершина x смежна с обеими вершинами W_2 и двумя вершинами W_1 , с которыми несмежна y (так как каждая вершина $W_1 \cup W_2$ должна быть смежна с H , но эти вершины не могут быть смежны с $\{y, z, t\}$). Не умаляя общности будем считать, что y смежна с $\{u_1, u_2\}$, тогда пятерка $\{u_1, u_2, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 69).

6.3.2. Вершина z несмежна с $G - H - W_1$, но смежна с W_1 . По утверждению 3, пятерка $W_1 \cup \{z, t\}$ нестягиваема, только если одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_1$. Пусть это будет y . Если y смежна только с вершинами H , мы получим случай, аналогичный уже разобранному (он получается из случая 6.3.1, если поменять местами y и z, x и t). Поэтому можно считать, что y смежна с W_1 .

Вершины x и t в совокупности смежны со всеми вершинами W_2 . Кроме того, x и t имеют хотя бы по одному соседу в $G - H - W_1$, так как $H = H_2$, а y и z несмежны с $G - H - W_1$.

Пятерка $W_1 \cup \{y, z\}$ связна, но нестягиваема. Это возможно, только если вершины x и t несмежны и хотя бы одна из них имеет ровно одного соседа в $G - H - W_1$.

Так как $y \in H_2$, в графе $G - W_1$ между y и $G - H - W_1$ должно быть хотя бы два пути, не пересекающихся по внутренним вершинам. Это возможно, только если y смежна с множеством $\{z, t\}$, так как в начале раздела 6.3.2 мы предположили, что y несмежна с $G - H - W_1$. Напомним, что в рассматриваемом нами случае $zt \in E(G)$, следовательно, граф $G(\{y, z, t\})$ связан. Аналогично $z \in H_2$, $xy \in E(G)$, поэтому граф $G(\{z, x, y\})$ связан.

Случай 1. *Есть хотя бы одно из ребер yt, xz .*

На данный момент на пары (x, y) и (t, z) наложены симметричные условия, поэтому, не умаляя общности можно считать, что есть ребро xz . Четверка $W_1 \cup \{y\}$ стягиваема (см. Рис. 70), так как выше было доказано, что x и t имеют хотя бы по одному соседу в $G - H - W_1$. Это не может быть один единственный общий сосед, так как они в совокупности смежны со всеми вершинами W_2 (в заголовке раздела 6.3.2 и его первом абзаце сказано, что z и y несмежны с $G - H - W_1$). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{p, q, x, z, t\}$, так как y несмежна с $G - H - W_1$. По лемме 9 ребро pq является одним из путей для этой четверки. Тогда стягиваема шестерка $W_1 \cup \{p, q, y\}$, а, следовательно, и пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$, так как в силу связности $G(\{y, z, t\})$

Перед разделом 6.2 было сказано, что x и y смежны. Перед текущим подслучаем было сказано, что x смежна с W_2 . Следовательно, пятерка

$W_2 \cup \{x, y\}$ связна. Она нестягиваема, только если t несмежна с $G - H - W_2$. Но тогда в графе $G - W_2$ любой путь из t в $G - H - W_2$ проходит через z (в рассматриваемом нами случае нет ребра yt , а отсутствие ребра xt доказано в 3 абзаце раздела 6.3.2), что противоречит тому, что $t \in H_1$.

Подслучай 2.2. $|W_2| = 2$.

Вершины y и z несмежны с W_2 (см. заголовок и первый абзац раздела 6.3.2), а x и t — смежны (доказано во втором абзаце случая 2), поэтому можно считать, что t смежна с w_1 , а x смежна с w_2 (возможно, одна из них смежна с обеими вершинами W_2).

Пятерки $W_2 \cup \{x, z, t\}$ и $W_2 \cup \{x, y, t\}$ нестягиваемы, поэтому y и z имеют не более чем по одному соседу в W_1 . Выше было доказано, что они имеют хотя бы по одному соседу в W_1 (см. заголовок и первый абзац раздела 6.3.2). Значит, y и z имеют ровно по одному соседу в W_1 .

Предположим, что одна из вершин x, t (например, x) смежна с одной из крайних вершин W_1 . Тогда можно выбрать эту крайнюю вершину так, чтобы хотя бы одна из оставшихся вершин W_1 была смежна с $H - x$. Пусть выбрана вершина u_1 . Тогда стягиваема пятерка $\{u_2, u_3, y, z, t\}$ (см. Рис. 72).

Значит, x и t несмежны с u_1 и u_3 . Выше было показано, что вершины y и z имеют ровно по одному соседу в W_1 . Поэтому u_1 и u_3 связаны с y и z двумя независимыми ребрами (не умаляя общности, yu_1, zu_3), а множество $\{x, t\}$ смежно с u_2 . Но тогда стягиваема пятерка $W_2 \cup \{u_2, x, t\}$ (см. Рис. 73). Противоречие.

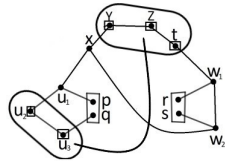


Рис. 72. Стягиваемая пятерка $\{u_2, u_3, y, z, t\}$.

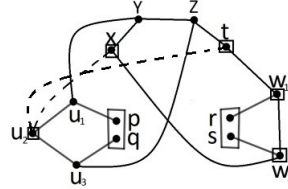


Рис. 73. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{u_2, x, t\}$.

§7. $|W_1| = |W_2| = 2$.

Пусть $W_1 = \{u_1, u_2\}$, причем u_1 смежна с p в $G - H - W_1$, а u_2 — с q . Пусть $W_2 = \{w_1, w_2\}$, причем w_1 смежна с r в $G - H - W_2$, а w_2 — с s .

Замечание 4. В этом случае $|H| + |W_1| + |W_2| = 8$. Мы рассматриваем только графы, в которых вершин хотя бы 13, поэтому $G - H - W_1 - W_2$ не может состоять ровно из двух вершин. Следовательно, если в ходе доказательства мы будем получать, что в графе G есть ребро pq или rs , то из леммы 8 будет следовать, что граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен.

7.1. Нашлась вершина H , которая смежна с обеими вершинами одного из путей. Пусть, например, x смежна с u_1 и u_2 .

Если граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ — связный, то пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема. Поэтому далее мы будем считать, что граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ несвязен.

Случай 1. Две вершины множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образуют связный подграф.

Не умаляя общности, z и t . Тогда y может быть смежна в $G(H)$ только с x и должна иметь хотя бы двух соседей в $G - H - W_2$. Так как $G(H)$ связен, вершина x смежна с z или t . Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 74, граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связан).

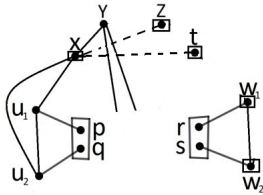


Рис. 74. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$.

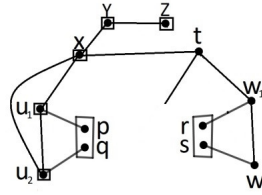


Рис. 75. Стягиваемая пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$.

Случай 2. Только одна вершина множества $\{y, z, t\}$ образует связный подграф с W_2 .

Не умаляя общности, t смежна с w_1 . Тогда вершина t может быть смежна в $G(H)$ только с x и должна иметь хотя бы двух соседей в $G - H$, один из которых лежит в W_2 . Кроме того, граф $G(\{x, y, z\})$ должен быть связан, так как связан граф $G(H)$.

Если два соседа t лежат в $G - H - W_1$, то пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 75). Следовательно, второй сосед t обязан лежать в W_1 , пусть это u_1 . Но заметим, что из трех вершин u_1, x, t , образующих треугольник, только вершина t может иметь степень 3 в G , что противоречит теореме 3.

Случай 3. Ни одна из вершин $\{y, z, t\}$ не смежна с W_2 .

Тогда с W_2 смежна только x . Аналогично получаем, что с W_1 смежна только x .

Ни одна вершина из множества $\{y, z, t\}$ не может иметь степень 1 в $G(H)$, так как в этом случае пятерка из трех остальных вершин H и вершин W_1 стягиваема.

Разберем случаи, каким может быть граф $G(H)$.

Подслучай 3.1. Вершина x имеет степень 1 в $G(H)$.

Пусть x смежна с вершиной y . Тогда вершины z и t , чтобы иметь степень не менее 2 в $G(H)$, должны быть смежны друг с другом и с вершиной y .

Предположим, что хотя бы одна из вершин $\{z, t\}$ смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Например, z . Тогда пятерка $W_1 \cup \{x, y, t\}$ стягиваема.

Следовательно, вершины z и t имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_1 - W_2$, причем эти соседи должны быть различны в силу трехсвязности G (иначе этот их общий сосед и y отделят $\{z, t\}$ от остальных вершин графа). Вершина y может быть смежна с любым числом вершин в $G - H - W_1 - W_2$. Это вторая подозрительная четверка (см. Рис. 76).

Подслучай 3.2. В $G(H)$ все вершины имеют степень 2.

Можно считать, что $G(H)$ – это цикл $xyzt$. Тогда любая вершина из множества $\{y, z, t\}$ должна иметь ровно одного соседа в $G - H - W_1 - W_2$, иначе две другие в объединении с $\{x\} \cup W_1$ дадут стягиваемую пятерку. Кроме того, все три вершины y, z, t не могут иметь одного общего соседа в силу трехсвязности G (иначе общий сосед и x отделят

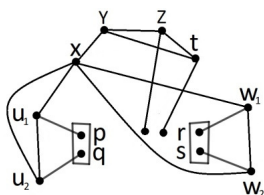


Рис. 76. Вторая подозрительная четверка. Граф $G(H)$ – это треугольник yzt и ребро xy . Вершины z и t имеют степень 3 в G , вершины x и y могут быть смежны еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи z и t в $G - W_1 - W_2$ различны.

$\{y, z, t\}$ от остальных вершин G). Это третья подозрительная четверка (см. Рис. 77).

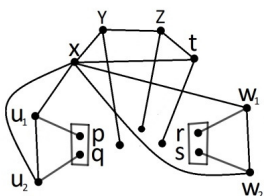


Рис. 77. Третья подозрительная четверка. $G(H)$ – это цикл $xyzt$. Вершины y, z и t имеют степень 3 в G , их соседи в $G - H$ могут совпадать, но не все три сразу, вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$.

Подслучай 3.3. $G(H)$ – это K_4 без одного ребра.

Предположим, что отсутствует ребро из вершины x , например, xz . Тогда среди трех вершин x, y, t , образующих треугольник, две должны иметь степень 3 в G по теореме 3. Это могут быть только y и t . Но тогда множество $\{x, z\}$ отделяет множество $\{y, t\}$ от остальных вершин графа G , что противоречит его трехсвязности.

