

В. Б. Титов

ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задача трех тел, сформулированная в современной постановке И. Ньютоном, на протяжении нескольких веков служит объектом исследования многих математиков. Если решение задачи двух тел было известно еще И. Кеплеру, то задача трех тел остается нерешенной. Брунсом и Пуанкаре доказано, что 10 классических интегралов трех тел являются единственными независимыми интегралами задачи. И хотя К. Сундман построил в случае ненулевого углового момента J общее решение в виде сходящихся рядов, эти ряды мало что дают для изучения решения: их чрезвычайно медленная сходимость не позволяет ни изучить свойства решений, ни получить эти решения в приемлемом виде: например, чтобы получить координаты известного частного решения, полученного еще Лагранжем, где конфигурация трех тел образует равносторонний треугольник, необходимо взять 10^{80000} слагаемых ряда, что вряд ли когда-нибудь станет возможным.

Поэтому важное значение имеет качественное исследование задачи трех тел, в частности, исследование областей возможного движения задачи. В ограниченной круговой задаче трех тел поверхность нулевой скорости, ограничивающая множество возможных движений \mathcal{D} тела нулевой массы, была введена Дж. Хиллом в 1878 г. Геометрически поверхность Хилла представляет собой проекцию 5-мерной поверхности уровня интеграла Якоби на трехмерное конфигурационное пространство. Свойства \mathcal{S} подробно изучены [6, 7]. Известно несколько обобщений этого понятия [3, 4]. Области возможного движения в общей задаче трех тел в декартовой системе координат исследовались В. Г. Голубевым в [1].

Для построения области возможного движения используются интегралы движения. В задаче двух тел, например, интеграл энергии

$$T - U = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{2} - \frac{1}{r} = h$$

Ключевые слова: общая задача трех тел, Области возможного движения.

дает

$$\frac{1}{r} + h \geq 0, \text{ или } r \leq 2a = -\frac{1}{h}, \text{ если } h < 0,$$

постоянную всемирного тяготения полагаем равной единицы, это всегда можно сделать подходящим выбором единиц. В случае $h \geq 0$ область возможного движения совпадает со всем конфигурационным пространством \mathbb{R}^2 .

Область возможного движения уменьшится, если мы включим в рассмотрение и интеграл площадей:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J} = r^2 \dot{\psi}$$

с учетом последнего интеграла интеграл энергии можно записать в виде

$$T - U = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{r} = h$$

При $h < 0$ получаем

$$\frac{1}{r} + h - \frac{J^2}{r^2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad 0 < r_1 \leq r \leq r_2$$

Таким образом, если мы рассматриваем только интеграл энергии при $h < 0$, то область возможного движения это круг радиуса $2a$, если, кроме этого, мы фиксируем еще значение интеграла площадей J , то область возможного движения это кольцо, движение возможно между его границами, сами границы тоже включаются в область возможного движения, и эта связная область компактна.

В круговой ограниченной задаче трех тел области возможного движения определяются интегралом Якоби:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - (x^2 + y^2) - 2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) + C = 0,$$

x, y, z – координаты точки пренебрежимо малой массы во вращающейся системе координат, два тела массы m_1 и m_2 в этой системе координат неподвижны, начало координат в барицентре, а единицы массы, длины и времени выбраны так, что угловая скорость вращения равна единице, сумма масс $m_1 + m_2 = 1$ и расстояние между m_1 и m_2 равно единице. Поверхность нулевой скорости тогда определяется уравнением

$$(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) = C$$

и служит границей области возможного движения. Второго интеграла в этой задаче нет, но интеграл Якоби позволяет описать качественное движение тела нулевой массы.

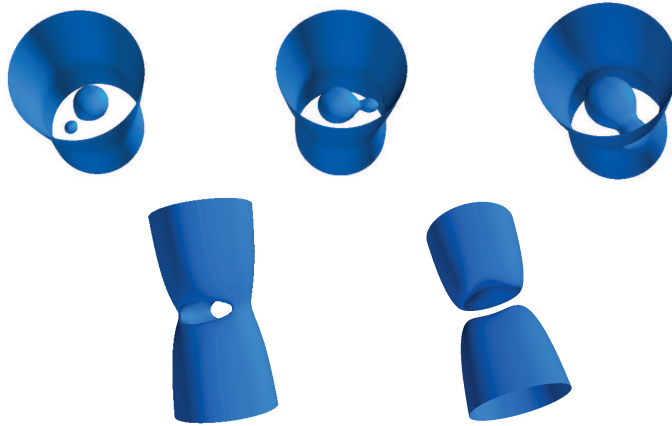


Рис. 1. Пять типов поверхности Хилла в круговой ограниченной задаче трех тел

На рис. 1 приведены пять топологически разных типов такой поверхности в зависимости от величины постоянной Якоби C . Первое изображение, слева сверху, соответствует достаточно большому значению C . Две квазисферы вокруг тел m_1 и m_2 компактны, движение возможно либо внутри этих квазисфер (и в этом случае тело нулевой массы всегда будет находиться там, говорят движение устойчиво по Хиллу), либо вне квазицилиндра. При уменьшении C , изображение в центре сверху, две квазисферы смыкаются (в точке Лагранжа L_1), образуя гантелеобразную поверхность, эта поверхность компактна, по-прежнему, находясь внутри нее, тело нулевой массы будет находиться там всегда, но переход из окрестности одного тела конечной массы в окрестность другого возможен. Если мы будем дальше уменьшать C , то гантелеобразная поверхность смыкается с квазицилиндром (в точке Лагранжа L_2), образуя единую поверхность нулевой скорости. Эта поверхность гомеоморфна цилиндру. При дальнейшем уменьшении C , гантелеобразная поверхность смыкается с квазицилиндром в

точке Лагранжа L_3 , образуя квазицилиндр с дыркой, движение возможно только вне этой поверхности. Наконец, при дальнейшем уменьшении C квазицилиндр разбивается на два некомпактных куска. При $C < C_*$ движение возможно во всем конфигурационном пространстве.

Замечание 1. В задаче двух тел поверхность нулевой скорости строится в прямоугольной системе координат с центром в (большем) теле, в круговой ограниченной задаче трех тел – во вращающейся системе координат; именно в этой системе координат поверхность Хилла это поверхность нулевой скорости.

Замечание 2. Наличие интеграла площадей существенно сужает область возможного движения.

