Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 517, 2022 г.

А. М. Вершик

СПЕКТР И АБСОЛЮТ ГРАФА ДВУСТРОЧЕЧНЫХ ДИАГРАММ ЮНГА

§1. Следы и центральные меры для диаграмм Браттели

Понятие конечного следа на C^*-алгебре хорошо известно (см например, [1]) – это нормированный, положительный, непрерывный, центральный ($\Leftrightarrow f(xy) = f(yx)$) линейный функционал на алгебре. Пространство всех таких конечных следов данной C^*-алгебры иногда называют *спектром* алгебры. Каждый след порождает с помощью известной конструкции фактор-представление этой алгебры либо типа $I_n, n = 1, 2 \ldots$, либо типа II_1 по фон-Нейману. В случае C^*-алгебр типа скрещенного произведения коммутативной $*$-алгебры и некоторой группы (алгебры), или более конкретно, в случае AF-алгебр, – следы, ограниченные на эту коммутативную подалгебру, порождают меры на её спектре, поэтому задача описания следов алгебры становится задачей описания некоторого класса мер на спектре уже коммутативной подлгебры. Для AF-алгебр, соответствующих диаграммам Браттели, (см. [2]) такой коммутативной подалгеброй указанного типа в наиболее интересных случаях является, так называемая, алгебра Гельфанда–Цетлина (ГЦ), которая в случае простого ветвления диаграммы есть $*$-алгебра комплексных функций на её спектре, т.е. на множестве всех бесконечных путей графа ветвления (или путей диаграммы Браттели). Всякий конечный $*$-след на этой алгебре есть просто вероятностная мера на её спектре, т.е. на множестве путей, поэтому следует сначала понять, какие именно меры соответствуют следам на всей некоммутативной алгебре. Необходимым, но вообще говоря, недостаточным, условием на такую меру является условие *центральности.* Мера, отвечающая следу, должна удовлетворять более жестким условиям, в частности, условию однородности соответствующей марковской цепи. В дальнейшем рассматриваются только невырожденные меры, т.е.

Ключевые слова: следы, центральные меры, однородность, марковские цепи, рекуррентное уравнение.

Поддержано грантом РНФ 21-11-00152.

такие, у которых все ребра имеют ненулевые вероятности, так как лишь они представляют интерес.

Определение 1. *Мера на пространстве путей диаграммы Браттели называется центральной, если для любого n и любой вершины n-го этажа диаграммы, условная мера на всех конечных путях, ведущих из начальной вершины эту данную вершину есть равномерная мера. Необходимость условия центральности на меру на спектре следует из того, что мера должна быть инваринтной относительно ограничений всех автоморфизмов алгебры, сохраняющих алгебру ГЦ. Пространство эргодических (=неразложимых) центральных мер назыаается абсолютом диаграммы или графа.*

Но дополнительное условие – однородность меры, повидимому, оставалось в тени. Понимание различия центральных и центральных однородных мер имеется в работах [5, 6], где рассматривались однородные меры в специальных случаях (связанных с лапласианом на группе), но достаточно общего понятия однородности для диаграмм Браттели, адекватного понятию следа, видимо, ещё не сформировалось.

Описание абсолюта графа фактически сводится к некоторой комбинаторной задаче, описание же спектра того же графа, или точнее, спектра соответствующей ему C^*-алгебры, становится комбинаторной задачей только после нетривиальной редукции.

Понятие центральности исключительно важно для конструкций, связанных с динамическими системами, например, именно оно позволяет определить *адические автоморфизмы* – удобные модели преобразований, для сохраняющих меру преобразований, – в термина теории равномерной аппроксимации эргодической теории; эти модели были определены автором в конце 70-х гг. и позже связывались с диаграммами Браттели (преобразования Браттели-Вершика) (см.[3, 4]), хотя собственно говоря, эта связь не является обязательной, поскольку вместо языка пространства путей графа первоначально использовался язык убыающих последователностей измеримых разбиений (фильтраций) с равномерными, например диадическими, условными мерами на слоях разбиений. Заметим, что язык фильтрации был исходным языком аппроксимации в работах автора 70-х гг. в частности в доказательстве марковской аппроксимации автоморизмов, как обобщение леммы Рохлина. Изучение примеров адических реализаций , в силу их универальности – так представляется любой автоморфизм пространства с мерой, – стали новым направлением в эргодической теории. Перечислению совокупности всех центральных мер для тех или иных диагармм посвящен ряд работ автора и его последователей. Эта совокупность названа *абсолютом* графа или диаграммы Браттели и явное описание её есть весьма нетривиальная задача.