Следовательно, можно считать, что нет ребра yt . В треугольниках xuz и ztx степень 3 должны иметь вершины y, z и t . Поэтому z несмежна с $G-H$, а из y и t выходит ровно по одному ребру в $G-H-W_1-W_2$, причем эти ребра должны быть независимы, так как граф G трехсвязен. Это четвертая подозрительная четверка (см. Рис. 78).

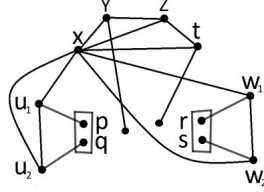


Рис. 78. Четвертая подозрительная четверка. $G(H)$ – это K_4 без ребра yt . Вершины y, z и t имеют степень 3 в G , вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G-H-W_1-W_2$. Соседи y и t в $G-H-W_1-W_2$ различны.

Подслучай 3.4. $G(H)$ – это полный граф.

По теореме 3 вершины y, z и t обязаны иметь степень 3 в G . Тогда вершина x отделяет их от $G-H$, что противоречит трехсвязности G .

Далее мы будем рассматривать случаи, когда в H нет вершин, смежных с обеими вершинами одного из путей.

7.2. Одна из вершин H смежна с одним из путей W_1, W_2 и с $G-H-W_1-W_2$. Пусть x такая вершина, и x смежна с u_1 .

Если граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ связан, то пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема. Будем считать, что граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ несвязен.

Случай, когда с W_2 смежна только x , разобран в разделе 7.1.

Случай 1. Две вершины множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образуют связный подграф.

Пусть это z и t . Тогда y может быть смежна в H только с x и должна иметь не менее двух соседей в $G-H-W_2$. А x смежна с одной из вершин z, t . Легко видеть, что пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 79, граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связан).

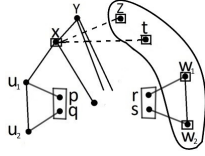


Рис. 79. Стыгиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$.

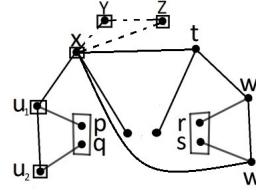


Рис. 80. Стыгиваемая пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$.

Случай 2. Только одна вершина множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образует связный подграф.

Пусть это t , и t смежна с w_1 . Кроме того, t смежна в H только с x . В силу связности $G(H)$, граф $G(\{x, y, z\})$ связен. Мы рассматриваем случай, когда t несмежна с обеими вершинами W_2 , поэтому с w_2 смежна x .

Если t смежна с $G - H - W_1 - W_2$, то пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 80).

Поэтому t должна быть смежна с W_1 . С u_1 вершина t смежна быть не может, так как тогда образуется треугольник u_1xt , который противоречит теореме 3 (только вершина t в нём может иметь степень 3). Следовательно, t смежна с u_2 .

Вершина x смежна с w_2 (было доказано двумя абзацами выше). Тогда можно повторить рассуждения выше, поменяв местами W_1 и W_2 , и получить, что y и z несмежны с W_1 . Если одна из вершин y, z имеет степень 1 в $G(H)$, то три другие вершины H в объединении с W_2 дадут стягиваемую пятерку. Таким образом, y и z смежны друг с другом, смежны с x и имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_1 - W_2$, причем эти соседи различны в силу трехсвязности G . Это пятая подозрительная четверка (см. Рис. 81).

Замечание 5. В найденных нами подозрительных четверках либо одна вершина H смежна со всеми вершинами обоих путей (четверки 2-4), либо две вершины H имеют по одному соседу в каждом из путей (четверка 5). Кроме того, окрестность любой подозрительной четверки содержит не менее 6 вершин.

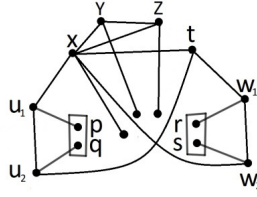


Рис. 81. Пятая подозрительная четверка. Граф $G(H)$ – это треугольник xyz и ребро xt . Вершины y, z и t имеют степень 3 в G , вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи y и z в $G - W_1 - W_2$ различны, но могут совпадать с соседом x .

Замечание 6. Таким образом мы доказали, что если в графе G нет стягиваемой пятерки и стягиваемая четверка H не является ни одной из описанных выше подозрительных четверок, то ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами одной из крайних частей $G - H$ или с вершиной крайней части и вершиной $G - H - W_1 - W_2$.

Цель следующего раздела – доказать, что если в графе G есть стягиваемая четверка, то она имеет вид 2-5 подозрительных четверок.

7.3. Ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами одной из крайних частей $G - H$ или с вершиной крайней части и вершиной $G - H - W_1 - W_2$.

Лемма 12. Если стягиваемая четверка H не является ни одной из описанных выше подозрительных четверок, то в графе $G - H$ ровно две крайние части. В частности, $\{p, q\} \neq \{r, s\}$.

Доказательство. Предположим, что в графе $G - H$ есть еще одна крайняя часть $W_3 = \{v_1, v_2\}$. Так как в множестве H четыре вершины, а в множестве $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ – шесть, найдется вершина H , которая смежна хотя бы с двумя вершинами множества $W_1 \cup W_2 \cup W_3$. Пусть это будет вершина x .

В силу замечания 6, вершина x не может быть смежна с двумя вершинами одной части, поэтому можно считать, что x смежна с W_1 и W_2 . Но тогда, применяя замечание 6 к крайним частям W_1 и W_3 ,

приходим к противоречию – x смежна с вершиной крайней части W_1 и вершиной $G - H - W_1 - W_3$.

Если же в графе $G - H$ ровно две крайние части и $\{p, q\} = \{r, s\}$, то в $G - H$ не может быть других частей, кроме двух крайних. А тогда $v(G) = 10$. Противоречие. $\square$

Рассмотрим дерево разбиения $\text{BT}(G - H)$. В этом дереве ровно две висячие вершины, поэтому оно является простым путем. Выведем из этого факта несколько полезных лемм.

Лемма 13. Пусть стягиваемая четверка H не является ни одной из описанных выше подозрительных четверок. Предположим, что $\{p, q\} \cap \{r, s\} \neq \emptyset$. Тогда выполнено одно из двух утверждений:

(1) вершина, лежащая в пересечении этих множеств, имеет степень больше 3 в $G - H$.

(2) $pq, rs \notin E(G)$, в графе $G - H$ ровно три части, причем та часть, которая не является крайней, – 3-блок.

Доказательство. Пусть $p = r$. По лемме 3, $d_{G-H}(p) \geq 3$. Следовательно, если не выполнено утверждение (1), то $d_{G-H}(p) = 3$.

Если пронумеровать все одиночные множества в порядке следования на пути $\text{BT}(G - H)$, то мы получим, что вершина p входит в первое и последнее одиночное множество. Но тогда p входит во все одиночные множества. Действительно, если существует одиночное множество $R \not\ni p$, то R отделяет $\{p, q\}$ и $\{p, s\}$ в $\text{BT}(G - H)$, а значит и в $G - H$, что, очевидно, не так (есть путь qW_1pW_2s , который может пересекаться с одиночным множеством R только по вершинам множества $\{q, s\}$, так как вершины W_1 и W_2 имеют степень 2 в $G - H$).

Докажем, что $ps \notin E(G)$. Пусть это ребро есть. Тогда $N_G(p) = \{u_1, s, w_1\}$, где $u_1 \in W_1$, $w_1 \in W_2$, так как $d_{G-H}(p) = 3$. Следовательно, p и q несмежны, и множество $\{u_1, s\}$ разделяет $\{p, q\}$, что противоречит тому, что $\{p, q\}$ – одиночное. Аналогично, $pq \notin E(G)$.

Пусть A – часть, смежная с $\{p, s\}$ в $\text{BT}(G - H)$, отличная от $W_2 \cup \{p, s\}$. Так как $v(G) \geq 13$, часть A – некрайняя. Вершина p содержится во всех одиночных множествах $G - H$, значит, вершина s не содержится ни в одном одиночном множестве, кроме $\{p, s\}$ (все одиночные множества состоят из двух вершин и содержат p). Следовательно, s лежит ровно в двух частях $\text{Part}(G - H)$. Так как по лемме 3 $d_{G-H}(s) \geq 3$, в графе $(G - H)(A)$ вершина s имеет степень хотя бы 2, а в графе

$(G - H)'(A)$ – хотя бы 3 (в этом графе добавилось еще ребро ps , которого раньше не было). Получаем, что часть A – 3-блок. Чтобы вершина p имела степень хотя бы 3 в $(G - H)'(A)$ необходимо, чтобы в $G - H$ из p шло ребро во внутреннюю вершину части A .

Аналогичные рассуждения можно повторить и для части B , в которой лежит $\{p, q\}$. Но так как из p ведет всего три ребра, два из которых – в крайние части, A должно совпадать с B . Граф $\text{BT}(G - H)$ – это путь, и мы доказали, что обе его висячие вершины смежны с одной и той же вершиной, соответствующей части A . Следовательно, в $G - H$ ровно три части. Что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 14. Пусть стягиваемая четверка H не является ни одной из описанных выше подозрительных четверок и пусть $pq \notin E(G)$. Тогда хотя бы один из графов $G - H - W_1 - p$ или $G - H - W_1 - q$ двусвязен.

Доказательство. Пусть A – некрайняя часть, смежная с $\{p, q\}$ в $\text{BT}(G - H)$. Перед леммой 13 мы доказали, что граф $\text{BT}(G - H)$ является простым путём. Часть A – некрайняя, следовательно, имеет степень 2 в $\text{BT}(G - H)$. По определению 5 дерева разбиения это означает, что часть A содержит два одиночных множества. Одно из этих множеств – $\{p, q\}$, второе назовём R , $R \neq \{p, q\}$. Не умаляя общности можно считать, что $p \notin R$.

Граф $\text{BT}(G - H)$ является простым путём, вершина $\{p, q\}$ имеет в нём степень 2 (так как висячими вершинами в этом графе являются крайние части). По определению 5 дерева разбиения это означает, что $\{p, q\}$ содержится ровно в двух частях. Эти части – A и $\{p, q\} \cup W_1$ (в них $\{p, q\}$ уже точно лежит). По пункту 3 леммы 1 множество R разделяет $A \cup W_1$ и остальные вершины графа $G - H$. В предыдущем абзаце мы предположили, что $p \notin R$. Следовательно, p смежна в $G - H$ только с вершинами $A \cup W_1$. По лемме 3 $d_{G-H}(p) \geq 3$. В множестве W_1 у p только один сосед, значит в графе $(G - H)(A)$ вершина p имеет степень хотя бы 2. А в графе $(G - H)'(A)$ вершина p имеет степень хотя бы 3, так как в формулировке леммы мы предположили, что $pq \notin E(G)$. Следовательно, часть A – 3-блок. Значит, $(G - H)'(A) - p$ двусвязен.