§2. СИММЕТРИЯ МАСШТАБА

В задаче N тел имеет место симметрия масштаба: если функции $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, представляют решение задачи N тел, то решением задачи также является и

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_i(t) &= \lambda \mathbf{r}_i(\lambda^{-3/2}t) \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_i(t) &= \lambda^{-1/2} \mathbf{v}_i(\lambda^{-3/2}t)\end{aligned}\tag{1}$$

и для этого решения справедливы соотношения

$$\begin{aligned}h' &= \lambda^{-1}h \\ J' &= \lambda^{1/2}J, \\ I' &= \lambda^2I,\end{aligned}$$

здесь h – постоянная энергии, J – угловой момент, I – момент инерции, λ – любое положительное вещественное число. Это свойство является простым следствием однородности потенциала U , по сути эта симметрия, открытая еще Кеплером, справедлива в случае любого числа тел. Таким образом, имея решение для h , мы получаем решение для любого значения постоянной энергии того же знака, что позволяет нам ограничиться лишь тремя значениями постоянной энергии, например, $h = -1/2, 0, 1/2$.

§3. ПРОСТРАНСТВО ФОРМ

Размерность конфигурационного пространства задачи трех тел равна девяти. Мы будем рассматривать плоскую задачу, ее размерность

равна шести. Чтобы упростить задачу, и еще уменьшить ее размерность, факторизуем конфигурационное пространство по переносам и поворотам. Такая процедура описана, например, в [5].

Начнем с переносов. Нам нужно построить \mathbb{R}^6/\mathbb{T} . Это можно сделать разными способами: используя, например, барицентрическую систему или рассматривая в качестве независимых переменных взаимные расстояния (в пространственном случае потребовались бы еще две переменные, отвечающие за ориентацию плоскости трех тел) или воспользовавшись хорошо известными координатами Якоби:

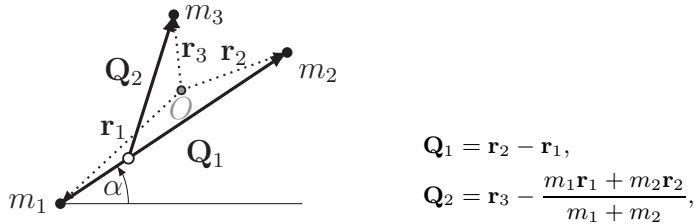


Рис. 2. Координаты Якоби и угол α (отсчитывается от фиксированной в инерциальном пространстве прямой)

Их трех векторов \mathbf{r}_i (пунктирные линии) мы получили два: \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 , подразумевая $\mathbf{Q}_3 = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0$, и по известным \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 мы легко можем восстановить \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, 3$.

В пространстве координат Якоби мы можем получить взаимные расстояния r_{ij} , кинетическую энергию T , лагранжиан L и угловой момент J :

$$r_{12} = |\mathbf{Q}_1|,$$

$$r_{13} = \left| \mathbf{Q}_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{Q}_1 \right|,$$

$$r_{23} = \left| \mathbf{Q}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{Q}_1 \right|.$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3^2) = \frac{1}{2}(\mu_1\dot{\mathbf{Q}}_1^2 + \mu_2\dot{\mathbf{Q}}_2^2), \\
L &= T(\dot{\mathbf{Q}}_1, \dot{\mathbf{Q}}_2) + U(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2), \\
J &= \mu_1\mathbf{Q}_1 \times \dot{\mathbf{Q}}_1 + \mu_2\mathbf{Q}_2 \times \dot{\mathbf{Q}}_2.
\end{aligned}$$

Здесь $\mu_1 = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, $\mu_2 = m_3(m_1 + m_2)/(m_1 + m_2 + m_3)$.

Теперь рассмотрим фактор-пространство по поворотам. Сфера в пространстве координат Якоби $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ есть \mathbb{S}^3 , а, избавившись от поворотов, получаем \mathbb{S}^2 , таким образом, мы естественно приходим к классическому преобразованию Хопфа ($\mathcal{S}^1 \hookrightarrow \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$).

Будем рассматривать $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ как точки комплексного пространства, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{2}\mu_1|\mathbf{Q}_1|^2 - \frac{1}{2}\mu_2|\mathbf{Q}_2|^2, \\
\xi_2 + i\xi_3 &= \sqrt{\mu_1\mu_2}\mathbf{Q}_1\bar{\mathbf{Q}}_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{X}$ — 3-мерное пространство. Каждый элемент пространства \mathbb{X} представляет собой класс ориентируемых конгруэнтных треугольников, будем называть его *пространством форм*. В этом пространстве длина вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) равна моменту инерции:

$$\begin{aligned}
I &= m_1|\mathbf{r}_1|^2 + m_2|\mathbf{r}_2|^2 + m_3|\mathbf{r}_3|^2 = m_1m_2r_{12}^2 + m_1m_3r_{13}^2 + m_2m_3r_{23}^2 \\
&= \mu_1|\mathbf{Q}_1|^2 + \mu_2|\mathbf{Q}_2|^2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.
\end{aligned}$$

Сфера заданного радиуса является множеством подобных треугольников, удобнее взять радиус, равным $1/2$, мы будем называть эту сферу *сферой форм*. Как получить $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$, если известны ξ_1, ξ_2, ξ_3 ? Введем угол α (рис. 2), равный углу между вектором \mathbf{Q}_1 и осью абсцисс, тогда $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ можно выразить через ξ_1, ξ_2, ξ_3 и этот угол α , кинетическая энергия T и угловой момент J запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{4J^2 + \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}, \\
J &= \mu_1\mathbf{Q}_1 \times \dot{\mathbf{Q}}_1 + \mu_2\mathbf{Q}_2 \times \dot{\mathbf{Q}}_2, \\
&= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\xi_2 \frac{d\xi_3}{dt} - \xi_3 \frac{d\xi_2}{dt}}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, ни кинетическая энергия T , ни потенциальная функция U , не зависят от угла α и угловой момент J сопряжен с углом λ и, зная

ξ_1, ξ_2, ξ_3 , можно получить угол λ из квадратуры:

$$\lambda(t) = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial J} d\tau = \int_0^t \frac{J - \frac{\xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_1}}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} d\tau,$$

здесь R — соответствующая функция Раусса.

§4. ОБЛАСТЬ ВОЗМОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Гамильтониан нашей системы в пространстве \mathbb{X} записывается в виде:

$$H = T - U = \frac{4J^2 + \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} - U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = h \quad (4)$$

Поверхность нулевой скорости ($\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 = 0$) отделяет область возможного движения от области, где движение невозможно. Поверхность нулевой скорости, то есть поверхность, где скорость изменения конфигурации треугольника равна нулю, определяется уравнением

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + h - \frac{J^2}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} = 0. \quad (5)$$

Очевидно, неравенство Сундмана

$$\frac{J^2}{2I} - U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - h \leq 0,$$

просто следует из уравнения (4), и, наоборот, уравнение для поверхности нулевых скоростей в пространстве форм можно получить непосредственно из неравенства Сундмана. Заметим, что приведенное неравенство может выполняться и при $h > 0$.