Но условие центральности меры на спектре алгебры ГЦ исходной C^*-алгебры с формальной точки зрения не использует всей информации, содержащееся в следах C^*-алгебры. Оказывается, многие неявные симметрии алгебры, и следовательно, симметрии следов, пересказываются лишь в дополнительных условиях инвариантности центральных мер. Например, меры должны быть инвариантными относительно некоторых эндоморфизмов, индуцированных автоморфизмами всей алгебры. Здесь существенна эргодичность центральной меры, которая, повидимому, тесно связана с однородностью. Мы сохраняем слово "спектр" за множеством всех центральных мер, которые удовлетворяют этим дополнительным условиям. Подробный разбор этих дополнительных условий мы оставляем до другой работы. Ограничимся лишь важными примерами.

Примеры. Для двумерного графа Паскаля как диаграммы Браттели спектр состоит из классических схем Бернулли с двумя состояниями, т.е. спектр есть отрезок $[0,1]$. С другой стороны эдесь он совпадает с абсолютом, как множеством эргодических центральных мер, и формально не включает дополнительного условия однородности, которое по сути имеет место. (см. далее)

Для графа Юнга спектр (групповой C^*-алгебры $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$) совпадает с множеством характеров бесконечной симметрической группы, найденным в 1964 г. Е. Тома ([7]) и есть известный симплекс Тома. Условие однородности следа как будто специально не формулировалось. Но оно близко к инвариантности следа относительно фундаментального эндоморфизма бесконечной симметрической группы и её собствнной части (см. далее).

§2. Граф двустрочечных диаграмм Юнга

Мы рассматриваем $\mathbb{N}$-градуированный граф двустрочечных диаграмм, n-й этаж которого состоит из всех диаграмм с n и клетками, а ребра соединяют данную диаграмму с двумя диаграммами следующего этажа, которые отличаются от нее на одну клетку. Конечная (стандартная) таблица данной диаграммы интерпретируется как путь из начальной – одноклеточной – диаграммы первого этажа в данную диаграмму. Мы не повторяем конструкцию алгебры, построенной по этому графу, ограничишись лишь утверждением, что это подалгебра C^*-групповой алгебры бесконечной симметрической группы (финитных подстановок) отвечающая представлениям, порожденными двустрочечными диаграммами. Будем записывать таблицы, конечные или нет в виде последовательности символов 1 и 2, в зависимости от того, в какую строку первую или вторую, ставится новая клетка. Разумеется, число клеток во второй строке должно быть не больше числа клеток в первой, т.е. число символов 2 не больше числа символов 1 при любом n. Такие последовательности называются решетчатыми. Рассматриваются вероятностные меры на пространстве бесконечных таблиц или на пространстве решетчатых последовательностей с двумя символами.

Однако условие центральности, как сказано выше, формально ещё не определяет полностью меру, которая соответствует следам, т.е. точкам спектра алгебры. Дополнительное условие, как мы увидим есть условие *однородности*, которое в нашем случае состоит в следующем: *Мера, определяющая след, инвариантна относительно "вертикального"эндоморфизма графа, который отрезает от всякой диаграммы её первый столбец из двух клеток и аннулирует все диаграммы с пустой второй строкой.* По-другому это можно выразить так, мера перейдет в себя, если к любой таблице в начале добавить один (или произвольное число) столбцов в качестве первого столбца. Это по существу есть "почти"инвариантность меры относительно одностороннего сдвига таблицы влево, но не всякого, а того, который аннулирует первый столбец из двух клеток, *если он есть*. Формальный вывод необходимости этого условия из общей (некоммутативной) центральности следа ($f(x,y) = f(y,x)$ (или точнее, из общей положительной определённости следа, связан с более детальным рассмотрением C^*-алгебры и мы опускаем здесь доказательство его эквивалентности со свойством однородности.