Напомним, что во втором абзаце леммы мы доказали, что множество R разделяет $A \cup W_1$ и остальные вершины графа $G - H$. Граф $\text{BT}(G - H)$ является простым путём, вершина R имеет в нём степень 2

(так как висячими вершинами в этом графе являются крайние части). По пункту 2 леммы 1 из этого следует, что $|\text{Part}(G; R)| = 2$ и частями являются $B_1 = A \cup W_1$ и $B_2 = G - H - \text{Int}(B_1)$ (см. Рис. 82). Действительно, R не разделяет B_1 и не разделяет B_2 в графе $\text{BT}(G - H)$, а значит, не разделяет и в $G - H$. Но при этом R отделяет B_1 от B_2 .

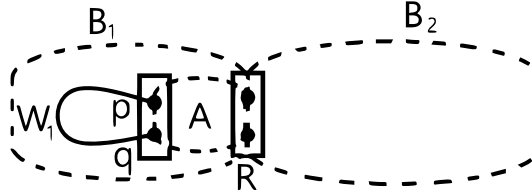


Рис. 82. Части разбиения множеством R .

Докажем, что граф $G - H - W_1 - p$ двусвязен. Для этого проверим, что между произвольными двумя вершинами u и v в нём есть два пути, не пересекающиеся по внутренним вершинам. В предыдущем абзаце мы доказали, что R отделяет B_2 от B_1 в $G - H$. Следовательно, в графе $G - H - W_1 - p$ множество R отделяет $A - p = B_1 - W_1 - p$ от B_2 (так как $G - H - W_1 - p$ является подграфом $G - H$).

Разберем три случая.

1) Вершины u и v обе не лежат в A , тогда $u, v \in \text{Int}(B_2)$. Граф $G - H$ двусвязен, поэтому в нём между u и v было два непересекающихся по внутренним вершинам пути P_1, P_2 . Если оба пути проходят только по B_2 , то эти пути есть и в графе $G - H - W_1 - p$, так как мы не удалили ни одну вершину B_2 . Предположим, что один из путей (не умаляя общности P_1) проходил через $G - H - B_2 = \text{Int}(B_1)$. Будем двигаться от u до v по этому пути. Рассмотрим первую встретившуюся нам вершину из $\text{Int}(B_1)$, назовем эту вершину α . Вершины $\text{Int}(B_1)$ несмежны с вершинами $\text{Int}(B_2)$ по написанному в абзаце замечания 1. Перед вершиной α в пути шла вершина из B_2 (так как α – первая на пути вершина из $\text{Int}(B_1)$), и при этом не из $\text{Int}(B_2)$ (так как α несмежна с этим множеством). Значит, перед α шла вершина из $B_2 - \text{Int}(B_2) = R$. Пойдем по пути дальше и аналогично докажем, что после последней вершины из $\text{Int}(B_1)$ в пути тоже идёт вершина из R . Наш путь – несамопересекающийся, поэтому это разные вершины из

R . Итак, если путь между u и v заходит в $\text{Int}(B_1)$, то он проходит через обе вершины R . Мы доказали, что P_1 проходит через обе вершины R . Пути P_1 и P_2 не пересекаются по внутренним вершинам, поэтому P_2 не проходит через R (вершины R не могут быть концами P_1 и P_2 , так как мы рассматриваем случай $u, v \in \text{Int}(B_2)$). Следовательно, P_2 не проходит через $\text{Int}(B_1)$, то есть лежит целиком в B_2 , а значит и целиком в $G - H - W_1 - p$. Перестроим путь P_1 , чтобы он тоже целиком лежал в $G - H - W_1 - p$. При этом мы будем перестраивать только ту часть пути, которая лежит в $\text{Int}(B_1)$. Путь P_2 не содержит вершины $\text{Int}(B_1)$, поэтому не станет пересекать перестроенный путь по внутренним вершинам.

Граф $(G - H)'(A) - p$ двусвязен и содержит обе вершины R . Значит, между вершинами R в нём есть два пути Q_1 и Q_2 . Один из этих путей (не умаляя общности, Q_1) не проходит по ребру между вершинами R , а тогда он содержит только рёбра графа G . Заменяем участок пути P_1 между вершинами R на путь Q_1 . Этот путь лежит в $(G - H)'(A) - p$ и содержит только рёбра G , следовательно, он лежит в $G - H - W_1 - p$.

Итак, мы нашли два пути между u и v , непересекающихся по внутренним вершинам.

2) $u \in A, v \in \text{Int}(B_2)$. В графе $G - H$ между u и v было два пути P_1 и P_2 . По написанному в абзаце после замечания 1 $\text{Int}(B_1)$ и $\text{Int}(B_2) -$ компоненты связности графа $G - H - R$.

Если $u \in R$ и оба пути не проходят через $\text{Int}(B_1)$, то оба пути есть и в $G - H - W_1 - p$.

Если $u \in R$, но один из путей (не умаляя общности P_1) проходит через $\text{Int}(B_1)$, то аналогично предыдущему пункту можно доказать, что в пути P_1 после последней вершины, лежащей в $\text{Int}(B_1)$, идет вершина из R . Так как путь несамопересекающийся, то эта та вершина, которая не равна u . Тогда путь P_2 не проходит через $\text{Int}(B_1)$ (так как не может тоже проходить через вторую вершину R). И, аналогично предыдущему случаю, мы можем часть пути P_1 , лежащую в $\text{Int}(B_1)$, заменить на путь, который всё ещё лежит в $\text{Int}(B_1)$, но при этом лежит и в $G - H - W_1 - p$.

Наконец, если $u \in \text{Int}(B_1)$, то на обоих путях есть вершины из R (опять же после последней вершины из $\text{Int}(B_1)$). Так как пути несамопересекающиеся, то это разные вершины из R . Части путей P_1 и P_2 от v до вершин R оставим неизменными. А в двусвязном графе $(G - H)'(A) - p$ построим два пути от u до R , которые пересекаются

только по u (это возможно в силу двусвязности). Тогда мы построили два нужных пути между u и v .

3) $u, v \in A$. В силу двусвязности $(G - H)'(A) - p$, в нём есть два нужных пути P_1 и P_2 между u и v . Граф $(G - H)'(A) - p$ лежит в графе $G - H - W_1 - p$ весь, кроме, возможно, ребра между вершинами R . Если P_1 и P_2 не проходят по этому ребру, то мы построили два нужных пути между u и v . Предположим, что P_1 проходит по ребру между вершинами R , и этого ребра нет в G . Мы заменим проход по этому ребру на проход между вершинами R через $\text{Int}(B_2)$. Так как P_2 не содержит вершин $\text{Int}(B_2)$, два новых пути не станут пересекаться по внутренним вершинам. Докажем, что в B_2 есть путь между вершинами R . По написанному в абзаце после замечания 1, $\text{Int}(B_2)$ – компонента связности $G - H - R$, и каждая вершина R смежна с $\text{Int}(B_2)$. Следовательно, из обеих вершин R есть ребра в $\text{Int}(B_2)$, а между вторыми концами этих ребер есть путь в $\text{Int}(B_2)$, так как эта компонента связности. Итого, мы построили два нужных пути между u и v . $\square$

Утверждение 4. *Не более двух вершин H могут быть смежны с $G - H - W_1 - W_2$, причем никакая вершина H не может быть смежна с двумя вершинами этого подграфа.*

Доказательство. Если хотя бы три вершины H смежны с $G - H - W_1 - W_2$, то с W_1 может быть смежна только одна оставшаяся вершина, что противоречит утверждению в заголовке 7.3.

Предположим, что какая-то вершина H смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Пусть это будет z . Из заголовка раздела 7.3 следует, что одна и та же вершина H не может быть смежна с обеими вершинами W_1 . Пусть, не умаляя общности, x смежна с u_1 и y смежна с u_2 . Пятерка $W_1 \cup \{x, y, t\}$ нестягиваема только в том случае, когда t несмежна с $\{x, y\} \cup W_1$ (см. Рис. 83). Но $d_G(t) \geq 3$, в H вершина t смежна только с z , поэтому t должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1$. Вершина t не может быть смежна с двумя вершинами W_2 или одной вершиной W_2 и вершиной $G - H - W_1 - W_2$, поэтому t должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Но пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ связна в силу связности $G(H)$, а, следовательно, стягиваема (см. Рис. 84). $\square$

7.3.1. *Две вершины H смежны с $G - H - W_1 - W_2$. Пусть эти вершины – z и t . Тогда можно считать, что x смежна с u_1 и w_1 , а y –*

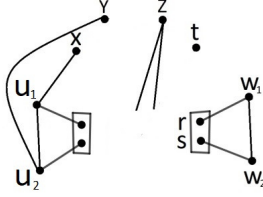


Рис. 83. Пятерка

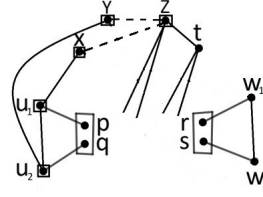
 $W_1 \cup \{x, y, t\}$.

Рис. 84. Стягиваемая

пятерка

 $W_1 \cup \{x, y, z\}$.

с u_2 и w_2 . По утверждению 4 z и t имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_1 - W_2$: пусть f – сосед z , а g – сосед t (возможно, $f = g$).

Случай 1. Из множества $\{z, t\}$ ведут два независимых ребра в множество $\{x, y\}$.

Пусть это ребра yz и xt . Так как $d_G(z) \geq 3$, $d_G(t) \geq 3$, и вершины z , t имеют только по одной смежной в $G - H$, вершина t смежна с $\{y, z\}$, вершина z смежна с $\{x, t\}$.

По лемме 12 $\{p, q\} \neq \{r, s\}$, поэтому, не умаляя общности можно считать, что $r \notin \{p, q\}$.

Если граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен, то пятерка $\{u_2, w_2, y, z, t\}$ стягиваема, так как $p \neq r$ (см. Рис. 85). Значит, граф $G - H - W_1 - W_2$ не двусвязен, в частности, по лемме 8 и замечанию 4, в графе G нет ребер pq и rs .

По лемме 14 один из графов $G - H - W_1 - p$ или $G - H - W_1 - q$ двусвязен. Пусть, не умаляя общности, граф $G - H - W_1 - p$ двусвязен. Рассмотрим пятерку $\{p, u_1, x, t, z\}$ (см. Рис. 86). Она связна, так как z смежна с $\{x, t\}$. При ее удалении остается граф, получаемый из двусвязного графа $G - H - W_1 - p$ добавлением пути qu_2uw_2 . При этом $q \neq w_2$, то есть полученный граф двусвязен. Следовательно, пятерка $\{p, u_1, x, t, z\}$ стягиваема.