В случае $J = 0$ эта поверхность выглядит так (массы тел здесь равны): Три ветви поверхности соответствуют конфигурациям, в которых два тела близки, а третье значительно дальше, а центральные лучи этих ветвей соответствуют двойным соударениям. Поверхность (5) симметрична относительно плоскости (ξ_1, ξ_2) .

Поверхности нулевой скорости и области возможного движения, ограниченные этими поверхностями, строятся в пространстве $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \mathbb{X}$, в этом же пространстве строятся и орбиты, которые можно отобразить в орбиты задачи трех тел в классическом инерциальном пространстве.

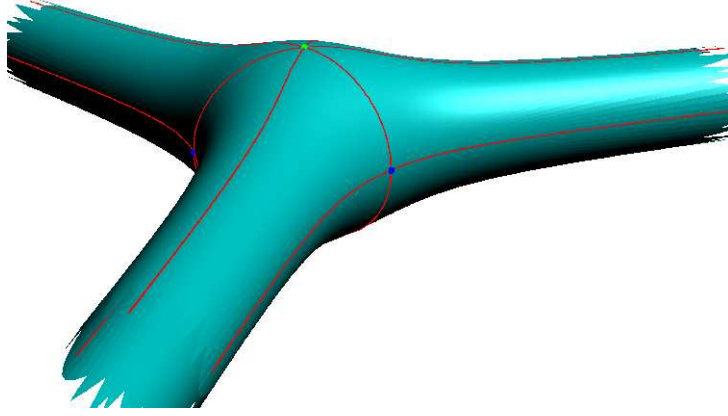


Рис. 3. Поверхность нулевой скорости при $J = 0$.

Получим выражение для потенциальной функции U через ξ_1, ξ_2, ξ_3 , для этого выразим через эти координаты взаимные расстояния r_{ij} :

$$\begin{aligned}
 r_{12}^2 &= \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2} (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1) \\
 r_{13}^2 &= \frac{m_1 + m_3}{2m_1m_3} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\
 &\quad + \frac{m_2m_3 - m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{2m_1m_3(m_1 + m_2)} \xi_1 + \frac{\sqrt{m_1m_2m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{m_1m_3(m_1 + m_2)} \xi_2 \quad (6) \\
 r_{23}^2 &= \frac{m_2 + m_3}{2m_2m_3} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\
 &\quad + \frac{m_1m_3 - m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{2m_2m_3(m_1 + m_2)} \xi_1 - \frac{\sqrt{m_1m_2m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{m_2m_3(m_1 + m_2)} \xi_2 \\
 U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= \sum_{i,j=1, i < j}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} W(\varphi, \theta), \quad (7)
 \end{aligned}$$

здесь единицы выбраны так, что постоянная всемирного тяготения равняется единице и $m_1 + m_2 + m_3 = 3$; $W(\varphi, \theta) > 0$ – функция, зависящая только от угловых сферических координат φ, θ и масс. Таким образом, в пространстве форм силовая функция разделяется на два

множителя: первый зависит только от размера треугольника и представляет собой корень из момента инерции $\sqrt{I} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, второй зависит только от формы треугольника, определяемой углами φ и θ , и массами тел. Пространство форм это конус над S^2 .

Симметрия масштаба позволяет нам зафиксировать значение постоянной энергии, например, $h = -1/2$ для отрицательной, $h = 0$ для нулевой и $h = 1/2$ для положительной энергии. Фиксируем $h = -1/2$, с этим значением h исследуем поведение области возможного движения (поверхности нулевой скорости) при изменяющемся значении постоянной углового момента J . При $J = 0$ поверхность приведена на рис. 3.

Рассмотрим сначала случай $m_1 = m_2 = m_3 (= 1)$. В этом случае лучи двойного соударения в пространстве ξ_1, ξ_2, ξ_3 отвечают трем лучам: $\lambda(-1, 0, 0)^T$, $\lambda(1/2, -\sqrt{3}/2, 0)^T$, $\lambda(1/2, \sqrt{3}/2, 0)^T$, а коллинеарные конфигурации Эйлера – лучам

$$\lambda(1, 0, 0)^T, \quad \lambda(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)^T, \quad \lambda(-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)^T;$$

равносторонние конфигурации Лагранжа отвечают в случае равных масс полюсам $\lambda(0, 0, \pm 1)^T$ (здесь $\lambda \in \mathbb{R}^+$ – произвольное число). Очевидно, только в случае равенства масс конфигурации Лагранжа располагаются в полюсах сферы форм. В этом случае поверхность нулевой скорости симметрична относительно поворотов на $2k\pi/3$.

Рассмотрим точки поверхности нулевой скорости в положительном направлении оси аппликат: $(0, 0, \xi_3)$. При $J = 0$ из (5) имеем

$$U(0, 0, \xi_3) = 3/\sqrt{\xi_3} = 1/2 \quad \rightarrow \quad \xi_3 = 36.$$

Таким образом, область возможного движения включает отрезок $[-36, 36]$ оси аппликат. Из этого отрезка можно исключить начало координат, если мы не рассматриваем тройное соударения. Заметим, что поверхность нулевой скорости в начале координат не имеет физического смысла: нельзя говорить о трех телах, находящихся в одной точке и имеющих нулевую скорость, по сути это одна точка с массой, равной сумме масс трех тел.

Теперь рассмотрим точки поверхности в положительном направлении оси абсцисс (при $\xi_1 < 0$ весь луч $(\xi_1, 0, 0)$ входит в область возможного движения): Из уравнения (5) имеем

$$U(\xi_1, 0, 0) = 1/\sqrt{2\xi_1} + 2/\sqrt{\xi_1/2} = 1/2 \quad \rightarrow \quad \xi_1 = 50.$$

Если $J \neq 0$, то на оси аппликат

$$U(0, 0, \xi_3) - \frac{J^2}{2\xi_3} = 3/\sqrt{\xi_3} - \frac{J^2}{2\xi_3} = 1/2 \quad \rightarrow$$

$$\xi_3 \in \left[\left(3 - \sqrt{9 - J^2}\right)^2, \left(3 + \sqrt{9 - J^2}\right)^2 \right].$$

Корни этого уравнения существуют только при $|J| \leq 3$ (если h — произвольное отрицательное число, при $|J| \leq 3/\sqrt{2|h|}$), в противном случае корней на оси аппликат нет, смотри рис. 6–9.