Задача состоит в том, чтобы описать все центральные меры (ц.м.) и все следы, т.е. те ц.м. которые удовлетворяют дополнительному условию однородности. Это -задача об описании мер на пространстве бесконечных таблиц или на пространстве всех решетчатых последовательностей $1, 2$. Поскольку выпуклая комбинация центральных мер –центральна, то достаточно описать только неразложимые центральные (т.е. эргодические) меры и неразложимые следы. *Множество неразложимых центральных мер графа назовем абсолютом графа, а его подмножество, являющееся мерами, задающими следы – спектром графа*

Теорема 1. *Множество эргодических следов* (*т.е. спектр*) *есть единичный отрезок, точнее, мере. отвечающей всякому эргодическому следу сопоставлется точка интервала* $[0, 1/2]$, *где числу* $\alpha \in [0, 1/2]$ *соответствует след (центральная мера)* M_α, *однозначно определяемая тем, что для почти всех по этой мере таблиц существуют предельные частоты первой и второй строк. при этом* $\alpha_2 = \alpha$ *– есть предельная частота* 2*-й строки, а* $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 \in [1/2, 1]$. *Связь между следом как центральной мерой состоит в том, что след, отвечающий точке* $\alpha \in (0, 1/2)$ *отождествляется с центральной мерой* $\{x_n\}$, *где* $x_n \equiv \alpha$.

Выше под предельной частотой i-й строки понимается предел отношения длины i строки таблицы с n клетками к n, или иначе, предел отношения числа символов i среди первых n знаков. Мера M_0 есть дельта мера на таблице, состоящей из бесконечной первой строки.

Доказательство. 1.Мы начнем доказательство с описания всех формально центральных мер на графе диаграмм, иллюстрируя важность условия однородности. Точнее, множество эргодических центральных мер на графе двустрочечных таблиц (т.е. абсолют графа) есть бесконечное произведение отрезков, центральная мера параметризуется бесконечной последовательностью чисел $\{x_n\}_n, x_n \in [0, 1]$ (см. построение)

Напомним, что диаграмма Браттели есть в данном случае подграф целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2_+$, а имнно тот, где $x_1 > x_2$ (двумерная камера Вейля). Удобно повернуть её на 135 градусов по часовой стрелке так,что она станет левой половиной графа Паскаля, у которого правая половина отрезана. Из начальной вершины графа – (0.0) идет только одно ребро в вершину (1.0). Из каждой вершины графа идут два или одно ребро сверху вниз направлении по 45 градусов к вертикали. Марковская мера на путях определяется системой вероятностей на каждом (ориентированном ребре, При этом сумма вероятностей на двух ребрах, выходящих из одной вершины навна 1, а есло ребро одно. то и вероятность равна 1.

Главный принцип формальной центральности на графе двустрочечных диаграмм, как и на любом графе, являющимся частью двумерной ршетки (например графе Паскаля) состоит в условии "гомологичности меры единице"в следующем смысле. Рассмотроим произвольный замкнутый контур на решетке. В обычном определении центральности этот контур есть путь от начальной вершины в данную вершину, и затем путь обратный к другому пути от начального к этой же вершине. Каждому ориентированному ребру сопоставлена вероятность, а ребру с обратной ориентацией величина, обратная этой вероятности. *Тогда произведение вероятностей с учетом ориентации вдоль всего контура равно 1.* покажем, что этот факт равносилен центральности и определяется его верностью для всякого отдельнного плакета (квадрата) решетки. Очевидно что если два пути ведут из начала в данную вершину, то произведения вероятностей по ребрам пути в каждом из двух путей, как следует из условия, совпадают. Наоборот, любой замкнутый контур можно многими способами представить как пару путей, соединяющих какие-то две вершины, при этом одну из них можно, считать начальной вершиной, искусственно добавляя вспомогательный путь. Тем самым произведение вероятностей вдоль контура равно 1. Наоборот, предположим, что условие выполнено для всякого плакета. Легко последовательно удаляя плакеты и уменьшая при каждом удалении заданный контур, не меняя произведения, и свести контур к одному плакету.