Случай 2. Из множества $\{z, t\}$ нельзя провести два независимых ребра в множество $\{y, x\}$.

Так как z и t имеют только по одной смежной вершине вне множества H , они должны иметь хотя бы по два соседа в множестве H .

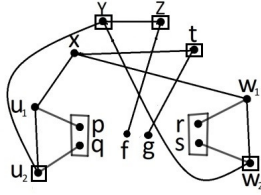


Рис. 85. Стягиваемая пятерка $\{u_2, w_2, y, z, t\}$ (t смежна с $\{y, z\}$).

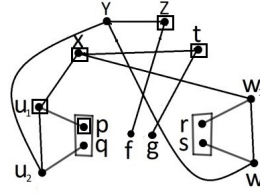


Рис. 86. Стягиваемая пятерка $\{p, u_1, x, t, z\}$ (z смежна с $\{x, t\}$).

Тогда двух независимых ребер в $\{y, x\}$ может не быть, только если z и t смежны друг с другом и смежны с одной и той же вершиной в $\{y, x\}$. Будем считать, что они смежны с y . Тогда x тоже смежна с y в силу связности $G(H)$.

Из трехсвязности G получаем, что $f \neq g$.

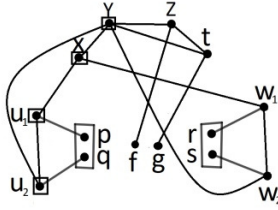


Рис. 87. Стягиваемая четверка $\{u_1, u_2, x, y\}$.

Четверка $H' = \{u_1, u_2, x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 87). Окрестность этой четверки лежит в множестве $\{p, q, z, t, w_1, w_2\}$ (напомним, что по утверждению в заголовке 7.3 вершины x и y несмежны с $G - H - W_1 - W_2$). Вершины z, t, w_1, w_2 имеют степень 2 в $G - H'$, и $zt, w_1w_2 \in E(G)$. Тогда по лемме 6, если z или t входят в какой-то путь, то это только путь zt , аналогично с w_1 и w_2 .

Предположим, что p или q входят в путь для H' . Тогда это может быть только путь pq . По лемме 4 шестерка $\{p, q, u_1, u_2, x, y\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $\{p, q, u_1, u_2, x\}$.

То есть, zt и w_1w_2 – пути для четверки H' . При этом в четверке $\{u_1, u_2, x, y\}$ вершина y смежна с обеими вершинами пути zt , но смежна только с одной вершиной пути w_1w_2 . Такие четверки рассмотрены в разделе 7.1. По замечанию 5 четверка H' не является подозрительной четверкой. Значит, в G есть стягиваемая пятерка.

7.3.2. *Только одна вершина H смежна с $G - H - W_1 - W_2$.* Пусть это вершина z . По утверждению 4 вершина z смежна ровно с одной вершиной $G - H - W_1 - W_2$. Более того, z несмежна с $W_1 \cup W_2$. Следовательно, в H есть хотя бы две вершины, смежные с W_1 , причем хотя бы одна из них смежна к тому же и с W_2 . Пусть x смежна с u_1 и w_1 , а y смежна с u_2 .

Случай 1. *Вершина t несмежна с $W_1 \cup W_2$.*

Тогда w_2 смежна с y . Таким образом, вершины x и y стали равноправны. Вершина z смежна хотя бы с одной из вершин x, y , пусть z смежна с y . Вершина t должна быть смежна хотя бы с тремя вершинами, это могут быть только x, y, z .

Четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема (см. Рис. 88). Ее окрестность содержится в множестве $\{y, z, u_1, r, s\}$. В этой окрестности должны найтись два пути, удовлетворяющие лемме 6.

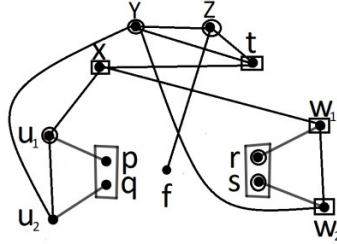


Рис. 88. Четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ и ее окрестность.

Хотя бы одна из вершин y, z должна войти в эти пути, так как из оставшихся трех вершин нельзя составить два пути. Но y и z имеют степень 2 в $G - W_2 - \{x, t\}$ и смежны, поэтому могут входить в путь только друг с другом. Следовательно, одним из путей будет ребро yz .

Второй путь состоит из двух вершин множества $\{u_1, r, s\}$. Тогда вершины этого пути в объединении с $W_2 \cup \{x, t\}$ дадут стягиваемую

шестерку. А значит, вершины этого пути в объединении с $W_2 \cup \{x\}$ дадут стягиваемую пятерку (так как t смежна с y и z).

Случай 2. Вершина t смежна с W_1 или W_2 .

Здесь возможны две ситуации:

1) y смежна с w_2 . Тогда W_1 и W_2 равноправны, x и y равноправны, поэтому можно считать, что t смежна с w_1 . Кроме того, z смежна с $\{x, y\}$, можно считать, что z смежна с y .

2) y несмежна с w_2 , тогда w_2 смежна с t . В этом случае y и t равноправны, z смежна с одной из них, поэтому можно считать, что z смежна с y .

В любой из ситуаций четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема (см. Рис. 89). Ее окрестность содержится в множестве $\{y, z, u_1, u_2, r, s\}$. В этой окрестности должны найтись два пути, удовлетворяющие лемме 6.

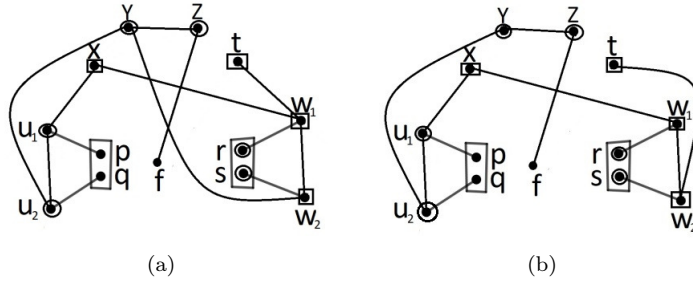


Рис. 89. Стягиваемая четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ в двух возможных ситуациях.

Вершина u_2 не может входить в такой путь, так как имеет степень хотя бы 3 в $G - W_2 - \{x, t\}$.

Одним из путей будет ребро yz , так как опять же одна из вершин y, z должна входить в путь, но входить она может только вместе со второй.

Второй путь состоит из двух вершин множества $\{u_1, r, s\}$. Предположим, что это rs . Тогда $d_{G-H}(r) = d_{G-H}(s) = 3$, $rs \in E(G)$, то есть по лемме 13 $\{p, q\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. Кроме того, по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен. Пятерка $\{u_2, y, z, t, w_2\}$ нестягиваема, значит она несвязна. Это возможно только если t несмежна с множеством

$\{u_2, y, z\}$, так как множество $\{u_2, y, z\}$ связно и w_2 смежна с $\{y, t\}$. Но $d_G(t) \geq 3$, в W_2 вершина t имеет только одну смежную, поэтому t смежна с x и u_1 . По теореме 3 две из трех вершин x, t, u_1 должны иметь степень 3 в G . Это могут быть только x и t . Но тогда $\{x, t\}$ несмежно с $\{y, z\}$, что противоречит связности $G(H)$.

Значит, путями будут yz и u_1r или u_1s . Это возможно только если $p \in \{r, s\}$ и $d_G(p) = 3$. По лемме 4 шестерка $S = W_2 \cup \{x, t, u_1, p\}$ стягиваема (см. рис. 90). Это возможно только если $f \notin \{p, q\}$, так как иначе вершина q будет отделять множество $\{u_2, y, z\}$ от остальных вершин графа $G - S$, что противоречит его двусвязности.

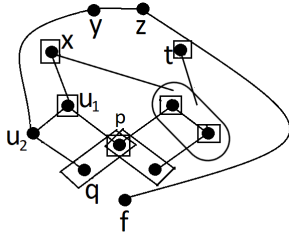


Рис. 90. Стягиваемая шестерка S .

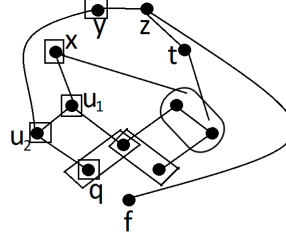


Рис. 91. Стягиваемая пятерка $\{q, u_1, u_2, x, y\}$.

Подслучай 2.1. Вершины z и t смежны.

Мы доказали, что $p \in \{r, s\}$ и $d_G(p) = 3$, поэтому по лемме 13 граф $G - H$ имеет ровно три части, и та из них, которая не крайняя, является 3-блоком. Обозначим через A некрайнюю часть $G - H$. Граф $(G - H)'(A)$ трехсвязен. Следовательно, граф $(G - H)'(A) - q$ двусвязен. Заменим в этом графе ребро rs на путь rw_1w_2s , граф останется двусвязным. Итак, мы доказали, что граф $G - H - W_1 - q$ двусвязен. Если теперь к этому графу добавить путь $fztw_2$ (или $fztw_1$), то он останется двусвязным, так как $f \notin W_2$. Наконец, заметим, что пятерка $\{q, u_1, u_2, x, y\}$ связна, поэтому, в силу всего вышеизложенного, она стягиваема (см. рис. 91).

Подслучай 2.2. Вершины z и t несмежны.

Тогда z смежна с x , так как z смежна ровно в одной вершине $G - H$, но должна иметь степень не менее 3.

Предположим, что вершина y смежна с x . Вспомним, что четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема и путями для нее являются yz и u_1p . Вершина x смежна с y, z, u_1 и не смежна с p (по формулировке раздела 7.3). Четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ не является подозрительной, потому что вершина x смежна с двумя вершинами одного пути и только одной второго, а такой вершины нет ни в одной подозрительной четверке. Следовательно, в G есть стягиваемая пятерка.

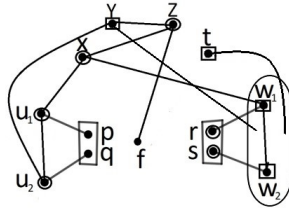


Рис. 92. Четверка $\{y, t, w_1, w_2\}$ и ее окрестность.

Следовательно, y не смежна с x и смежна с t или W_2 . Тогда четверка $\{y, t, w_1, w_2\}$ стягиваема (см. Рис. 92). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{r, s, z, x, u_1, u_2\}$.