Аналогичные рассуждения справедливы и для оси абсцисс:

$$U(\xi_1, 0, 0) - \frac{J^2}{2\xi_1} = 1/\sqrt{2\xi_1} + 2/\sqrt{\xi_1/2} - \frac{J^2}{2\xi_1} = 1/2 \quad \rightarrow$$

$$\xi_1 \in \left[\left(5 - \sqrt{25 - 2J^2}\right)^2 / 2, \left(5 + \sqrt{25 - 2J^2}\right)^2 / 2 \right].$$

Теперь рассмотрим случай неравных масс. Положим $m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7$. Лучи двойных соударений располагаются, как и в случае равных масс, в плоскости экватора, но симметрии относительно поворотов на $2k\pi/3$, конечно, уже нет.

При $J = 0$ топологически поверхность такая же как и в случае равных масс: начало координат — выколота точка, три ветви уходят в бесконечность вместе с тремя лучами двойных соударений, только толщина ветвей теперь различна, самая тонкая ветвь направлена вдоль луча двойного соударения двух наименьших масс, самая толстая — вдоль луча двойного соударения двух наибольших масс, третья ветвь располагается вдоль луча соударений наименьшей и наибольшей массы.

Посмотрим, как изменяется область допустимого движения при изменении J . На рис. 4–9 изображены поверхности нулевых скоростей при $J = 2.38, 2.57, 2.67, 2.75$ и 3.5 . Топология областей допустимого движения в этих случаях различна. Для случая $J = 2.38$ эта область ограничена внешней поверхностью с тремя ветвями, похожей на поверхность при $J = 0$ (если начало координат считать выколота точкой). Поскольку поверхность рисуется прозрачной хорошо видна внутренняя поверхность, движение возможно вне этой компактной внутренней поверхности и внутри внешней, неограниченной поверхности.

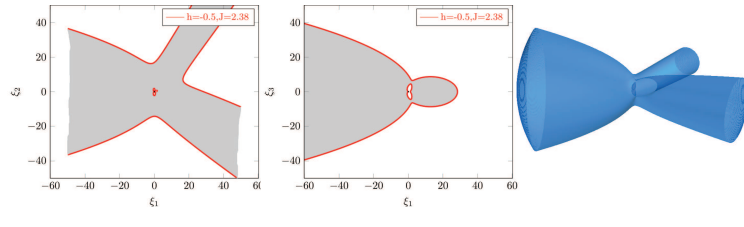


Рис. 4. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.38$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

Сечение внутренней поверхностью плоскостью $\xi_3 = 0$ имеет вид трилистника, а сечение плоскостью $\xi_2 = 0$ — симметрично относительно экватора, это сечение зависит от меридиана, сечение плоскостью

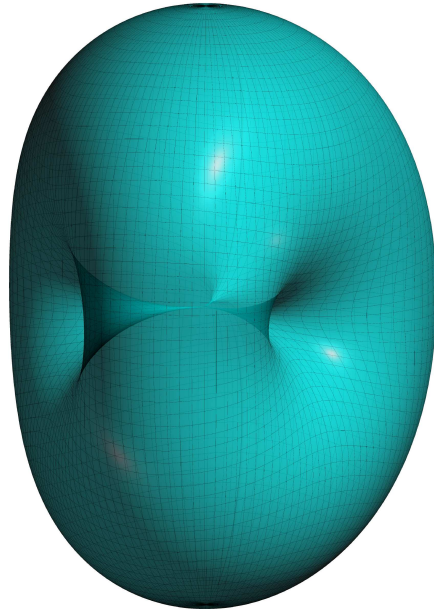


Рис. 5. Внутренняя поверхность нулевой скорости при $J = 2.38$.

$\xi_1 = 0$ будет другим. Таким образом, область возможного движения в этом случае связна, но не односвязна, этому мешает внутренняя поверхность. Сама внутренняя поверхность имеет сложную структуру, связанную с особенностью тройного соударения, в точке тройного соударения, начале координат пространства \mathbb{X} , сходятся три луча двойных соударений. Эта внутренняя поверхность для $J = 2.38$ приведена на рис. 5.

При увеличении J внутренняя поверхность растет и при некотором значении внутренняя и внешняя поверхность соприкасаются в общей точке, на самом деле одновременно в двух точках, поскольку поверхности симметричны относительно плоскости $\xi_1\xi_2$. Это особые точки Лагранжа – точки равносторонней конфигурации $L_{4,5}$. Для случая равных масс легко получить значение J , при котором внутренняя и внешняя поверхности имеют две общие точки: $J = 3$, для неравных масс лучи равносторонней конфигурации задаются

$$L_{4,5} = \frac{\lambda}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3} \begin{pmatrix} \frac{m_1m_2(m_1+m_2) - m_3(m_1^2+m_2^2)}{m_1+m_2} \\ \frac{(m_1-m_2)\sqrt{m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)}}{m_1+m_2} \\ \pm\sqrt{3m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)} \end{pmatrix},$$

здесь $\lambda \in \mathbb{R}^+$ – любое положительное число. При дальнейшем увеличении J мы получаем поверхность с дыркой, представленную на рис. 6 с $J = 2.57$. Движение возможно только внутри этой поверхности.

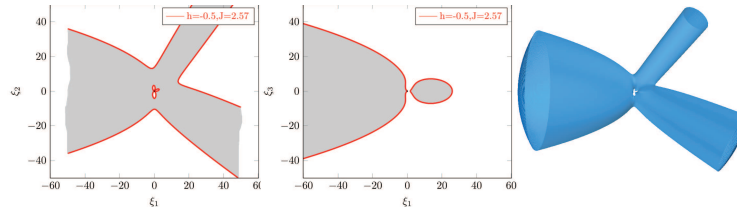


Рис. 6. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.57$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

При дальнейшем увеличении J дырка увеличивается и при некотором значении J две ветви, ветвь, связанная с лучом соударения

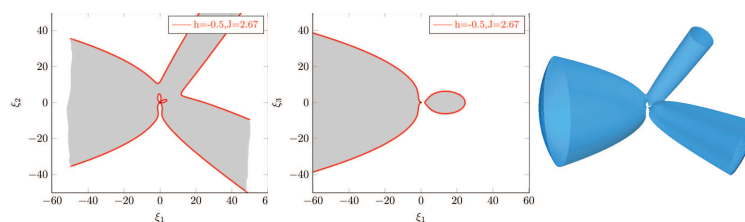


Рис. 7. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.67$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

бóльших масс, и ветвь, с лучом соударения наибольшей и наименьшей масс, имеют только одну общую точку; это точка коллинеарной конфигурации Эйлера L_1 . Далее при бóльших J эти ветви перестают быть связанными, точка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) из одной ветви может попасть в другую только через третью ветвь с лучом соударения наименьших масс.

При увеличении J дальше наступит момент, когда от ветвь с наибольшими массами будет иметь только одну общую точку с ветвью наименьших масс. Эта точка отвечает коллинеарной конфигурации Эйлера L_2 . При больших J ветвь наибольших масс перестает быть связанной с двумя другими, точка, находящаяся в этой ветви, не может попасть в другие и будет оставаться там всегда, хотя перемещение точки между двумя другими ветвями возможно.

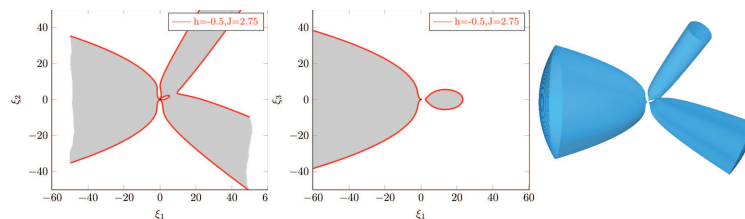


Рис. 8. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.75$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

Наконец, увеличивая J , мы достигнем положения, когда две связанные ветви будут иметь только одну точку (последняя оставшаяся точка Эйлера L_3), после чего мы получаем три не связанные ветви. Точка, находящаяся в одной из этих ветвей будет оставаться в этой ветви всегда.

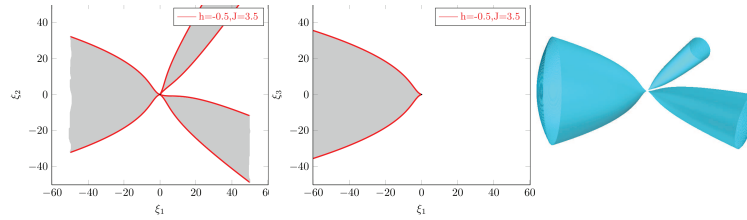


Рис. 9. Поверхность нулевой скорости при $J = 3.5$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 5$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

Итак, если постоянная энергии отрицательна (например, $h = -1/2$), то в зависимости от значения постоянной площадей J существует пять топологически различных областей возможного движения. Тип области зависит от значения J и изменяется при достижении J значений, соответствующих точкам Лагранжа $L_{4,5}$, L_3 , L_2 , L_1 . Картина, аналогичная приведенной на рис. 1 для круговой ограниченной задачи трех тел. Действительно, в последнем случае мы имеем три несвязанные области возможного движения, точно также как в первом случае на рис. 1. В предпоследнем случае – две несвязанные области (вторая область на рис. 1), а в третьем приведенном случае – одна. Заметим, что поверхности нулевой скорости в круговой ограниченной задаче строятся во вращающейся системе координат, а в нашей задаче – в пространстве форм.

В общей задаче можно попробовать построить область возможного движения не только в случае отрицательной энергии, например, при $h = 0$ справедливо неравенство

$$\frac{J^2}{2I} \leq U(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

В случае равных масс на оси аппликат получим неравенство $\xi_3 \geq J^2/6$, а на оси абсцисс $\xi_1 \geq J^2/(5\sqrt{2})$. Для положительного значения $h > 0$,

пусть $h = 1/2$ в случае равных масс на оси аппликат справедливо неравенство $\xi_3 \geq \sqrt{9 + J^2} - 3$, а на оси абсцисс $\xi_1 \geq (\sqrt{25 + 2J^2} - 5)/\sqrt{2}$. При неотрицательных значениях постоянной энергии область возможного движения ограничена только одной поверхностью, очень похожей на поверхность рис. 5, движение возможно вне этой поверхности.

§5. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Пространство форм (но не сам термин) в работах по небесной механике появилось еще в 1952 году в работах Леметра [2]. Леметр предложил метод глобальной регуляризации общей задачи трех тел. Регуляризация Леметра плоской задачи трех тел позволяет ввести удобную параметризацию, построить численно, например, коллинеарные орбиты и изучить их свойства. Для простоты будем далее рассматривать случай трех равных масс.

В пространстве форм размер и конфигурация разделены, размер определяется расстоянием до начала координат, а конфигурация – положением на сфере форм. Конфигурации двойных соударений, например, определяются лучами, проходящими через три точки сферы форм (радиуса 1/2): $(-1/2, 0, 0)$, $(1/4, -\sqrt{3}/4, 0)$, $(1/4, \sqrt{3}/4, 0)$. Чтобы исключить особенности двойных соударений, достаточно применить преобразование, изменяющее только сферу форм, или, отождествляя сферу с комплексной плоскостью (например, с помощью стереографической проекции), преобразовать комплексную плоскость. Преобразование Леметра имеет вид:

$$\zeta = z \frac{\sqrt{8} + z^3}{1 - \sqrt{8}z^3}, \quad (8)$$

здесь z – точка регуляризованной плоскости, ζ – точка исходной плоскости (т. е. точка, соответствующая точке сферы форм). В табл. 1 приведены прообразы точек двойных соударений при преобразовании Леметра.

Преобразование Леметра (8) это четырехлистное отображение, каждая точка сферы форм имеет четыре прообраза, исключая точки двойных соударений, где отображение двулистное. Рассмотрим коллинеарные орбиты. На этих орбитах имеет место соударение и интеграл углового момента $J = 0$.

Из (2) очевидно, что коллинеарные конфигурации (вырожденные треугольники) заполняют плоскость. В коллинеарной задаче $\xi_3 = \dot{\xi}_3 =$

Таблица 1. Особенности потенциальной функции U .

Соуд.	рег. расширенная плоскость z	ζ
C_{12}	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	-1
C_{13}	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \iota$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \iota$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \iota$
C_{23}	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \iota$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \iota$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \iota$

$J = 0$, Преобразами экватора, то есть окружности $\zeta\bar{\zeta} = 1$, будут три показанные на рис. 10 окружности:

- тело 3 движется между первым и вторым телами (красная окружность), на этой окружности располагаются две точки соударения c_{13} и c_{23} , всегда выполняется неравенство $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$;
- тело 2 движется между первым и третьим телами (синяя окружность), на этой окружности имеются точки соударения c_{12} и c_{23} , всегда выполняется неравенство $\pi \leq \theta \leq 5\pi/3$;
- тело 1 движется между вторым и третьим телами (зеленая окружность), на этой окружности имеются точки соударения c_{12} и c_{13} , всегда выполняется неравенство $\pi/3 \leq \theta \leq \pi$.

$$\begin{aligned}
 (z - \sqrt{2})(z - \sqrt{2}) &= 3 \\
 (z - (\sqrt{2}/2 - i\sqrt{6}/2))(z - (\sqrt{2}/2 - i\sqrt{6}/2)) &= 3 \\
 (z - (\sqrt{2}/2 + i\sqrt{6}/2))(z - (\sqrt{2}/2 + i\sqrt{6}/2)) &= 3
 \end{aligned} \tag{9}$$

Эти окружности пересекаются в точках двойных соударений c_{12} , c_{13} и c_{23} , причем каждому соударению на регуляризованной плоскости (или регуляризованной сфере форм) отвечают две точки.