Зададим произвольно положительные вероятности, меньшие единицы, на ребрах, ведущих из вершин лежащих на нечетных этажах и на крайней полупрямой, идущей от начальной вершины вниз в югозападном направлении (напомним, что нулевая аершина лежит на нулевом этаже):

$$\nu_1, \nu_3, \nu_5, \dots, \nu_{2n-1}, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

существует единственная формально центральная мера на графе с заданными вероятностями на указанных ребрах Действительно, используя условия, 1) что сумма вероятностей на ребрах, идущих из одной вершины равно 1, и 2), что произведение вероятностей по четырем ребрам каждого плакета равно 1, мы последовательно можем всегда вычислить вероятность, стоящую на четвертом ребре, если вероятности на трех ребрах уже известны. При этом в рядах с нечетными номерами мы последовательно слева направо, в рядах с четными номерами – в обратном направлении. Никаких противоречий при этом не возникает. Если какие-то из заданных вероятностей ν_k равны 0 или 1, то мы получаем вырожденные меры, которые, не рассматриваются.

Слово “формально центральная” имеет тот смысл, что в качестве решения уравнений на вероятности могут получиться числа большие единицы, поэтому “формальная мера” ещё не мера. Но более важно, что "формально центральная"даже, если она корректно определна, может оказаться не эргодической, и потом не однородной. Так или иначе вопрос о том является ли эргодическая центральная мера однородной решен только для некотрых примеров (например для графа Паскаля, и нашего графа двустрочечных таблиц, а в общей постановке ещё должен быть точно сформулирован и затем решен. Для рассматриваемых примеров ответ получен, то только апостериори.

Мы детально описали все эргодические центральные меры на графе двустрочечных диаграмм. Очевидно, что условие центральности налагает в существенном лишь горизонтальные ограничения на вероятности и никаких связей по вертикали (т.е. между вероятностями на разных этажах) нет. Тем любопытнее, что для эргодических мер они фактически появляются, но причина этого пока не ясна.

2. Перейдем к описанию следов. Условие однородности приводит к жестким вертикальным связям вероятностей. Грубо говоря, однородная, центральная, марковская мера становится "почти"стационарной.

Мы будем использовать формальную центральность, описанную выше, следовательно, нужно дополнительно учесть условие однородности меры, которое выделяет следы из всех центральных мер. Однородность состоит в том, что *вероятности, на ребрах инвариантны относительно сдвига графа вдоль диагонали, т.е. вероятности, стоящие на двух ребрах, получающихся одно из другого сдвигом графа вдоль главной диагонали $x_1 = x_2$, равны.* Удобно перейти к смежным вероятностям: $\mu_1 = 1 - \nu_1 \equiv \mu, \mu_2 = 1 - \nu_2 \dots$ где ν_{2n-1}, были определены выше и получить цепочку $\{\mu_n\}_n$. Тогда условие однородности немедленно приводит к цепочке соотношений

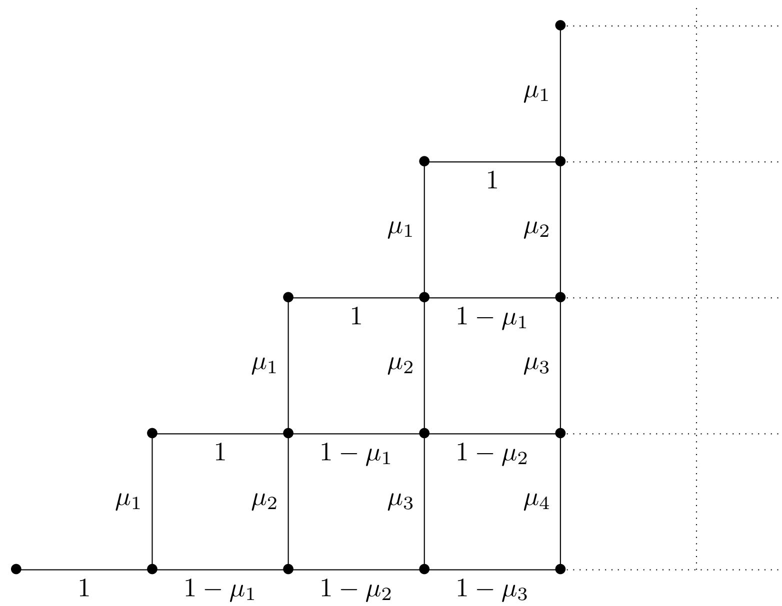
$$1 \cdot \mu_1 = (1 - \mu_1) \cdot \mu_2 = (1 - \mu_2)\mu_3 = \dots = (1 - \mu_n)\mu_{n+1} \dots,$$