Вершина u_1 не может входить в пути для этой четверки, так как имеет степень не менее 3 в $G - \{y, t, w_1, w_2\}$. Тогда и вершина u_2 не входит в пути для этой четверки, так как $q \neq r, q \neq s$ (по лемме 12 $\{p, r\} \neq \{r, s\}$, а $p \in \{r, s\}$).

Значит, путями являются ребра xz и rs (x не смежна с $\{r, s\}$, поэтому в одном пути с z). Тогда стягиваема шестерка $\{y, t, w_1, w_2, r, s\}$. Откуда следует, что стягиваема пятерка $\{t, w_1, w_2, r, s\}$.

7.3.3. Ни одна вершина H не смежна с $G - H - W_1 - W_2$. Разберем несколько случаев.

Случай 1. В H нашлись две смежные вершины, которые смежны с разными вершинами одного пути W_i .

Пусть это вершины x и y , вершина x смежна с u_2 , вершина y смежна с u_1 .

Подслучай 1.1. Четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ стягиваема.

Тогда хотя бы одна из вершин z, t смежна с W_2 . Можно считать, что t смежна с w_1 .

Окрестность четверки $\{z, t, w_1, w_2\}$ содержится в множестве $\{x, y, r, s, u_1, u_2\}$ (см. Рис. 93). Но вершины u_1 и u_2 имеют степень хотя бы 3 в графе $G - \{z, t, w_1, w_2\}$, поэтому не могут входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются xu и rs (x и y смежны, поэтому по лемме 6 входят в один путь). Таким образом, $rs \in E(G)$ и степени r и s в $G - H$ равны 3, а значит, по лемме 13 $\{p, q\} \cap \{r, s\} = \emptyset$.

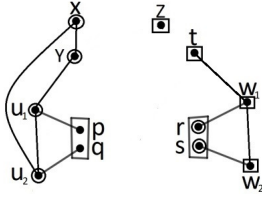


Рис. 93. Стягиваемая четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ и ее окрестность.

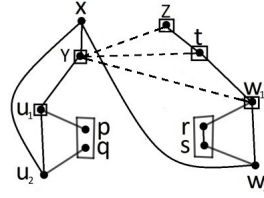


Рис. 94. Пятерка $\{u_1, y, z, t, w_1\}$.

По лемме 4 шестерка $\{z, t, w_1, w_2, r, s\}$ стягиваема. Тогда, если z смежна хотя бы с двумя вершинами множества $\{x, y\} \cup W_1$, то пятерка $\{t, w_1, w_2, r, s\}$ стягиваема, так как она связна, и граф $G - \{t, w_1, w_2, r, s\}$ получается из двусвязного графа $G - \{z, t, w_1, w_2, r, s\}$ добавлением вершины z , смежной хотя бы с двумя его вершинами. Следовательно, z смежна не более чем с одной вершиной множества $\{x, y\} \cup W_1$, а тогда z смежна с t и W_2 . Аналогично получаем, что t смежна не более чем с одной вершиной множества $\{x, y\} \cup W_1$.

Предположим, что w_2 смежна с $\{x, y\}$.

Не умаляя общности, w_2 смежна с x . Тогда вершина y несмежна с w_2 , иначе образуется треугольник xuw_2 , в котором по теореме 3 должно быть две вершины степени 3. Это могут быть только x и y . Но если $d_G(x) = d_G(y) = 3$, то множество $\{x, y\}$ несмежно с множеством $\{z, t\}$, что противоречит связности графа $G(H)$.

Вершина y смежна хотя бы с 3 вершинами в G , поэтому y смежна с множеством $\{z, t, w_1\}$ (y несмежна с u_2 , так как смежна с u_1). В графе G есть ребро rs , поэтому по замечанию 4 граф $G - H - W_1 -$

W_2 двусвязен. Пятерка $\{u_1, y, z, t, w_1\}$ стягиваема, так как $q \neq s$ (см. Рис. 94, в 3 абзаце текущего подслучая мы доказали, что z и t смежны).

Следовательно, w_2 несмежна с $\{x, y\}$.

Вершина t несмежна с w_2 , так как t смежна с w_1 . Тогда вершина z смежна с w_2 . Итак, мы доказали, что вершины z и t смежны друг с другом и смежны с разными вершинами пути W_2 . Следовательно, четверка $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема. Теперь аналогично можно доказать, что w_1 несмежна с $\{x, y\}$. А поменяв местами $\{x, y\}$ с $\{z, t\}$ и W_1 с W_2 , мы получим, что $\{z, t\}$ несмежно с W_1 , в графе G есть ребро pq . Кроме того, $d_G(p) = d_G(q) = d_G(s) = d_G(r) = 3$, так как они входят в пути для четверок $\{u_1, u_2, x, y\}$ и $\{w_1, w_2, z, t\}$.

В предыдущем абзаце мы доказали, что $\{z, t\}$ несмежно с W_1 . Но $d_G(z), d_G(t) \geq 3$, каждая из вершин z, t смежна с множеством $\{x, y\}$. Причем, как мы уже доказали (третий абзац подслучая 1.1), z и t имеют не более чем по одной смежной в этом множестве. Аналогично, каждая из вершин x, y смежна с множеством $\{z, t\}$. Таким образом, можно считать, что $G(H)$ – это цикл $xytztz$ (см. рис 95).

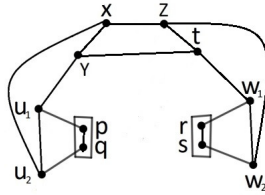


Рис. 95. Граф $G(H)$ в данном случае.

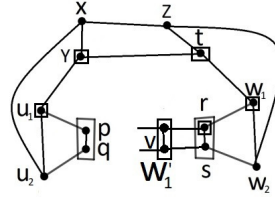


Рис. 96. Стягиваемая пятерка $\{u_1, y, t, w_1, r\}$.

Мы уже доказали, что стягиваема шестерка $\{z, t, w_1, w_2, r, s\}$, а тогда стягиваема четверка $\{w_1, w_2, r, s\}$. Окрестность этой четверки состоит из вершин z, t и окрестности $\{r, s\}$ в графе $G - H - W_2$. Так как z и t смежны, по лемме 6 они могут входить в путь только вместе. Следовательно, в окрестности $\{r, s\}$ лежит один из путей для этой четверки. Назовем этот путь W'_1 ($|W'_1| = 2$, так как $d_G(r) = d_G(s) = 3$). Граф $G - H - W_2$ двусвязен и его дерево разбиения получается из $BT(G - H)$ удалением вершин, соответствующих одиночному множеству $\{r, s\}$ и части $W_2 \cup \{r, s\}$.

Шестерка $S = H \cup W_2$ – нерасширяемая, так как при удалении из графа $G - S$ любой вершины из окрестности S , появляется вершина степени 1. Крайними частями $G - S$ точно являются $W_1 \cup \{p, q\}$ и $W'_1 \cup \{r, s\}$. Так как $v(G) \geq 13$, $v(G - S) \geq 7$, поэтому в $\text{Part}(G - S)$ должна быть ещё хотя бы одна часть. Но ещё одной крайней части в $G - S$ быть не может, так как множество S смежно только с $W_1 \cup \{r, s\}$. Следовательно, $\{p, q\} \neq W'_1$. Не умаляя общности можно считать, что $q \notin W'_1$. По лемме 8 для графа $G - S$ граф $G - S - W_1 - \{r, s\}$ двусвязен (в нем больше двух вершин, так как $v(G) \geq 13$). Тогда пятерка $Q = \{u_1, y, t, w_1, r\}$ стягиваема (см. рис 96). Действительно, она связна и граф $G - Q$ двусвязен, так как получается добавлением к двусвязному графу $G - S - W_1 - \{r, s\}$ пути $qu_2xz w_2sv$, где $v \neq q$ – сосед s из W'_1 .

Следовательно, четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ нестягиваема. Это возможно только если граф $G(\{z, t, w_1, w_2\})$ несвязен (см. Рис. 97).

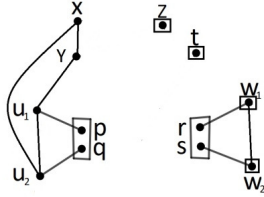


Рис. 97. Четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$.

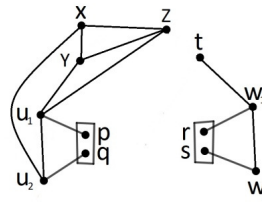


Рис. 98. Соседи вершины z .

Подслучай 1.2. Четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ нестягиваема, но одна из вершин множества $\{z, t\}$ смежна с W_2 .

Пусть вершина t смежна с w_1 . Тогда z несмежна с множеством $\{t\} \cup W_2$. При этом $d_G(z) \geq 3$ и z смежна не более чем с одной вершиной W_1 . Значит, z смежна с x, y и ровно одной вершиной W_1 . Не умаляя общности, z смежна с u_1 (см. Рис. 98).

Вершины u_1, y, z образуют треугольник, следовательно, по теореме 3 две из них должны иметь степень 3 в G . Очевидно, это могут быть только вершины y и z . Но тогда $\{x, u_1\}$ отделяет $\{y, z\}$ от остальных вершин графа G , что противоречит его трехсвязности.

Подслучай 1.3. Четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ нестягиваема, и ни одна из вершин множества $\{z, t\}$ не смежна с W_2 .

Тогда с W_2 смежны только x и y . Можно считать, что y смежна с w_1 , x смежна с w_2 .

Повторяя рассуждения предыдущих подслучаев с заменой W_1 и W_2 местами, можно доказать, что $\{z, t\}$ несмежно с W_1 . Но тогда множество $\{x, y\}$ отделяет $\{z, t\}$ от остальных вершин графа G , что противоречит трехсвязности G .

Далее считаем, что в H нет двух смежных вершин, которые смежны с разными вершинами одного из путей.

Случай 2. В H есть две смежные вершины, которые смежны с одной и той же вершиной одного из путей.

Пусть вершины x и y смежны с u_1 . Вершины x, y, u_1 образуют треугольник, поэтому по теореме 3 две из них должны иметь степень 3 в G . Очевидно, это могут быть только x и y .