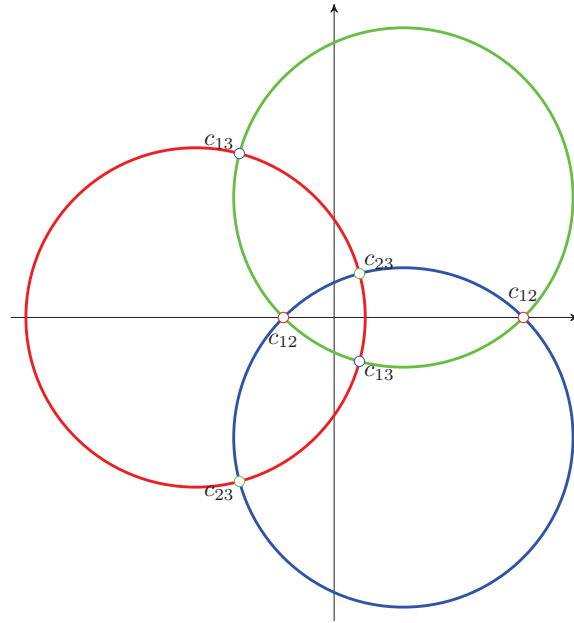


Рис. 10. Пробразы экватора.

Введем в плоскости экватора полярные координаты ϱ, θ :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \varrho^2 \cos \theta, \\ \xi_2 &= \varrho^2 \sin \theta.\end{aligned}$$

В этих координатах кинетическая энергия T и потенциальная функция U можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \left(\dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\theta}^2 \right), \\ U &= \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\varrho} \frac{1 + 4 \cos \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta} (2 \cos \theta - 1)} = \frac{W(\theta)}{\varrho}.\end{aligned}$$

Поскольку мы исключаем из рассмотрения тройное соударение, мы можем ограничиться случаем когда третье тело располагается между двумя другими, возможны только соударения $r_{13} = 0$ и $r_{23} = 0$. Таким образом, возможные конфигурации определяются условием $-\pi/3 \leq$

$\theta \leq \pi/3$, а потенциальная функция имеет особенности в двух точках $\pm\pi/3$. На рис. 10 это красная окружность. Очевидная параметризация точек окружности, $z = -\sqrt{2} + 3 \cos \theta + 3i \sin \theta$, приводит к слишком сложным выражениям и точки соударения располагаются на окружности неравномерно.

Лучший результат получается при параметризации

$$z = \frac{\cos E + \sqrt{3} i \sin E}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos E}. \quad (10)$$

В этом случае в точках соударения $E = \pi/4 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 4$, а $E = k\pi/2$ соответствует конфигурации Эйлера. Найдем области возможного движения. С принятой параметризацией имеем

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= \varrho^2 \frac{12}{7 - \cos 4E}, \\ r_{13}^2 &= \varrho^2 \frac{3(1 + \sin 2E)^2}{7 - \cos 4E}, \\ r_{23}^2 &= \varrho^2 \frac{3(1 - \sin 2E)^2}{7 - \cos 4E}, \end{aligned}$$

а потенциальная функция U

$$U = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}(1 + \cos 4E)}. \quad (11)$$

Выразив $\cos \theta$ и $\sin \theta$ через E

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (5 + \cos 4E)/(7 - \cos 4E), \\ \sin \theta &= 4\sqrt{3} \sin 2E/(7 - \cos 4E), \end{aligned}$$

мы можем записать гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2} p_\varrho^2 + \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{48(1 + \cos 4E)\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}(1 + \cos 4E)}. \quad (12)$$

Из интеграла энергии $H = h$ в точках с $E = \pi/4 + k\pi/3$ получим

$$p_E^2 = 2\sqrt{6}\varrho \quad (13)$$

Область возможного движения определяется неравенством $U \geq -h$, или, полагая $h = -1/2$,

$$\varrho \leq \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{\sqrt{3}(1 + \cos 4E)} \quad (14)$$

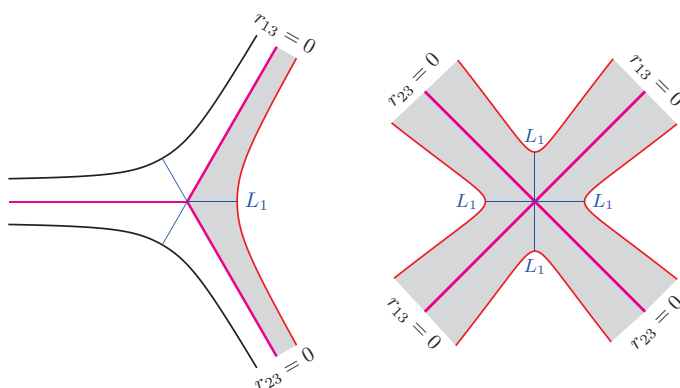


Рис. 11. Области возможного движения в переменных ϱ, θ (слева) и регуляризованных переменных ϱ, E .

На рис. 11 серым изображены области возможного движения коллинеарной задачи трех тел, границы области, линии нулевых скоростей, изображены красной линией, фиолетовые прямые – линии двойного соударения, синие – прямые эйлеровской конфигурации. В нерегуляризованном случае область возможного движения ограничена двумя прямыми двойных соударений ($r_{13} = 0$ или $r_{23} = 0$) и кривой нулевой скорости, в регуляризованном случае область допустимых движений ограничена только кривой нулевой скорости, которая, однако, состоит из четырех ветвей. Точки нулевой скорости, ближайшие к началу координат, достигаются при $\theta = 0$ или $E = k\pi/2, k = 0, 1, 2, 3$, а $\varrho = 5\sqrt{2}$ (размер треугольников при преобразовании Леметра не изменяется).