Мы получили, таким образом, общее рекуррентное соотношение, в которое входит параметр $\mu = \mu_1$:

Лемма 1.

$$\mu_n = \frac{\mu}{1 - \mu_{n-1}}, \quad \mu_n = \mu_n(\mu), n = 2, 3, \dots.$$

Содержательно: вероятность μ_n есть переходная вероятность поставить клетку во вторую пустую строку, если в первой строке уже занято n клеток. Мы видим, что след, т.е. данная марковская цепь вполне опредляется лишь этой вероятностью μ.



$$\ldots = \mu_{n+1}(1-\mu_n) = \mu_n(1-\mu_{n-1}) = \ldots = \mu_1 \cdot 1$$

Свяжем теперь этот параметр следа μ с предельными вероятностями $\alpha, 1-\alpha$ и мерой M_α. Для этого выпишем уравнение на предел вероятностей μ_n, который должен существовать по закону больших чисел.

Перейдя к пределу в рекуррентном соотношнии мы получим, что при заданном μ предельные вероятности α_1, α_2 являются корнями квадратного уравнения:

$$\alpha^2 - \alpha + \mu = 0,$$

и наоборот μ однозначно определяется по α по формуле:

$$\mu = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha).$$

Откуда следует, что

$$0 \le \mu \le 1/4.$$

Рекуррентное соотношение, подсказывает, что уместно выразить предельные и переходные вероятности μ_n цепи с помощью непрерывной дроби. При этом меньшая предельная частота $\alpha_2 = \lim_n \mu_n$ выражается так:

$$\alpha_2 \equiv \alpha = 1 - \alpha_1 = 1/2 - \sqrt{1/4-\mu} = 1 - \cfrac{\mu}{1-\cfrac{\mu}{1-\cfrac{\mu}{1-\cfrac{\mu}{1-\cdots}}}}$$

а большая частота:

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 1/2 + \sqrt{1/4-\mu} = \cfrac{\mu}{1-\cfrac{\mu}{1-\cfrac{\mu}{1-\cfrac{\mu}{1-\cdots}}}}.$$

При этом вероятности μ_n оказываются подходящими для первой непрерывной дроби. □

Замечание 1. Свойство однородности, является следствием существования эндоморфизма *-алгебры и диаграммы Браттели, и, в конце концов бесконечной симметрической группы, который отображает естественные подалгебру, подграф, подгруппу на всю соответственно алгебру, граф, группу. Асимптотически это изоморфизм, и поэтому сопряженный к нему эндоморфизм состояний (т.е. положительных функционалов) переводит их в себя. Иначе говоря, однородность в отличие от центральности имеет асимптотическую природу.

§3. Свойства мер M_α

3.1. Формулы для частных случаев. Мы построили замечательные однородные марковские цепи каждая из которых однозначно определяется по своим предельным частотам – $\alpha_1 \ge \alpha_2 = 1 - \alpha_1$; особенно удобен параметр $\mu = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha(1-\alpha)$. Эти меры и составляют весь список следов для графа двустрочечных таблиц, т.е. меры Тома для двустрочечных диаграмм.