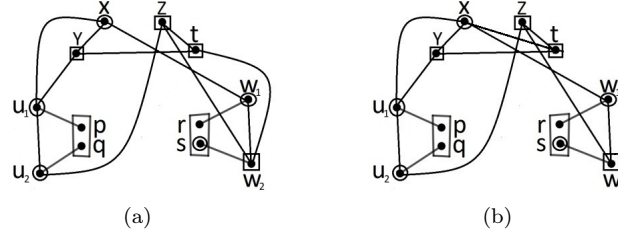
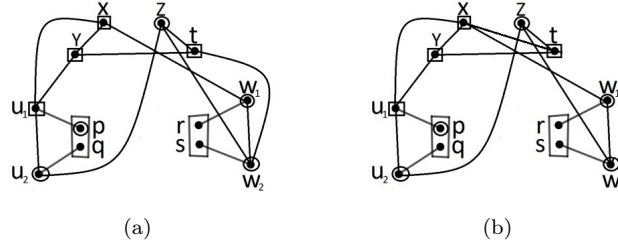
Напомним, что мы разбираем случай, когда две смежные вершины H не могут быть смежны с разными вершинами одного пути. Значит, не умаляя общности можно считать, что u_2 смежна с z . А тогда z несмежна с x и y (иначе опять две смежные вершины смежны с разными вершинами W_1). Но при этом $d_G(z) \geq 3$, поэтому z смежна с t и одной из вершин W_2 , пусть с w_2 .

Так как t смежна с z , t несмежна с w_1 . Вершина w_1 должна быть смежна с H , но несмежна с z и t . Не умаляя общности можно считать, что w_1 смежна с x .

Заметим, что t несмежна с u_1 , так как t смежна с z . И t несмежна с u_2 , так как t смежна с $\{x, y\}$ в силу связности $G(H)$. Следовательно, или t смежна с w_2 , несмежна с x и смежна с y , или t несмежна с w_2 , но смежна с x и y .

В любом случае четверки $\{w_2, z, t, y\}$ и $\{u_1, t, x, y\}$ будут связны и стягиваемы.

Четверка $\{w_2, z, t, y\}$ стягиваема (см. Рис. 99). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{u_1, u_2, x, w_1, s\}$. Вершина u_1 имеет степень 3 в графе $G - \{w_2, z, t, y\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются xw_1 и u_2s (x и w_1 смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Это возможно, только если $q = s$.

Рис. 99. Четверка $\{w_2, z, t, y\}$ и ее окрестность.Рис. 100. Четверка $\{u_1, t, x, y\}$ и ее окрестность.

Четверка $\{u_1, t, x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 100). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{w_1, w_2, z, u_2, p\}$. Вершина w_2 имеет степень 3 в графе $G - \{u_1, t, x, y\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются zu_2 и w_1p (z и u_2 смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Это возможно, только если $p = r$.

Но так как по лемме 12 $\{p, q\} \neq \{r, s\}$, одна из четверок выше будет расширяема.

Далее считаем, что никакие две смежные вершины H не могут быть смежны с вершинами одного и того же пути.

Замечание 7. В дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться тем, что разделяющее двувершинное множество является одиночным, тогда и только тогда, когда его нельзя разделить никаким двувершинным множеством. Это следует из написанного после определения 3.

Случай 3. Одна из вершин H смежна с вершинами обоих путей.

Пусть вершина x смежна с u_1 и w_1 . Тогда x может быть смежна в $G(H)$ только с вершинами, которые несмежны ни с одним из путей. Пусть z – такая вершина. Тогда $d_G(z) = 3$, z смежна с x, y, t .

Заметим, что если еще какая-то вершина H несмежна с $G - H$, то эта вершина и z отделяются двумя оставшимися вершинами H от $G - H$, что противоречит трехсвязности G . Следовательно, вершины y и t смежны с $W_1 \cup W_2$, а тогда они несмежны с x .

Подслучай 3.1. $p \neq r$.

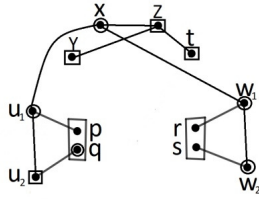


Рис. 101. Четверка $\{u_2, y, z, t\}$ и ее окрестность.

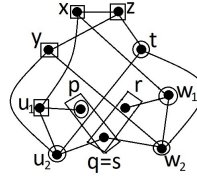


Рис. 102. Стягиваемая четверка $\{u_1, x, y, z\}$.

Четверка $\{u_2, y, z, t\}$ связна, а значит, стягиваема (см. Рис. 101). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{w_1, w_2, x, u_1, q\}$. Вершина w_1 имеет степень 3 в графе $G - \{u_2, y, z, t\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются xu_1 и qw_2 (x и u_1 смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Это возможно, только если $q = s$ и $d_G(q) = 3$ (так как в графе $G - \{u_2, y, z, t\}$ вершина q должна иметь степень 2, и q несмежна с H по заголовку раздела 7.3.3).

Заметим, что четверка $\{u_2, y, z, t\}$ не является подозрительной, так как в ее окрестности лежит не более пяти вершин, а по замечанию 5 в окрестности подозрительной четверки не менее 6 вершин. Следовательно, это четверка, в которой никакие две соседние вершины не смежны с одним и тем же путем. Вершина z смежна с путем xu_1 и смежна с y и t , поэтому y и t несмежны с u_1 . Аналогично, рассматривая четверку $\{w_2, y, z, t\}$, можно получить, что y и t несмежны с w_1 .

Предположим, что одна из вершин y, t , например, y , смежна с обоими путями. Тогда y обязательно смежна с u_2 и w_2 (в предыдущем абзаце мы доказали, что y и t несмежны с u_1 и w_1). Во втором абзаце случая 3 мы доказали, что t смежна с $W_1 \cup W_2$, а тогда t несмежна с x и y (так как смежные вершины H несмежны с одним и тем же путем). Но $d_G(t) \geq 3$, и мы рассматриваем случай, когда вершины H несмежны с $G - H - W_1 - W_2$ и несмежны с двумя вершинами одного пути. Следовательно, t смежна с одной вершиной W_1 и одной вершиной W_2 . В предыдущем абзаце мы доказали, что t несмежна с u_1 и w_1 . Значит, t смежна с u_2 и w_2 . Рассмотрим четверку $\{u_1, x, y, z\}$ (см. Рис. 102). Она стягиваема, её окрестность содержится в множестве $\{u_2, p, t, w_1, w_2\}$. Вершина w_2 имеет степень 3 в $G - \{u_1, x, y, z\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Единственный способ составить два пути из остальных вершин – это u_2t и pw_1 (u_2 и t смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Но чтобы был возможен путь pw_1 , вершина p должна совпадать с r , что не так по формулировке рассматриваемого нами случая.

Значит, каждая из вершин y, t смежна ровно с одной вершиной $W_1 \cup W_2$. Можно считать, что y смежна с u_2 , t смежна с w_2 (так как иначе с одной из этих вершин несмежна ни одна вершина H). Кроме того, $d_G(y) \geq 3$, поэтому y должна быть смежна с t (мы рассматриваем случай, когда ни одна вершина H несмежна с $G - H - W_1 - W_2$).

Напомним, что в первом абзаце текущего подслучая мы доказали, что $q = s$ и $d_G(q) = 3$. Следовательно, по лемме 13 в графе $G - H$ ровно три части и единственная некрайняя из них (назовем её A) является 3-блоком. Граф $(G - H)'(A)$ трехсвязен. Тогда граф $(G - H)'(A) - r$ двусвязен, и если мы в этом графе заменим ребро pq на путь pu_1u_2q , то получим, что граф тоже $G - H - W_2 - r$ двусвязен. Наконец, к этому графу можно добавить путь u_2yzxu_1 и получить, что граф $G - \{w_1, w_2, t, r\}$ двусвязен, то есть четверка $H' = \{w_1, w_2, t, r\}$ стягиваема (см. рис 103). Заметим, что в графе $G - H'$ множество $\{u_1, u_2\}$ разделяющее, так как отделяет $\{x, y, z\}$ от остальных вершин). Кроме того, оно одиночное по замечанию 7, так как u_1 и u_2 смежны, а значит, их нельзя разделить никаким двувершинным множеством. Вершины x, y, z имеют степень 2 в графе $G - H'$, поэтому не могут входить в одиночные множества по лемме 3. Следовательно, для четверки H' множество $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ является крайней частью, так как отделяется одиночным множеством $\{u_1, u_2\}$ и не содержит других одиночных множеств. Значит, один из

путей из леммы 6 состоит из трёх вершин – это путь xzy . Такой случай уже разобран, а значит, в графе G есть стягиваемая пятерка.

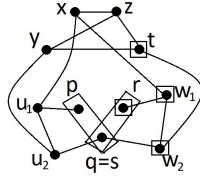


Рис. 103. Стягиваемая четверка $\{w_1, w_2, t, r\}$.

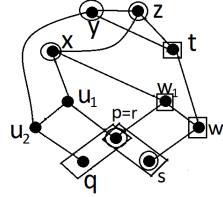


Рис. 104. Тройка $\{t, w_1, w_2\}$ и ее окрестность.

Подслучай 3.2. $p = r$.

Так как $\{p, q\} \neq \{r, s\}$ по лемме 12, $q \neq s$. Пусть, не умаляя общности, u_2 смежна с y . Если y смежна с w_1 или w_2 , то можно повторить рассуждения предыдущего подслучая, поменяв x и y местами ($q \neq r$, $q \neq s$). Следовательно, t смежна с w_2 (иначе w_2 несмежна с H), и, аналогично предыдущему предположению, t несмежна с W_1 . Кроме того, y и t имеют в W_1 и W_2 ровно по одному соседу соответственно и не имеют соседей в $G - H - W_1 - W_2$, так как эти случаи мы разбирали в предыдущих разделах. Но $d_G(y) \geq 3$, значит, y и t смежны. Рассмотрим тройку $T = \{w_1, w_2, t\}$ (см. Рис. 104). Она стягиваема. Окрестность этой тройки содержится в множестве $\{r, s, x, y, z\}$. Вершины x, y, z несмежны с $\{r, s\}$. Поэтому если тройка T нерасширяема, то rs является путем для неё. Но тогда $rs \in E(G)$ и $d_G(r) = 3$ (так как в $G - T$ вершина r должна иметь степень 2, чтобы входить в путь), что противоречит лемме 13. Значит, для T нет путей, удовлетворяющих лемме 6. То есть, тройка T расширяема. Она не может расширяться вершиной y , z или x , так как после их удаления из графа $G - T$, в графе остается вершина степени 1. Также она не может расширяться вершиной r , так как в графе $G - T - r$ есть точка сочленения u_2 . Следовательно, четверка $T' = T \cup \{s\}$ стягиваема. В графе $G - T'$ множество $\{u_1, u_2\}$ разделяющее (так как отделяет $\{x, y, z\}$ от остальных вершин) и одиночное по замечанию 7 (так как u_1 и u_2 смежны,

а значит, их нельзя разделить никаким другим множеством). Вершины x, y, z имеют степень 2 в графе $G - T'$, поэтому не могут входить в одиночные множества по лемме 3. Следовательно, для четверки T' множество $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ является крайней частью, так как отделяется одиночным множеством $\{u_1, u_2\}$ и не содержит других одиночных множеств. Значит, один из путей из леммы 6 состоит из трёх вершин – это путь xzy . Такой случай уже разобран, а значит, в графе G есть стягиваемая пятерка.