Перечислим некоторые свойства коллинеарных траекторий

- (1) Если в начальный момент точка находится на прямой эйлеровской конфигурации и $\dot{\theta} = 0$ (в регуляризованном случае) или $\dot{E} = 0$ (в нерегуляризованном), то решение гомотетическое.
- (2) В противном случае траектория должна пересечь линию соударения и линию эйлеровских конфигураций.
- (3) Траектории свободного падения ортогональны кривой нулевой скорости.
- (4) Траектории ортогональны прямым двойных соударений.

- (5) Соотношение (13) полностью определяет начальные условия на линии соударения по значению ϱ_0 .
- (6) максимум ρ достигается вместе с максимумом p_E .
- (7) Пересечение линий эйлеровских конфигураций происходит между сериями соответствующих соударений, состоящими по крайней мере из одного элемента.
- (8) Ширина области возможного движения в нерегуляризованном пространстве стремится к постоянной величине при $\rho \rightarrow \infty$.

Если выбрать начальные условия в момент соударения, т.е. $E = \pi/4$, то движение полностью определяется расстоянием ϱ_0 (при условии, что h фиксировано), поскольку $p_\varrho = 0$. Если начальные условия выбирать на любой другой прямой, например, $E = 0$, то для определения движения потребуется еще задать p_ϱ или p_E . Таким образом, начальные значения на линии соударений, принимающие значения в интервале $(0, \infty)$, могут перейти в любую точку двумерной области возможного движения. Здесь можно усмотреть аналогию с кривой Пенано, безусловно связанную с хаотическим характером движения.

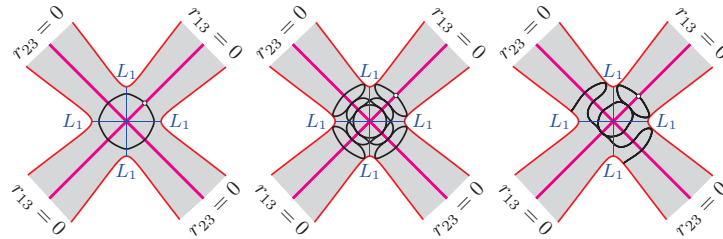


Рис. 12. Коллинеарные орбиты: классическая орбита Шубарта $\varrho_0 = 2.63652337$ (слева), орбита Шубарта с $\varrho_0 = 3.74532$, орбита свободного падения с $\varrho_0 = 3.632104$.

Гамильтониан (12) имеет особенность при $E = \pi/4 + k\pi/2$. Согласно приему Пуанкаре регуляризованное решение задачи с гамильтонианом (12) можно получить, если мы заменим гамильтониан H гамильтонианом

$$H' = (1 + \cos 4E)(H - h) \\ = \frac{1}{2}(1 + \cos 4E)(p_\rho^2 - 2h) + \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{48\rho^2} - \frac{\sqrt{7 - \cos 4E}(9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}\rho},$$

при условии, что постоянная энергии на этом решении равна h . Получающиеся дифференциальные уравнения можно решить численно и найти периодические орбиты. Приведем здесь несколько орбит из работы [8]. На рис. 12 представлены классическая орбита Шубарта, непростая симметричная орбита с $\varrho_0 = 3.74532$ и орбита свободного падения, т. е. орбита, две точки которой лежат на кривой нулевой скорости. Заметим, что только орбиты свободного падения имеют точки на кривой нулевой скорости, и только две, хотя и симметричная орбита, и приведенная орбита свободного падения имеют точки близкие к этой кривой.

Аналогично коллинеарным орбитам можно рассмотреть и равнобедренные орбиты Брука [9]. Равнобедренные орбиты всегда сохраняют конфигурацию равнобедренного треугольника, что возможно только при равенстве двух масс, лежащих в основании треугольника, и поэтому движение происходит в меридиане сферы форм. Такие орбиты тоже имеют особенности двойного столкновения. Прообраз соответствующего меридиана это окружность $(z - 1/\sqrt{2})(\bar{z} - 1/\sqrt{2})$. В случае трех равных масс имеем три окружности с поворотом на $2\pi/3$ относительно начала координат. На рис. 13 представлены две равнобедренные орбиты с $\varrho_0 = 1.57125$ и $\varrho_0 = 3.31543$ и орбита свободного падения, начальные условия для этой орбиты взяты на кривой нулевой скорости, в этом случае орбита определяется начальным значением угла E_0 . Кроме соударения двух тел, лежащих в основании треугольника, других соударений в равнобедренной задаче быть не может, иначе это было бы тройным соударением. Область допустимых движений ограничена только кривой нулевой скорости, которая в случае равнобедренных орбит состоит из двух ветвей.

В случае коллинеарных орбит траектории расположены в плоскости экватора, а в случае равнобедренных – в плоскости меридиана. Таким

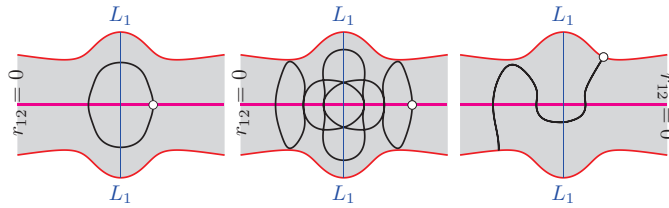


Рис. 13. Равнобедренные орбиты: орбита Брука $\varrho_0 = 1.57125$ (слева), орбита $\varrho_0 = 3.31543$, орбита свободного падения с $E_0 = 0.87298$.

образом, в пространстве формы эти траектории плоские, и, следовательно, на сфере форм они расположены на большой окружности. Поскольку прообразы соответствующих окружностей в преобразовании Леметра исходных окружностей также являются большими окружностями, движение в регуляризованном пространстве также является плоским.

И коллинеарные, и равнобедренные траектории имеют особенности, собственно мы исследуем их аналитическое продолжение, без регуляризации это сделать невозможно. Но регуляризация дает интересные результаты даже в такой траектории как “восьмерка”, в которой взаимные расстояния никогда не становятся малыми, а размер ϱ изменяется в небольших пределах. Давайте посмотрим, как выглядит “восьмерка” на регуляризованной сфере форм.

Поскольку “восьмерка” далека от особенностей, на каждом из четырех листов мы можем построить ее прообраз. На рис. 14 показаны все 4 прообраза “восьмерки”. Восьмерка проходит через все три эйлеровых точки, следовательно, прообразы траектории также должны проходить через прообразы эйлеровых точек. На регуляризованной расширенной плоскости имеется 12 таких точек. На рис. 14 эти точки отмечены белыми кружками; четыре траектории, прообразы восьмерки, нарисованы красным, синим, фиолетовым и бирюзовым цветами. Каждый из них проходит через шесть прообразов эйлеровых точек. Более того, если в регуляризованной плоскости провести окружности через соответствующие шесть прообразов эйлеровых точек, то

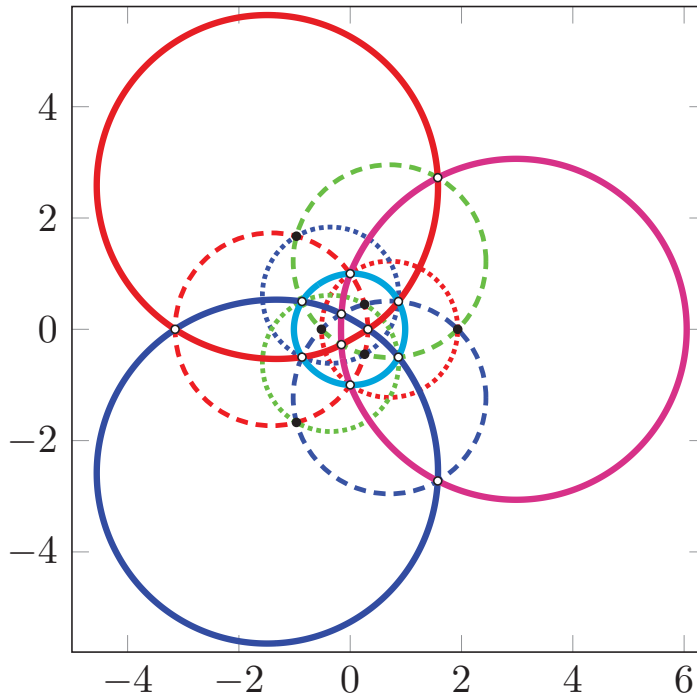


Рис. 14. Пробразы “восьмерки” на регуляризованной расширенной плоскости.

эти окружности будут мало отличаться от траекторий. Радиус трех окружностей равен 3, а радиус четвертой равен 1. Центры этих трех окружностей расположены в точках $(\sqrt{8}, 0)$, $(-\sqrt{2}, \pm\sqrt{6})$, центр четвертой окружности расположен в начале координат. Таким образом, в регуляризованном пространстве форм траектории мало отличаются от плоских.

На рис. 14 также показаны прототипы коллинеарных (штриховые линии) и равнобедренных траекторий (пунктирные линии). Конечно, все эти траектории пересекаются в эйлеровых точках, а коллинеарные и равнобедренные траектории пересекаются в точках столкновения (отмечены серыми кружками).

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пространстве форм плоской задачи трех тел в зависимости от значения углового момента J можно построить поверхности пяти разных типов. При малых J эта поверхность состоит из двух частей: наружной, похожей на изображенную на рис. 3 поверхности, и внутренней компактной поверхности (при $J = 0$ это просто точка), см. рис. 4. Внутренняя поверхность компактна, в начале координат она имеет особенность, см. рис. 5. При росте J наружная поверхность сжимается, внутренняя растет, и при некотором значении J две поверхности соприкасаются и при дальнейшем росте J в поверхности нулевой скорости появляется дырка (рис. 6). Далее сначала разделяются ветви, отвечающие бóльшим массам (рис. 7), затем от большей ветви отделяется малая (рис. 8). В этом случае пара тел всегда остается вместе (устойчива по Хиллу) а третье тело может переходить то к одному телу, то к другому (в пространстве форм точка находится в большей ветви), и, наконец, все три ветви отделяются друг от друга (рис. 9), в этом случае все пары могут быть устойчивыми по Хиллу в зависимости от того, в какой ветви находится точка.

Регуляризация Леметра позволяет исследовать хаотическую структуру коллинеарных и равнобедренных движений. Кроме того, на регуляризованной сфере форм траектория орбиты-«восьмерки» лежит вблизи больших кругов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Голубев, *О некоторых оценках в неограниченной задаче трех тел в случае, когда движение одной из пар тел абсолютно устойчиво по Хиллу.* — ДАН **240**, No. 4 (1978), 798–801.
2. G. Lemaître, *Coordonnées Symétriques dans le Problème de Trois Corps.* — Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe de Sciences) **38**, (1952), 582–92, 1218–34.
3. К. В. Холшевников, В. Б. Титов, *Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел.* — Вест. С.Петербург. ун-та. Мат. Мех. Астр. **7(65)**, вып. 4. (2020), 734–742.
4. Л. Г. Лукьянов, *О поверхностях нулевой кинетической энергии.* — Труды ГАИШ **76** (2006), 42.
5. R. Moeckel, R. Montgomery, *Symmetric Regularization, Reduction and Blow-up of the Planar Three-Body Problem.* — Pacific J. Math. **262**, No. 1 (2013).
6. М. Ф. Субботин, *Введение в теоретическую астрономию.* Наука, М. (1968).
7. В. Себекей, *Теория орбит.* Наука, М. (1982).
8. V. Titov, *Some Properties of Lemaître Regularization. Collinear Trajectories.* — Astron.Nachr., **342** No. 3 (2021), 588–597.

9. V. Titov, *Some Properties of Lemaitre Regularization. 2 Isosceles trajectories and figure-eight.* — Astron.Nachr. **343**, No. 3 (2022), e2114006.

Titov V. B. Domains of possible motion in the general three body problem.

The regions of possible motion of the general planar three-body problem are constructed in the form space, the factor-space of the configuration space of the problem by transfer and rotation. Such a space is a space of congruent triangles, and the sphere in this space is – similar triangles. The integral of energy in the form space gives the equation of the zero velocity surface. These surfaces separate regions of possible motion from regions where movement is impossible. These surfaces can also be obtained based on the Sundman inequality. Without loss of generality, we assume that the constant energy is equal $-1/2$ and the desired surfaces depend only on the value of the angular momentum of the problem, J . Depending on this value, five topologically different types of surfaces can be distinguished. For small J , the surface consists of two separate surfaces, internal and external ones, the motion is possible only between them. With J increasing the inner surface increases, the outer surface decreases, the surfaces first have a common point at some value of J , with a further increase in J , their topological type changes and finally the region of possible motion separates into three disjoint regions, the motion is possible only inside them. Examples of the corresponding surfaces are given for each of the five types, their sections in the plane xy and in the plane xz and the surfaces themselves are constructed, their properties are studied. Orbits suffering collisions are studied separately: collinear and isosceles orbits. Collisions occurring in such orbits require regularization. In the form space, it is natural to use Lemaitre regularization. In the regularized space, the figure-“eight” orbit is also considered.

С.-Петербургский государственный университет, Поступило 29 сентября 2022 г.
Университетская наб., 7-9
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: tit@astro.spbu.ru