1) В наиболее важном (экстремальном) случае равенства предельных частот, т.е. при $\mu = 1/4$ (вероятность поставить на втором шаге клетку во вторую (пустую) строку получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.

$$\mu_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}; \quad \mu_1 = 0, 1/4 = \mu, 1/3, 3/8, 2/5, 5/12 \ldots .$$

Соответственно, дополнительная вероятность поставить клетку в первую строку $1 - \mu_n : 1, 3/4.2/3, 5/8 \ldots$

Это замечательная марковская мера, которую стоит сравнить в с классической схемой бернуллиевской $(1/2, 1/2)$, как двух случайных блужданий на множестве целых неотрицательных чисел.

Вероятности перехода по этой мере из n в $n+1$:

$$\mathsf{P}\{n|n-1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

а вероятность обратного перехода (копереход):

$$\mathsf{P}\{n-1|n\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Исключительность поправки $1/2n$ к бернуллиевским переходам в том, что выполнено условие, характеризующее эту меру:

$$\mathsf{P}\{n|n-1\} \cdot \mathsf{P}\{n-1|n\} = 1/4.$$

Т.е. произведение вероятностей поставить клетку на произвольном шаге в первую строку на вероятность поставить клетку во вторую на следующем шаге есть постоянная для данной цепи величина, полностью характеризующая цепь!

Заметим, что разность длин строк в этом случае в среднем растет как частные суммы гармоничесгого ряда, но бесконечное число раз может обращаться в нуль. Т.е. траектория марковского процесса не остается с вероятностью 1 в конусе $x_1 > x_2$. В этом отличие от случая когда $\mu < 1/4$ $\alpha < 1/2$.

Все соотношения, перечисленные выше, имеют место и в общем случае следов, для произвольного $\mu = \alpha(1-\alpha) \in [0, 1/4]$ т.е. для M_α. Определящее соотношение выглядит точно так же:

Вероятности перехода из n в $n+1$: и копереходов выражаются через подходящие непрерывной дроби.

$$\mathsf{P}\{n|n-1\} = 1 - \mu_{n-1},$$

а вероятность обратного перехода:

$$\mathsf{P}\{n-1|n\} = \mu_n$$

$\mu_n \cdot 1 - \mu_n - 1 = \mathrm{const} = \mu = \mu_2$. Замечательным образом, имеет место соотношение, которое было приведено выше для случая $mu = 1/4$:

$$\mathsf{P}\{n|n-1\} \cdot \mathsf{P}\{n-1|n\} = \mu, \quad \mu \in (0, 1/4),$$

характеризующее эту марковскую цепь в классе всех случайных блужданий.

В случае $\mu = 0$ большая предельная частота равна 1: $\alpha = 1$, Мера M_α в этом случае есть дельта-мера и цепь становится однострочеченой диаграммрй – детерминированной первой строкой.

Нетрудно подсчитать меры цилиндров для мер M_α через переходные вероятности mu_n. Их можно вычислять и через функции Шура, как это обычно и делается.

3.2. Связь следов с мерами Бернулли и с RSK. Построенные меры – следы – как мы видели находятяся во взаимно-однозначном соответствии со схемами Бернулли. Но эта биекция соответствие предельных частот – распространяется на гораздо более глубокие свойства.

1. Первое свойство было отмечено, видимо, впервые, в [9, **?**]

Рассмотрим меры M_α для случая неравных частот: $\alpha < 1 - \alpha$, т.е. $\mu < 1/4$ и меру Бернулли с теми же предельными частотами, обозначим её (α).

Отобразим пространство с мерой Бернулли (α) на меру пространство таблиц с мерой

$$M_\alpha$$

с теми же частотами, рассматривая ту и другую как меры на монотонных путях решетки $\mathbb{Z}_+^2$, начинающихся в $(0,0)$.