Таким образом, ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами $W_1 \cup W_2$.

Случай 4. Ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами $W_1 \cup W_2$.

Тогда можно считать, что x смежна в $G - H$ только с u_2 , y – только с u_1 , одна из вершин z и t смежна только с w_1 , а вторая – только с w_2 . При этом x и y несмежны, так как они смежны с W_1 , z и t несмежны, так как они смежны с W_2 . Так как $z \in H_1$, в графе $G - W_2$ от z должно быть два пути к W_1 , не пересекающихся по внутренним вершинам. Мы рассматриваем случай, когда вершины H несмежны с $G - H - W_1$, z несмежна с W_1 и t , так как она смежна с W_2 . Следовательно, z должна быть смежна и с x , и с y . Аналогично, t смежна и с x , и с y . Итого, в графе $G(H)$ есть ребра xz, yz, xt, yt , а ребер xy и zt нет.

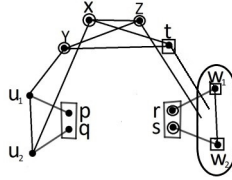


Рис. 105. Тройка $\{w_1, w_2, t\}$ и ее окрестность.

Рассмотрим тройку $T = \{w_1, w_2, t\}$ (см.рис. 105). Она стягиваема, $N_G(T) = \{x, y, z, r, s\}$.

Подслучай 4.1. Тройка T нерасширяема.

Очевидно, $G - T$ не является простым циклом. Значит, в окрестности T должно найтись два пути, удовлетворяющих лемме 6. Вершины

x, y, z несмежны с $\{r, s\}$, следовательно rs является путем для T (так как из вершин множества $\{x, y, z\}$ нельзя составить два пути из хотя бы двух вершин). Следовательно, $\{r, s\}$ – множество внутренних вершин крайней части-цикла и по лемме 4 пятерка $T \cup \{r, s\}$ стягиваема.

Подслучай 4.2. *Тройка T расширяема.*

Она не может расширяться вершиной y, z или x , так как после их удаления из графа $G - T$, в графе остается вершина степени 1. Следовательно, T расширяется вершиной r или s . Пусть, не умаляя общности, она расширяется вершиной s , то есть четверка $T' = T \cup \{s\}$ стягиваема. В графе $G - T'$ множество множество $\{u_1, u_2\}$ разделяющее (так как отделяет $\{x, y, z\}$ от остальных вершин) и одиночное по замечанию 7 (так как u_1 и u_2 смежны, а значит, их нельзя разделить никаким двувершинным множеством). Вершины x, y, z имеют степень 2 в графе $G - T'$, поэтому не могут входить в одиночные множества по лемме 3. Следовательно, для четверки T' множество $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ является крайней частью, так как отделяется одиночным множеством $\{u_1, u_2\}$ и не содержит других одиночных множеств. Значит, один из путей из леммы 6 состоит из трёх вершин – это путь xzy . Такой случай уже разобран, а значит, в графе G есть стягиваемая пятерка.

Таким образом, мы доказали, что если в графе G нет стягиваемой пятерки, то любая его стягиваемая четверка имеет вид второй, третьей, четвертой или пятой подозрительной четверки.

§8. РАЗБЕРЕМ ОСТАВШИЕСЯ ПОДОЗРИТЕЛЬНЫЕ ЧЕТВЕРКИ.

Лемма 15. *Пусть G – трехсвязный граф и H – стягиваемое множество в G такое, что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда для любой вершины $x \in N_G(H)$ существует множество $U \subset N_G(H) \setminus \{x\}$ такое, что множество $H \cup U$ стягиваемо. Причем, если $|U| > 1$, то $(G - H)(U)$ будет являться простым путем.*

Доказательство. Если граф $G - H$ – трехсвязный, то множество H можно расширить любой вершиной из его окрестности. Заметим, что $N_G(H) \neq \{x\}$, так как иначе вершина x отделяла бы H от остальных вершин графа G , что противоречит трехсвязности G . Следовательно, в этом случае такое множество U существует.

Значит, граф $G - H$ не трёхсвязный, но двусвязный. Так как $G - H$ не является простым циклом, дерево разбиения $BT(G - H)$ имеет

более двух вершин, все его висячие вершины соответствуют крайним частям (и таких частей хотя бы две). Рассмотрим крайнюю часть A , во внутренности которой не содержится вершина x (очевидно, хотя бы одна такая крайняя часть есть).

Предположим, что часть A – 3-блок. Тогда существует вершина $v \in \text{Int}(A)$ такая, что v смежна с H , иначе $\text{Bound}(A)$ отделяет A от остальных вершин графа G , что противоречит его трехсвязности. Так как A – 3-блок, граф $G - H - v$ двусвязен, следовательно, множество $H \cup \{v\}$ стягиваемо.

Значит, A – часть-цикл. Тогда $\text{Int}(A) \subset N_G(H)$ и граф $G - H - \text{Int}(A)$ двусвязен. Следовательно, $U = \text{Int}(A)$ удовлетворяет условиям леммы. $\square$

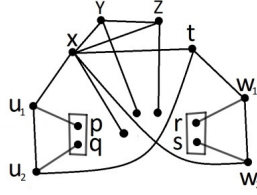


Рис. 106. Пятая подозрительная четверка. Вершины y, z и t имеют степень 3 в G , вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи y и z в $G - W_1 - W_2$ различны, но могут совпадать с соседом x .

8.1. Пятая подозрительная четверка. Тройка $H' = \{t\} \cup W_2$ стягиваема, окрестность этой тройки содержится в множестве $\{x, u_2, r, s\}$.

Граф $G - H'$ не является простым циклом, например, потому что $d_{G-H'}(x) \geq 4$. По лемме 15 тройку H' можно расширить каким-то подмножеством $U \subset N_G(H') \setminus \{x\} = \{u_2, r, s\}$.

Если $|U| = 1$, то $H' \cup U$ – стягиваемая четверка. Граф $G(H' \cup U)$ не содержит циклов, а в индуцированных подграфах на всех подозрительных четверках циклы есть. Следовательно, четверка $H' \cup U$ – неподозрительная, и в G есть стягиваемая пятерка. Если $|U| = 2$, то пятерка $H' \cup U$ стягиваема. Значит, $U = \{u_2, r, s\}$, и $(G - H')(U)$ – простой путь. Заметим, что вершина u_2 не может быть средней вершиной

в этом пути, так как она смежна в $G - H'$ только с u_1 и q , но $u_1 \notin U$. Значит, $rs \in E(G)$.

По лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен, а тогда пятерка $W_1 \cup W_2 \cup \{t\}$ стягиваема. Действительно, эта пятерка связна, а граф $G - (W_1 \cup W_2 \cup \{t\})$ получается из двусвязного графа $G - H - W_1 - W_2$ сначала добавлением вершин y и z , смежных друг с другом и с разными вершинами $G - H - W_1 - W_2$, а затем добавлением вершины x , смежной с y и z .

Таким образом, мы доказали, что если в графе G есть пятая подозрительная четверка, то в графе G есть стягиваемая пятерка. То есть пятая четверка больше не является подозрительной.

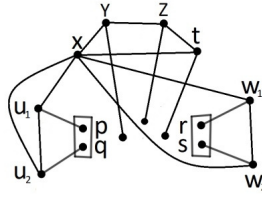


Рис. 107. Третья подозрительная четверка. Вершины y , z и t имеют степень 3 в G , их соседи в $G - H$ могут совпадать, но не все три сразу, вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$.

8.2. Третья подозрительная четверка. Соседи одной из пар вершин y , z или z , t в $G - H$ обязательно различны. Пусть, не умаляя общности, они различны у пары z , t . Четверка $H' = W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема. В третьей и четвертой подозрительных четверках есть цикл длины 4, а в графе $G(H')$ – нет, поэтому H' может быть только второй подозрительной четверкой (см. Рис. 109). Но в этом случае, так как в графе $G(H')$ степень 1 имеет вершина y , именно y должна быть смежна со всеми вершинами путей для H' . Но $d_G(y) = 3$, поэтому H' не может быть второй подозрительной четверкой. Следовательно, в графе G найдется стягиваемая пятерка.

Таким образом, мы доказали, что третья четверка не является подозрительной.

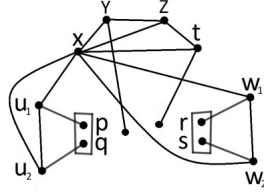


Рис. 108. Четвертая подозрительная четверка. Вершины y , z и t имеют степень 3 в G , вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи y и t в $G - H - W_1 - W_2$ различны.

8.3. Четвертая подозрительная четверка. Тройка $H' = \{y, z, t\}$ стягиваема и граф $G - H'$ — не простой цикл, так как $d_{G-H'}(x) \geq 4$. Значит, по лемме 15 тройку H' можно расширить подмножеством $U \subset N_G(H') \setminus \{x\}$. Если $|U| = 1$, то четверка $H' \cup U$ — стягиваемая. Она не будет подозрительной, так как мы расширяем соседом вершины y или вершины t в графе $G - H$, и эти соседи различны, поэтому индуцированный подграф на данной четверке не будет содержать циклов. Значит, в G будет стягиваемая пятерка. Если же $|U| > 1$, то $|U| = 2$ (так как $|N_G(H') \setminus \{x\}| = 2$) и пятерка $H' \cup U$ стягиваема.

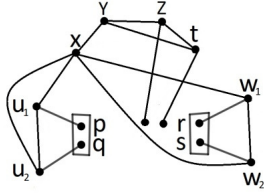


Рис. 109. Вторая подозрительная четверка. Вершины z и t имеют степень 3 в G , вершины x и y могут быть смежны еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи z и t в $G - W_1 - W_2$ различны.

8.4. Вторая подозрительная четверка. Четверка $H' = \{x, y\} \cup W_1$ стягиваема, поэтому должна быть второй подозрительной четверкой.

При этом степень 1 в графе $G(H')$ имеет вершина y , то есть только y может быть смежна с внутренностями крайних частей графа $G - H'$.

Случай 1. Множество $\{r, s\}$ – одиночное в $G - H'$.

Вершины w_1 и w_2 имеют степень 2 в $G - H'$, а значит, по лемме 3 не могут входить в одиночные множества. Следовательно, множество $\{r, s, w_1, w_2\}$ является крайней частью $G - H'$, так как отделяется одиночным множеством $\{r, s\}$, и не содержит других одиночных множеств. Внутренностью этой крайней части является множество $\{w_1, w_2\}$. Но вершина x не может быть смежна с внутренностью крайней части $G - H'$ (это было доказано в предыдущем абзаце).

Случай 2. Множество $\{r, s\}$ не является одиночным в $G - H'$.

Если множество $\{r, s\}$ не является одиночным в $G - H'$, то, по замечанию 7, существует вершина v , разделяющая r и s в графе $G - H' - W_2$ (иначе между r и s существовало бы три пути, не пересекающихся по внутренним вершинам, а тогда их нельзя было бы разделить никакой парой вершин). Обозначим за $U_1, \dots, U_k$ компоненты связности графа $G - H' - W_2 - v$. Причем пусть $r \in U_1$, $s \in U_2$ (см. Рис. 110).

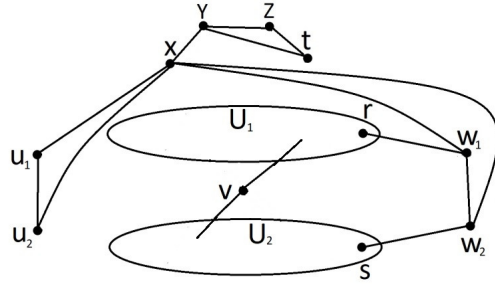


Рис. 110. Компоненты связности графа $G - H' - W_1 - v$.

Так как множество $\{r, s\}$ – одиночное в $G - H$ (оно является границей крайней части, см. пункт 1 замечания 2 и пункт 2 определения 2), его нельзя разделить никакими двумя вершинами. Следовательно, в $G - H$ существуют три независимых пути от r до s (то есть пути, не имеющие общих внутренних вершин). А тогда существуют хотя

бы два независимых пути от r до s в графе $G - H - W_2$. В графе $G - H - W_1 - W_2$ вершина v разделяет r и s (так как этот граф содержится в $G - H' - W_2$), поэтому два независимых пути в этом графе не провести. Значит, один из путей проходит через W_1 , а значит, содержит участок ru_1u_2q . Следовательно, не умаляя общности, $p \in U_1$, $q \in U_2$. Второй путь между r и s должен проходить через v , так как должен перейти из U_1 в U_2 , не проходя при этом по W_1 . Мы получили, что в графе $G(U_1 \cup \{v\})$ есть два независимых пути pS_1r и vS_2r . В графе $G(U_2 \cup \{v\})$ есть путь qS_3v между вершинами q и v , потому что U_2 – компонента связности, отделяемая вершиной v в графе $G - H' - W_2$ и $q \in U_2$ (см. Рис. 111).

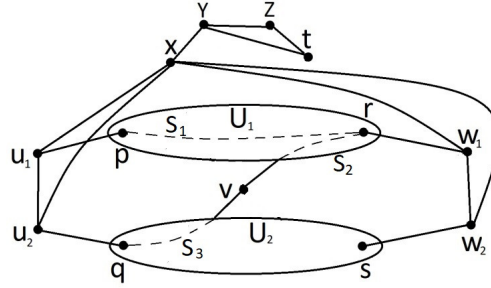


Рис. 111. Пути pS_1r , vS_2r и qS_3v .

Далее заметим, что граф $G - \{s\}$ – двусвязный (так как G – трехсвязный), а множество $\{x, w_1\}$ – одиночное разделяющее в этом графе. Действительно, оно отделяет вершину w_2 от остальных вершин графа, а одиночное так как вершины x и w_1 смежны, поэтому не могут разделяться никаким множеством (см. замечание 7). Докажем, что $\{x, w_1, w_2\}$ – часть разбиения графа $G - \{s\}$. Степень вершины w_2 в графе $G - \{s\}$ равна 2, поэтому w_2 не может входить в одиночные множества графа $G - \{s\}$ (по пункту 2 леммы 3). Уже доказано, что множество $\{x, w_1\}$ не разделяется никаким одиночным множеством. И вершину w_2 нельзя отделить от $\{x, w_1\}$ никаким одиночным множеством, так как w_2 смежна с x и w_1 . При этом множество $\{x, w_1, w_2\}$ отделяется от остального графа одиночным множеством $\{x, w_1\}$. Итак,

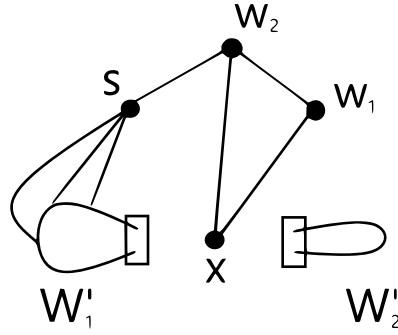
мы проверили, что все условия определения 2 части разбиения выполнены. Очевидно, часть является крайней, так как содержит только одно одиночное множество (то есть её степень в $BT(G - \{s\})$ равна 1). И, по пункту 2 определения 2, $\{w_2\}$ – внутренность крайней части $\{x, w_1, w_2\}$ двусвязного графа $G - \{s\}$. Следовательно, по лемме 5, граф $G - \{s, w_2\}$ – двусвязный.

В двусвязном графе $G - \{s, w_2\}$ между вершинами x и r есть три независимых пути: xw_1r , xu_1pS_1r и $xu_2qS_3vS_2r$. Следовательно, множество $\{x, r\}$ – одиночное в графе $G - \{s, w_2\}$, отделяющее w_1 от остальных вершин графа. Аналогично рассуждениям в предыдущем абзаце, $\{w_1\}$ – внутренность крайней части $\{x, r, w_1\}$ двусвязного графа $G - \{s, w_2\}$. Следовательно, граф $G - \{s, w_2, w_1\}$ двусвязен по лемме 5.

Итак, тройка $T = \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема. Окрестность этой тройки содержится в множестве $\{r, x\} \cup (N_G(s) \setminus \{w_2\})$. Предположим, что эта тройка расширяема. Вершины из множества $\{r\} \cup (N_G(s) \setminus \{w_2\})$ имеют ровно по одному соседу в тройке (потому что в нашем случае ребра rs точно нет), поэтому если они расширяют тройку, то образуется четверка, не содержащая циклов, то есть не вторая подозрительная четверка, а, значит, в G найдется стягиваемая пятерка. То есть тройку должна расширять вершина x . В графе $G(\{s, w_1, w_2, x\})$ степень 1 имеет вершина s и смежна с s вершина w_2 , а только такие две вершины второй подозрительной четверки могут иметь степень больше 3 в G . Но $d_G(x) > 3$, следовательно, четверка $\{s, w_1, w_2, x\}$ не является подозрительной. А значит, в G есть стягиваемая пятерка.

Таким образом, тройка T стягиваема и нерасширяема. По пункту 2 леммы 4 в графе $G - T$ найдутся хотя бы две крайние части, причем эти части являются циклами длины хотя бы 4. Путь W'_1 и W'_2 – внутренности этих крайних частей. По пункту 1 леммы 4 каждая вершина $W'_1 \cup W'_2$ смежна с T . По пункту 2 леммы 2 каждая вершина $W'_1 \cup W'_2$ имеет степень 2 в графе $G - T$. Вершина x имеет степень хотя бы 3 в графе $G - T$, поэтому не может входить в $W'_1 \cup W'_2$. То есть все вершины хотя бы одного из множеств W'_1 и W'_2 смежны с s и несмежны с множеством $\{w_1, w_2\}$. Пусть это множество – W'_1 (см. Рис. 112).

Если $|W'_1| = 2$, то по пункту 3 леммы 4 пятерка $W'_1 \cup \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема.

Рис. 112. Стягиваемая тройка $\{s, w_1, w_2\}$.

Если $|W'_1| = 3$, то по пункту 3 леммы 4 шестерка $W'_1 \cup \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $W'_1 \cup \{s, w_2\}$, так как w_1 смежна с вершинами x и r , не лежащими в этой пятерке.

Если $|W'_1| = 4$, то по пункту 3 леммы 4 семерка $W'_1 \cup \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $W'_1 \cup \{s\}$, так как w_1 смежна с вершинами x и r , не лежащими в этой пятерке, а w_2 смежна с w_1 и x .

Пусть $|W'_1| \geq 5$. Четырьмя абзацами выше было доказано, что вершина x не входит в W'_1 . Граф $G - T - W'_1$ — двусвязный по пункту 3 леммы 4. Пусть $\{\alpha, \beta\}$ — граница крайней части с внутренностью W'_1 в $G - T$. Не умаляя общности, $\alpha \neq x$. Пусть P — подпуть в $G(W'_1)$ такой, что один из его концов смежен с α , и $|W'_1 \setminus V(P)| = 4$. Тогда мы можем к двусвязному графу $G - T - W'_1$ добавить путь $\alpha P s w_2 w_1 x$ и получить двусвязный граф ($\alpha \neq x$). Следовательно, $W'_1 \setminus V(P)$ — стягиваемая четверка. Причем подграф, индуцированный на вершинах этой четверки, является простым путем, то есть не содержит цикла. Значит, эта четверка — неподозрительная, и в графе G найдется стягиваемая пятерка.

Мы доказали, что все подозрительные четверки на самом деле неподозрительные, а, значит, в любом трехсвязном графе G с $v(G) \geq 13$ найдется стягиваемая пятерка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Kriesell, *Contractible subgraphs in 3-connected graphs*. — J. Comb. Theory, Ser. B, **80** (2000), 32–48.
2. M. Kriesell, *On small contractible subgraphs in 3-connected graphs of small average degree* / — Math. Semin. der Universitat Hamburg, Bundesstrabe 55, D-20146 Hamburg.
3. W. McCuaig, K. Ota, *Contractible triples in 3-connected graphs*. — J. Comb. Theory, Ser. B, **60** (1994), 308–314.
4. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
5. R. Halin., *A Theorem on n -connected graphs*. — J. Combin. Theory **7**, No. 2 (1969), 150–154.
6. Н. Ю. Власова. *О стягиваемых 5-вершинных подграфах трёхсвязного графа* Записки научных семинаров ПОМИ, **475**, 2018, стр. 22–40.
7. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k -связного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **266** (2000), 76–106.
8. Д. В. Карпов, *Блоки в k -связных графах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
9. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k -связном графе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
10. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
11. Д. В. Карпов, *Минимальные двусвязные графы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 106–127.
12. D. V. Karpov, *Large contractible subgraphs of a 3-connected graph*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, to appear.

Vlasova N. Yu. Every 3-connected graph on at least 13 vertices has a contractible set on 5 vertices.

A subset H of the set of vertices of a 3-connected finite graph G is called *contractible* if $G(H)$ is connected and $G - H$ is 2-connected. We prove that every 3-connected graph on at least 13 vertices has a contractible set on 5 vertices. And there is a 3-connected graph on 12 vertices that does not contain a contractible set on 5 vertices.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: evropa2100@mail.ru

Поступило 26 сентября 2022 г.