Лемма 2. *Если $\alpha_1 > \alpha_2$ (неравенство строгое), то для почти всякой реализации схемы Бернулли $\{\xi_n^1, \xi_n^2\}, n = 1, 2 \ldots$ существует такое N, зависящее от траектории, что для всех $n > N$ $\xi_n^1 > \xi_n^2$.*

Определим отображение траекторий

$$\{\xi_n^1, \xi_n^2\}_1^\infty \twoheadrightarrow \{\xi_{k-N(\xi)}^1, \xi_{k-N(\xi)}^2\}_{k=N(\xi)}^\infty,$$

т.е. сдвигаем траекторию так, чтобы координата с номером $N(\xi)$ переместилась в $(0,0)$. Таким образом, у почти каждой траектории отброшен конечный начальный кусок. Это определяет гомоморфизм mod 0 пространства траектории меры Бернулли (α) на новую меру на траекториях лежащих в конусе $x_1 > x_2$ того же пространства.

Лемма 3. *Образ меры Бернулли* (α) *при описанном отображении есть мера* M_α *с теми же предельными частотами.*

Доказательство. Мера M_α – центральна и однородна, т.е инвариатна относительно сдвига по главной диагонали, и эргодична. Но и образ меры Бернулли очевидно, остается центральной. Полезно отметить, что центральность вообще сохраняется при ограничении мельной мерой как и мера Бернулли и однородной, а эргодичность и предельные частоты при этом отображении на подмножество сохраняются. Центральность вытекает из того, что мера По той же причине сохраняются однородность и эргодичность (=тривиальность пересечения подалгебр будущего). Но мера M_α – единственная мера с этими свойствами, как это было доказано, следовательно они совпадают. □

Теперь мы можем рассматривать меру Бернулли $_\alpha$ просто, как некоторую меру в конечном расслоении над мерой M_α с теми же частотами, при этом над почти каждой точкой пространства с мерой M_α расслоен конечный начальный отрезок траектории соотвествующей бернуллиевской траектории, снабженный равномерной мерой. Отсюда вытекает, что мера в расслоении однозначно восстанавливается по своей проекции(которе было ограничением) и по равномерности условной меры на слоях. Из условия центральности и однородности вытекает, что эти условия распространяются и на продолженную меру и потому она удовлетворяет условиям инвариантности относительно подстановок как и мера Бернулли. Более подробное рассмотрение показывает, что мы получили новое доказательство теоремы Де Финетти, которое базируется на приведенном выводе для мер M_α.

Операция проектирования меры Бернулли с равными вероятностями $(1/2, 1/2$ на меру $M_{\frac{1}{2}}$ не определена, так как число переходов от большинства одного символа к противоположному в случаев равных вероятностей – бесконечно. Однако сама по себе мера $M_{\frac{1}{2}}$ определена независимо от меры Бернулли и единственна по построению, поэтому параллель между классической мерой Бернулли с равными вероятностями и мерой $M_{\frac{1}{2}}$ остается столь же содержательной как и в общем случае. Более того, она ставит меру $M_{\frac{1}{2}}$ в особое положение, о котором пойдет речь позже, когда мы будем рассматривать общие следы.

2. Другая связь следов на двустрочечной решетке и схемами Бернулли связана с соответствием RSK и работами [10, 12, 13]. В первой работе предложен общий прием как получить все меры Тома с помощью RSK. Для этого надо применить обобщенное соответствие к мерам Бернулли, точнее определить гомоморфизм мер Бернулли на пространство таблиц, и образом при этом гомоморфзиме будут все меры Тома. А во второй работе было после очень глубокого анализа показано, что этот гомоморфизм есть изоморфизм $mod0$ пространств с мерой. Все обстотельства, связанные с фактом изоморфизма и особенно с построением обратного к нему ещё не осознаны полностью. Для самого простого случая, а именно для следов, о которых шла речь выше, изоморфизм схемы Бернулли $B(\alpha)$ и меры M_α значительно проще общего случая и, тем более, случая меры Планшереля, но и он не вполне очевиден. Он подробно рассмотрен в работе [11], но, видимо, должен ещё более проясниться. В связи с п. 1 возникает несколько проблем, которые с начала надо было бы решить именно для обсуждаемого двустрочечного случая.

Рассмотрим пространство $L^2(B(\alpha))$ на траекториях меры Бернулли $B(\alpha)$ с двумя состояниями. Как показано выше, для неравных вероятностей существует некоторое множество положительной меры, ограничение на которое меры Бернулли $B(\alpha)$ совпадает с мерой M_α (как мер на решетке путей пространства $\mathbb{Z}^2$- см.выше). Поэтому пространство L^2 по мере M_α изометрично и мультипликативно вложено в $L^2(B(\alpha))$. Изоморфизм между пространствами с мерами, индуцируемый соответствием RSK, о котором шла речь выше [10], означает наличие некоторого изометрического изоморфзима U между пространством $L^2(\mathbb{Z}^2)$ и его собственным подпространством, изоморфным $L^2(M_\alpha)$. Возникают три вопроса:

1) Описать степени этого оператора U и их комбинаторный смысл. Это есть любопытные итерации соответствия RSK, которые как будто ранее не встречались.

2) Описать фильтрацию подпрострнств, которые получаются при этих итерациях. Тривиально ли пересечение фильрации?

3) Нельзя ли аксиоматически описать оператор U, как единственный естественный изоморфизм пространств.

В дальнейших работах мы обобщим приведенные рассуждения на многострочечные (и многостолбцовые) таблицы Юнга и на бесконечные таблицы. Задача описания следов в самом общем виде (т.е.теорема Тома для симметрической группы и аналогичные теоремы для других групп и решеток) приобретают растуший интерес. Доказательства существования следов на алгебрах комбинаторного происхождения становится актуальной задачей.

Автор благоарит Н. Н. Васильева, М. В. Германскова и Ф. В. Петрова за помщь в оформлении работы.

Список литературы

1. J. Dixmier, *C^*-algebras.* North-Holland (1982).
2. O. Bratteli, *Inductive limit of finite dimensional C^*-algebras.* — TAMS **171** (1972), 195–234.
3. A. Vershik, *A theorem on the Markov periodic approximation in ergodic theory.* — J. Sov. Math. **28** (1982), 667–674.
4. А. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, No. 3 (1981), 526–529.
5. А. Вершик, А. Малютин, *Абсолют конечно порожденных групп: II. Лапласова и вырожденная части.* — Функц. анализ и его прил. **52**, вып. 3 (2018), 3–21.
6. А. Вершик, А. Малютин, Ф*азовый переход в задаче о границе-выход для случайных блужданий на группах.* — Функц. анализ и его прил. **49**, вып. 2 (2015), 7–20.
7. E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzahlbar unendlichen, symmetrischen Gruppe.* — Math. Z. **85** (1964), 40–61.
8. А. Вершик, *Одномерные центральные меры на нумерациях упорядоченных множеств.* — Функ.анал. и прил. **56**, вып. 4 (2022), 17–24.
9. A. Vershik, F. Petrov, *Central measures of continuous graded graphs: the case of distinct frequencies.* — European J. Math. **8** (2022) 393–410.
10. A. Vershik, S. Kerov, *The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted-Knuth algoritm.* — SIAM J. Alg. Discr. Methods **7**, No. 1 (1986), 116–124.
11. А. Вершик, Н. Цилевич, *Граф Шура–Вейля и теорема Тома.* — Функ.Анал и прил. **55**, вып. 3 (2021), 26–41.
12. D. Romik, P .Sniady, *Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles.* — Ann. Probab. **43**, No. 2 (2015), 682–737.
13. P. Sniady, *Robinson–Schensted–Knuth algorithm, jeu de taquin, and Kerov–Vershik measures on infinite tableaux.* — SIAM J. Discrete Math.**28**, No. 2 (2014), 598–630.

Vershik A. M. Spectrum and absolute of the graph of two-row Young diagrams.

For the simplest graph of two-rows Young diagrams we are giving the elementary presentation of the theory of the traces of AF-algebras and the central measures The implicit description of measures as Markov chains with two states is given. We emphasize the role of the notion of homogeneity in this context. We embedded the homogeneity central measures besides only one of them to the Bernoulli scheme and from the other side the isomorphism (RSK) of each of them with those schemes. We also give a geometrical condition of the centrality of the measure.

С-Петербургское отделение
математического института им. Стеклова
Российской Академии Наук;
С-Петербургский Государственный Университет;
Московский институт проблем передачи информации

Поступило 6 декабря 2022 г.

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru