

Э. А. Айрян, М. М. Гамбарян, М. Д. Малых,
Л. А. Севастьянов

**О ТРАЕКТОРИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С
КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ,
ВЫЧИСЛЕННЫХ ПО ОБРАТИМЫМ РАЗНОСТНЫМ
СХЕМАМ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Динамические системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

или, для краткости,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

правые части которых являются рациональными функциями с рациональными коэффициентами, могут быть исследованы численно при помощи различных разностных схем. Некоторые из них замечательны тем, что приближенное решение наследует свойства точного решения. Так, напр., если динамическая система обладает квадратичными интегралами, то ими обладают и симплектические схемы Рунге–Кутты в силу теоремы Купера [1]. Однако разностные схемы могут обладать алгебраическими свойствами, которые теряются при устремлении шага дискретизации Δt к нулю. К числу таких свойств относится обратимость, введенная в нашей статье [2].

Напомним, что разностный метод решения динамической системы описывается разностной схемой, то есть системой алгебраических уравнений, связывающих переменную \mathbf{x} с переменной $\hat{\mathbf{x}}$, интерпретируемой как значение в момент времени $t + \Delta t$, и шагом Δt . С алгебраической точки зрения координаты \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{x}}$ и Δt можно рассматривать как символные переменные. При численном интегрировании динамической системы, конечно, \mathbf{x} и Δt придают численные значения и ищут решение названной системы алгебраических уравнений относительно $\hat{\mathbf{x}}$.

Ключевые слова: метод конечных разностей, динамические системы, преобразования Кремоны.

Мы предложили называть разностную схему *обратимой*, если 1.) для точки \mathfrak{r} общего положения и любого значения шага Δt названная система уравнений имеет единственное решение относительно $\hat{\mathfrak{r}}$ и 2.) для точки $\hat{\mathfrak{r}}$ общего положения и любого значения шага Δt названная система уравнений имеет единственное решение относительно \mathfrak{r} .

При моделировании явлений классической механики появление этого свойства весьма естественно. Оно означает, что по начальным значениям можно однозначно определить конечные значения, а по конечным – начальные. На самом деле удивительно другое, при аккуратном рассмотрении нелинейных динамических систем это свойство приходится трактовать локально, опираясь на теорему Коши и теорему об обратной функции, а не глобально, во всем рассматриваемом пространстве, как в предложенном предопределении.

С алгебраической точки зрения обратимость означает, что разностная схема задает бирациональное преобразование между \mathfrak{r} и $\hat{\mathfrak{r}}$. Поскольку обе эти точки принадлежат n -мерному пространству, представляется вполне естественным рассматривать это преобразование как бирациональное преобразование n -мерного пространства, которое называют преобразованием Кремоны [3].

В [2] было отмечено, что всякая динамическая система с квадратичной правой частью допускает обратимую разностную схему, и исследовался вопрос о наследовании свойства периодичности приближенным решением, найденным по обратимой разностной схеме. При этом мы заметили, что часто точки приближенной траектории ложатся на некоторые гладкие кривые. Так иногда ведут себя решения, найденные по неявным схемам, сохраняющим точно интегралы движения [4], но в этом случае кривые, на которые ложатся точки приближенного решения, совпадают с интегральными кривыми. В настоящей статье мы исследуем приближенные траектории, которые получаются по обратимым схемам, и покажем, в каких случаях они являются алгебраическими.

§2. ОБРАТИМЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Для заданной динамической системы (1) с квадратичной правой частью можно составить обратимую разностную схему

$$\hat{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} = \mathfrak{F}\Delta t,$$

здесь правая часть \mathfrak{F} получается из правой части \mathfrak{f} исходной динамической системы путем замены квадратов x_i^2 на $x_i\hat{x}_i$, а смешанных членов $x_i\hat{x}_j$ – на $\frac{1}{2}(\hat{x}_ix_j + x_i\hat{x}_j)$. Полученная схема не только обратима, но обладает t -симметрией, естественной для механических задач. Эта процедура реализована в нашем пакете FDM [5], в котором выполнены все нижеследующие вычисления. Сам пакет и рабочий лист к настоящей статье размещены на <https://github.com/malykhmd/fdm>.

В численных методах вычисления обычно ведутся в десятичных дробях с плавающей запятой, то есть в стандартной реализации поля \mathbb{R} . Однако разностная схема – это система алгебраических уравнений, поэтому говоря о их алгебраических свойствах, мы должны работать в полях, вычисления в которых свободны от ошибки округления. Если коэффициенты правых частей динамической системы (1) являются числами из поля \mathbb{K} , равно как шаг Δt и начальные условия, то приближенное решение, найденное по обратимой схеме представляет собой набор точек из \mathbb{K}^n . В частности, при $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ мы получим последовательность рациональных точек.

Разумеется, при большом числе шагов вычисление этих точек становится весьма затратным, поэтому при вычислении сотен точек приближенного решения и приходится переходить к десятичным дробям и работать с ошибкой округления. Следует, однако, заметить, что, задавшись произвольным простым числом p , координаты \mathfrak{r}_0 можно принять за числа из $\mathbb{Z}/(p)$ и по схеме можно весьма быстро вычислить приближенное решение $\mathfrak{r}'_1, \mathfrak{r}'_2, \dots$ в этом факторкольце. При этом

$$\mathfrak{r}_k = \mathfrak{r}'_k \pmod{p}. \quad (2)$$

Восстановить по нему решение из \mathbb{Q} невозможно, однако некоторые алгебраические свойства решения из \mathbb{Q} это решение наследует. Разумеется, следует выбирать большое простое число, поскольку в противном случае можно столкнуться с делением на нуль.

§3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Проводя компьютерные эксперименты с обратимыми схемами, часто можно видеть, что точки приближенного решения $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots$ в \mathbb{R}^n выстраиваются в некоторые линии, отличные от интегральных кривых исходной динамической системы. Для краткости эти точки мы будем называть приближенной траекторией, найденной по обратимой схеме. Мы не будем соединять соседние точки отрезками и превращать

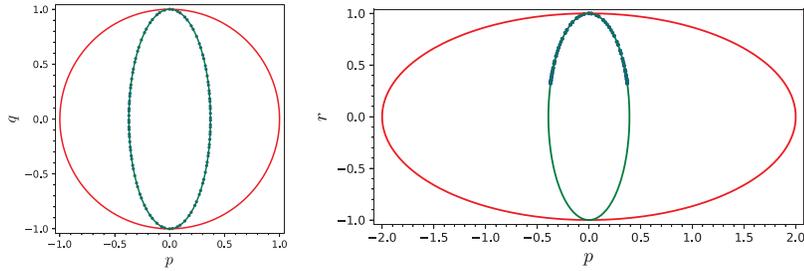


Рис. 1. Проекция траектории задачи (3) при $k = \frac{1}{2}$ на плоскости pq и pr : точками отмечено приближенное решение, красным – точная интегральная кривая, зеленым – приближенная интегральная кривая.

приближенную траекторию в ломаную. При этом близкие (в смысле топологии \mathbb{R}^n) друг к другу точки траектории могут соответствовать весьма далеким друг от друга моментам времени.

Пример 1. Рассмотрим осциллятор Якоби:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = qr, & \frac{dq}{dt} = -pr, & \frac{dr}{dt} = -k^2 pq, \\ p(0) = 0, & q(0) = 1, & r(0) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Решение этой задачи дается эллиптическими функциями Якоби [6]

$$p = \operatorname{sn} t, \quad q = \operatorname{cn} t, \quad r = \operatorname{dn} t,$$

что и оправдывает название. Здесь и далее для краткости мы опускаем зависимость от k , которому в численных примерах будем придавать значение $k = 1/2$. Эта система обладает двумя квадратичными интегралами

$$p^2 + q^2 = C_1, \quad k^2 p^2 + r^2 = C_2. \quad (4)$$

Поэтому в пространстве pqr интегральная кривая является алгебраической, а именно, эллиптической кривой. Обратимая схема, как видно на рис. 1, эти интегралы не сохраняет, однако точки приближенного решения лежат на некоторой кривой, проекции которой на плоскости pq и pr подозрительно похожи на эллипс. Для наглядности мы взяли очень большой шаг $\Delta t = 10$ и огромный интервал интегрирования, на которой помещаются десятки периодов точного решения. Точное

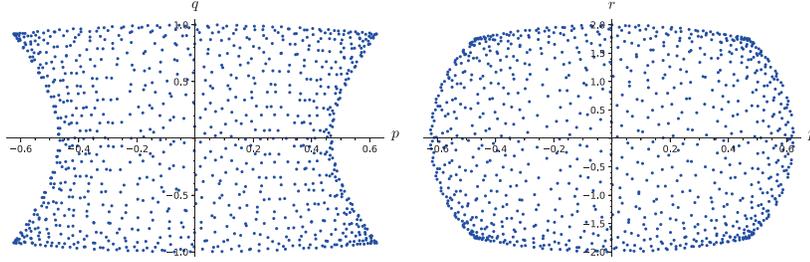


Рис. 2. Приближенное решение начальной задачи из примера 2, найденное по обратимой схеме, шаг $\Delta t = 1/10$.

решение и приближенное отличаются на рис. 1 весьма заметно, однако точки приближенного решения все равно выстраиваются вдоль некоторого овала и на плоскости pq , и на плоскости pr .

Однако так происходит далеко не всегда, точки решения не обязаны выстраиваться вдоль некоторой линии.

Пример 2. Широкий класс динамических систем с квадратичной правой частью представляет собой задача о движении твердого тела с одной закрепленной точкой [7]. Это движение описывается шестью переменными – тремя координатами вектора угловой скорости p, q и r относительно главных осей, проведенных через точку закрепления, и тремя направляющими косинусами одной из главных осей $\gamma, \gamma', \gamma''$. Эти переменные удовлетворяют системе шести автономных уравнений с квадратичной правой частью

$$A\dot{p} = (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \dots \quad (5)$$

и

$$\dot{\gamma} = r\gamma' - q\gamma'', \dots$$

где A, B, C – моменты инерции относительно главных осей, M – масса тела, а (x_0, y_0, z_0) – координаты центра тяжести. В случае Ковалевской

$$A = B = 2, C = 1, x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0,$$

Примем для определенности, что $M = 1, g = 10$, и в качестве начальных значений возьмем

$$(p, q, r) = (0, 1, 2), \quad (\gamma, \gamma', \gamma'') = (1, 0, 0).$$

Решение носит колебательный характер, но не является периодическим, его качественное описание см. в [8, гл. 9]. При этом точки приближенного решения плотно заполняют некоторое множество, проекция которого на координатные плоскости является двумерной областью с кусочно гладкой на вид границей (см. рис. 2).

Само понятие линия здесь требует обсуждения. Простейшая гипотеза состоит в том, что эти линии – алгебраические. В этом случае для их исследования можно развить разностный аналог теории определителей Лагунтинского [9, 10], переоткрытой в начале этого века [11–13].

§4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, НА КОТОРЫХ ЛЕЖАТ ТОЧКИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть даны многочлены $g_0, \dots, g_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, линейно независимые над \mathbb{R} . Множество всех гиперповерхностей вида

$$\sum_{i=0}^m a_i g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (6)$$

где a_0, \dots, a_m – числовые параметры из \mathbb{R} , среди которых хотя бы один отличен от нуля, называют линейной системой размерности m , линейная система размерности 1 называется пучком, линейная система размерности 2 называется сетью [3]. Если всякая траектория динамической системы (1) лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы (6), то

$$\sum_{i=0}^m a_i D^j g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$D = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

и поэтому определитель

$$\det(D^j g_i), \quad (i, j = 0, \dots, m),$$

равен нулю. Этот определитель будем называть определителем Лагунтинского линейной системы (6). Основная теорема теории определителей Лагунтинского [13, th. 3] утверждает, что верно и частично обратное: если определитель Лагунтинского равен нулю, то динамическая система имеет рациональный интеграл, числитель и знаменатель которого выражаются через многочлены g_0, \dots, g_m и их производные.

Следует заметить, что сформулированное утверждение является не совсем обратным. Оно утверждает, что траектории попадают на линии уровня некоторой рациональной функции $\frac{h_1}{h_0}$ (где $h_0, h_1 \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$), то есть на гиперповерхности линейного пучка

$$a_0 h_0(\mathbf{x}) + a_1 h_1(\mathbf{x}) = 0,$$

а не исходной линейной системы (6).

Рассмотрим разностный аналог описанной ситуации: допустим, что всякая приближенная траектория динамической системы (1) лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы (6). Если величина шага Δt задана, то из любой точки \mathbf{x}_0 можно и притом единственным образом выпустить траекторию $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$. По предположению найдутся такие числа a_i , что

$$\sum_{i=0}^m a_i g_i(\mathbf{x}_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует, что определитель

$$\det(g_i(\mathbf{x}_j)) = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, m), \quad (7)$$

равен нулю. Будем называть этот определитель определителем Крeмоны. В разностном случае, обращение в нуль определителя Крeмоны является необходимым и достаточным для того, чтобы всякая приближенная траектория попадала на гиперповерхности системы (6).

Теорема 1. Пусть задана динамическая система вида (1), некоторая обратимая схема ее решения и положительный шаг Δt . Пусть задана линейная система вида (6). Если для любой приближенной траектории $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ системы (1) определитель Крeмоны (7) для линейной системы (6) равен нулю, то всякая приближенная траектория лежит на гиперповерхности системы (6).

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ – произвольное приближенное решение, тогда $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \dots$ – тоже приближенное решение, поэтому по условию теоремы

$$\det(g_i(\mathbf{x}_j)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m, j = k, k+1, \dots, k+m).$$

Положим для краткости

$$L_j = (g_0(\mathbf{x}_j), \dots, g_m(\mathbf{x}_j)).$$

Равенство (7) означает, что первая строка матрицы $(g_i(\mathbf{x}_j))$, то есть L_0 , является линейной комбинацией следующих m строк L_1, \dots, L_m .

Поэтому определитель матрицы, строками которой служат $L_0, L_1, \dots, L_{m-1}, L_{m+1}$, с точностью до мультипликативной константы совпадает с определителем матрицы $(L_m, L_1, \dots, L_{m-1}, L_{m+1})$, который равен нулю. Действуя так далее, видим, что определители матриц, строками которой служат L_j , всегда равны нулю. Составим из этих строк матрицу и выберем в ней базисный минор, размерность которого заведомо меньше $m+1$. Пусть базисными строками служат L_{j_1}, \dots, L_{j_r} , а базисными столбцами i_1, \dots, i_r . Тогда определитель

$$\det \begin{pmatrix} g_{i_1}(\mathbf{x}_{j_1}) & \cdots & g_{i_r}(\mathbf{x}_{j_1}) & g_i(\mathbf{x}_{j_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{i_1}(\mathbf{x}_{j_r}) & \cdots & g_{i_r}(\mathbf{x}_{j_r}) & g_i(\mathbf{x}_{j_r}) \\ g_{i_1}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{i_r}(\mathbf{x}) & g_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0$$

при подстановке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$. Раскрывая этот определитель по последней строке, получим уравнение вида (6), в котором коэффициент при $g_i(\mathbf{x})$ отличен от нуля. \square

Если каждое приближенное решение принадлежит некоторой гиперповерхности вида (6), то эти поверхности формируют некоторое семейство гиперповерхностей в n -мерном пространстве. Если это новое семейство является линейным пучком

$$g(\mathbf{x}) + ch(\mathbf{x}) = 0,$$

то отношение

$$\frac{g(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}$$

является рациональным интегралом рассматриваемой разностной схемы в смысле следующего определения.

Определение 1. *Функция $r(\mathbf{x})$ называется интегралом разностной схемы решения динамической системы, если оно постоянно на любом приближенном решении, найденном по этой схеме.*

Следует, однако, подчеркнуть, что в общем случае гиперповерхности, существование которых гарантирует теорема 1, не обязаны быть даже интегральными кривыми разностной схемы в смысле следующего определения.

Определение 2. Гиперповерхность $g(x) = 0$ называется интегральной для разностной схемы решения динамической системы, если всякое приближенное решение, имеющее с этой гиперповерхностью общую точку, лежит на этой гиперповерхности целиком.

Можно представить, что гиперповерхность $g(\mathbf{x}) = 0$, на которой лежит приближенное решение $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$, содержит точку \mathbf{x}'_0 , но не порожденное ею решение $\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1, \dots$, лежащее на гиперповерхности $g'(\mathbf{x}) = 0$ той же системы. Тем не менее, в условиях теоремы 1 можно доказать существование алгебраического интеграла у исходной динамической системы.

Теорема 2. Пусть задана динамическая система вида (1), некоторая обратимая схема ее решения. Пусть задана линейная система вида (6). Если для любой приближенной траектории $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ системы (1) и любого положительного шага Δt определитель Крэмона (7) для линейной системы (6) равен нулю, то система (1) допускает рациональный интеграл, числитель и знаменатель которого можно представить как линейную комбинацию g_0, \dots, g_m , их произведений и частных производных.

Доказательство. Поскольку определитель (7) равен нулю, равен нулю и определитель, первой строкой которого служит

$$(g_0(\mathbf{x}_0), \dots, g_m(\mathbf{x}_0)),$$

второй –

$$\left(\frac{g_0(\mathbf{x}_1) - g_0(\mathbf{x}_0)}{\Delta t}, \dots, \frac{g_m(\mathbf{x}_1) - g_m(\mathbf{x}_0)}{\Delta t} \right),$$

третьей –

$$\left(\frac{g_0(\mathbf{x}_2) + g_0(\mathbf{x}_0) - 2g_0(\mathbf{x}_1)}{\Delta t^2}, \dots, \frac{g_m(\mathbf{x}_2) + g_m(\mathbf{x}_0) - 2g_m(\mathbf{x}_1)}{\Delta t} \right)$$

и т.д. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ мы получим определитель матрицы, первой строкой которой будет

$$(g_0, \dots, g_m)$$

при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, второй – ее производная по t , то есть

$$(D(g_0), \dots, D(g_m))$$

при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, третьей – ее вторая производная по t , то есть

$$(D^2(g_0), \dots, D^2(g_m))$$

и т.д. В силу произвольности выбора точки \mathfrak{r}_0 это означает, что определитель Лагутинского относительно базиса g_0, \dots, g_m равен нулю. В силу теоремы Лагутинского [13, th. 3] этого достаточно для существования рационального интеграла, числителем и знаменателем которого служат миноры определителя Лагутинского. \square

В дискретном случае обращение в нуль определителя Кремоны линейной системы является необходимым и достаточным условием принадлежности траекторий гиперповерхностям этой системы. При $\Delta t \rightarrow 0$ определитель Кремоны превращается в определитель Лагутинского, его обращение в нуль достаточно для принадлежности траекторий гиперповерхностям некоторого пучка, вообще говоря, не принадлежащего исходной линейной системе. Впрочем, мы ни разу не столкнулись с этой ситуацией, когда тестировали метод Лагутинского на задачах из задачника А.Ф. Филиппова [14].

§5. ПРИМЕРЫ

Теорема 1 дает простой способ исследования приближенных траекторий динамических систем в тех случаях, когда они действительно ложатся на алгебраические кривые.

Пример 3. Обратимся к осцилятору Якоби (пример 1). По рис. 1 можно предположить, что всякая траектория, найденная по обратной схеме, должна лежать на цилиндрической поверхности вида

$$ap^2 + bq^2 + c = 0,$$

то есть принадлежать линейной системе размерности 2. Чтобы доказать это, мы применим теорему 1 при

$$g_0 = p^2, \quad g_1 = q^2, \quad g_2 = 1.$$

Мы взяли произвольную начальную точку $\mathfrak{r}_0 = (p_0, q_0, r_0)$, полагая p_0, q_0, r_0 – символьными переменными, в системе Sage в символьном виде вычислили две следующие точки решения – $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ как рациональные функции $p_0, q_0, r_0, \Delta t$ и составили определитель Кремоны

$$\det \begin{pmatrix} p_0^2 & q_0^2 & 1 \\ p_1^2 & q_1^2 & 1 \\ p_2^2 & q_2^2 & 1 \end{pmatrix},$$

который оказался равным нулю. Следовательно, решение $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots$ лежит на поверхности

$$\det \begin{pmatrix} p_0^2 & q_0^2 & 1 \\ p_1^2 & q_1^2 & 1 \\ p^2 & q^2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

или, после сокращения на несущественные множители,

$$(4 + k^2 q_0^2 \Delta t^2) p^2 + (4 - k^2 p_0^2 \Delta t^2) q^2 = 4p_0^2 + 4q_0^2. \quad (8)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ эта поверхность переходит в интегральную поверхность

$$p^2 + q^2 = c_1,$$

как и предсказывает теоремы 2.

Кажется, что это уравнение (8) задает сеть эллипсов на плоскости pq , но это не так. Это уравнение нетрудно привести к виду

$$\frac{4 + k^2 q_0^2 \Delta t^2}{4p_0^2 + 4q_0^2} p^2 + \frac{4 - k^2 p_0^2 \Delta t^2}{4p_0^2 + 4q_0^2} q^2 = 1$$

Полагая

$$c_1 = \frac{4 + k^2 q_0^2 \Delta t^2}{4p_0^2 + 4q_0^2},$$

можно переписать это уравнение в виде

$$c_1 p^2 + \left(c_1 - \frac{k^2 \Delta t^2}{4} \right) q^2 = 1.$$

Поэтому интегралом разностной схемы (опр. 1) будет

$$\frac{p^2 + q^2}{1 + \frac{k^2 \Delta t^2}{4} q^2},$$

который при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интеграл $p^2 + q^2$ динамической системы.

Аналогично, имеется и вторая поверхность, на которой лежат все точки решения, – поверхность

$$(4 + r_0^2 \Delta t^2) k^2 p^2 + (4 - p_0^2 \Delta t^2 k^2) r^2 = 4k^2 p_0^2 + 4r_0^2, \quad (9)$$

которая при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интегральную поверхность

$$k^2 p^2 + r^2 = c_2.$$

Уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{4 + r_0^2 \Delta t^2}{4k^2 p_0^2 + 4r_0^2} k^2 p^2 + \frac{4 - p_0^2 \Delta t^2 k^2}{4k^2 p_0^2 + 4r_0^2} r^2 = 1$$

или

$$c_2 k^2 p^2 + \left(c_2 - \frac{\Delta t^2}{4} \right) r^2 = 1,$$

где

$$c_2 = \frac{4 + r_0^2 \Delta t^2}{4k^2 p_0^2 + 4r_0^2}.$$

Поэтому интегралом разностной схемы будет

$$\frac{k^2 p^2 + r^2}{1 - \frac{\Delta t^2}{4} r^2},$$

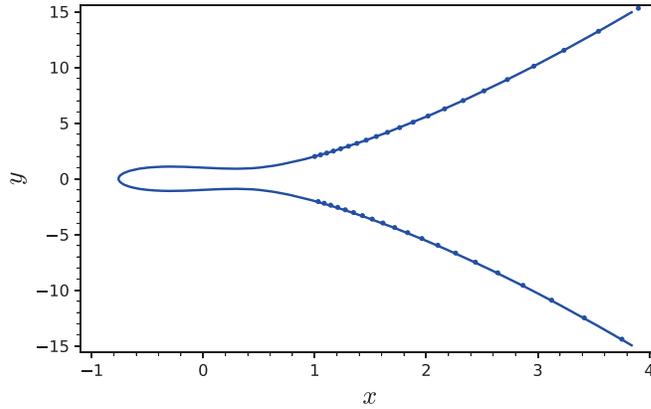
который при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интеграл $k^2 p^2 + r^2$ непрерывной системы.

Таким образом, всякая приближенная траектория лежит на эллиптической кривой, представляющей собой пересечение двух цилиндров (8) и (9), принадлежащих двум линейным пучкам.

Если размерность линейной системы, гиперповерхностям которой, как мы предполагаем, принадлежат траектории, велика, то вычисление определителя Кремоны как рациональной функции начальных данных становится слишком трудоемкой операцией. Существенно сократить ее трудоемкость можно двумя способами.

Во-первых, из симметрии задачи или из каких то других соображений можно угадать линейную систему меньшей размерности. Поскольку такого рода угадывания могут быть ненадежными, их можно быстро проверить. Для этого достаточно вычислить определитель Кремоны (7) на одном частном решении в поле \mathbb{Q} или даже в поле Галуа. Обращение в нуль этого определителя является необходимым, но, конечно, не достаточным условием принадлежности траекторий гиперповерхности рассматриваемой линейной системы. Тем не менее, этот простой критерий позволяет сразу отбросить ошибочные предположения.

Во-вторых, можно предположить, что траектории в действительности лежат на гиперповерхностях некоторого линейного пучка, принадлежащего рассматриваемой линейной системе. Вычисляя несколько определителей второго порядка, можно найти явно этот пучок. Поэтому обоснование гипотезы сводится к применению теоремы 1 к известному пучку, то есть как рациональную функцию начальных данных придется считать определитель всего лишь 2-го порядка.

Рис. 3. Решение задачи (10), $\Delta t = 1/40$.

Пример 4. Начальная задача

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, & \frac{dy}{dt} = 6x^2 - \frac{1}{2}, \\ x(0) = 1, & y(0) = 2 \end{cases} \quad (10)$$

интегрируется при помощи двояко периодической \wp -функции Вейерштрасса и поэтому далее называется \wp -осциллятором. Точки решения, найденного по обратимой схеме, выстраиваются в некоторую линию, подозрительно похожую на эллиптическую кривую (т.е. кривую третьего порядка). Для того, чтобы доказать это на основе теоремы 1, нужно взять в качестве $\{g_i\}$ все мономы, порядок которых не превышает 3, и вычислить определитель Кремоны (7). К сожалению, для этого нужно в символьном виде сделать первые 8 шагов по обратимой схеме, рассматривая начальные данные x_0, y_0 и Δt как символьные переменные. Получаемые выражения оказываются слишком сложными, поэтому прямое применение теоремы 1 здесь невозможно.

Если учесть, что кривая, изображенная на рис. 3 симметрична относительно y -отражения, из списка $\{g_i\}$ можно удалить мономы, содержащие нечетные степени y . Это сводит исследование к вычислению определителя 6-го порядка. В [2, пример 5] было выписано явное выражение для эквипериодической кривой 3-го порядка. Левая часть этого выражения содержит характерные комбинации мономов:

$1728x^3 - 432y^2$, $xy^2 - x^2$, x и 1. Поэтому напрашивается гипотеза о том, что в качестве $\{g_i\}$ можно взять только эти многочлены. Тем самым задача сводится к вычислению определителя 4-го порядка. Мы смогли вычислить его на нескольких частных решениях и убедились в том, что на них он равен нулю. Однако вычислить его как рациональную функцию начальных данных нам все равно не удалось.

Поэтому мы сделали упрощающее предположение: допустим, что траектории лежат на кривых некоторого линейного пучка 3-го порядка. Возьмем точку $(1, 2)$ и найдем еще 3 точки выходящей из нее траектории, считая шаг Δt символьной переменной. По 6 точкам однозначно определим проходящую через них кубику вида

$$a_0 + a_1x + a_2(xy^2 - x^2) + a_3(1728x^3 - 432y^2) = 0.$$

Полученное выражение, обозначим его как h_1 , достаточно громоздко и поэтому здесь мы не будем выписывать его явно. Найденное выражение позволило изобразить кривую на рис. 3. Хорошо видно, что на эту кривую попали не только первые 4 точек, но и следующие за ними, даже те, которые получаются после полюса решения.

Аналогично, можно найти кубику h_2 , на которой лежат первые 6 точек траектории, выходящей из точки $(1, 3)$. Согласно сделанному предположению, всякая траектория должна лежать на кубике линейного пучка, два элемента которого – кубики h_1 и h_2 нам известны. Этот пучок, стало быть, нам известен:

$$a_1h_1(\mathbf{r}) + a_2h_2(\mathbf{r}) = 0. \quad (11)$$

Итак, исходная гипотеза эквивалентна предположению о том, что всякая траектория лежит на кубике вычисленного линейного пучка.

В силу теоремы 1 эта гипотеза эквивалентна утверждению о том, что определитель Кремоны пучка (11) равен нулю. Это легко проверить, поскольку в случае пучка требуется вычислить определитель 2-го порядка. Мы проделали соответствующие вычисления в Sage и убедились в том, что этот определитель равен нулю. Таким образом, приближенные траектории \wp -осциллятора, найденные по обратимой схеме, лежат на кубиках линейного пучка.

Замечание. Полученный результат опровергает гипотезу, высказанную нами в [2, пример 5] на основе компьютерных экспериментов.

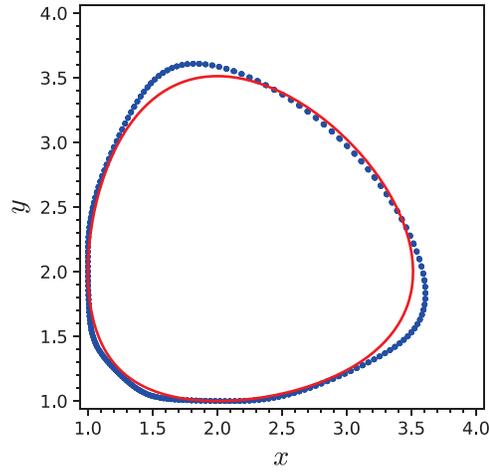


Рис. 4. Решение задачи (12) на интервале $0 < t < 500$, взято 10^3 точек. Сплошной линией изображена интегральная кривая для точного решения.

Оба рассмотренные примеры показывают, что точки траекторий осцилляторов, интегрируемых в эллиптических функциях, выстраиваются вдоль эллиптических кривых. Мы полагаем, что это должно позволить построить дискретный аналог теории эллиптических функций.

Не следует думать, что всякий раз, как точки приближенной траектории выстраиваются в линию, эта линия является алгебраической.

Пример 5. Как показывают компьютерные эксперименты, точки траектории системы Вольтерры-Лотки выстраиваются в некоторую линию. На рис. 4 показаны точки решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(y-2), & \frac{dy}{dt} = (x-2)y, \\ x(0) = 1, & y(0) = 2 \end{cases} \quad (12)$$

найденные по обратимой схеме. Допустим, что эти линии являются алгебраическими, тогда в силу теоремы 2 система Вольтерры-Лотки имеет рациональный интеграл, что невозможно, поскольку эта система

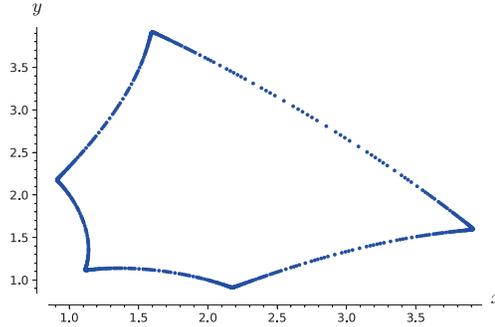


Рис. 5. Решение задачи (12). Взят критический случай, когда рассматривается интервал $0 < t < 500$, на котором берется 740 точек.

имеет трансцендентный интеграл

$$-(x + y) + 2 \ln xy = C.$$

При малом шаге на плоскости xy получаются овалы, похожие на трансцендентные интегральные кривые этой задачи. При слишком больших шагах получаются очень большие значения, что существенно затрудняет построение графиков. Между этими двумя случаями лежит очень необычный критический, когда точки приближенного решения выстраиваются в линию с изломами (рис. 5). Это означает, что линии, на которых лежат точки приближенных траекторий, могут иметь особые точки, которые уходят в комплексную область при $\Delta t \rightarrow 0$.

Не следует думать, что наличие полиномиальных интегралов у динамической системы гарантирует существование линейной системы, на гиперповерхности которой попадают приближенные траектории.

Пример 6. Обратимся к динамической системе, описывающей движение твердого тела в случае Ковалевской (пример 2). В этом случае имеется 3 квадратичных интеграла и еще один 4-го порядка. Если бы траектории, найденные по обратимой схеме, лежали на гиперповерхностях 4-го порядка, то определитель Кремены этой линейной системы был бы равен нулю. Мы взяли большое простое число $p = 19973$ и вычислили частное решение начальной задачи над полем $\mathbb{Z}/(19973)$ и на нем определитель Кремены (7). Оказалось, что он не равен нулю.

Поэтому точки траектории, найденные по обратимой схеме, не могут лежать на гиперповерхностях 4-го порядка.

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Динамические системы с квадратичной правой частью допускают аппроксимацию обратимыми разностными схемами. В настоящей статье нам на пути обобщения метода Лагутинского удалось предложить необходимые и достаточные критерии того, что траектории принадлежат гиперповерхностям заданной линейной системы.

Обратимые схемы выделяются среди других явных схем тем, что они не вносят в динамическую систему диссипацию или антидиссипацию. Поэтому при аппроксимации классических осцилляторов точки приближенного решения выстраиваются на фазовом пространстве в некоторые линии. Развитый метод позволил доказать, что 1.) в случае осцилляторов, интегрируемых в эллиптических функциях, эти линии являются эллиптическими кривыми и что 2.) в случае системы Вольтерры-Лотки эти линии не являются алгебраическими.

В тех случаях, когда движение имеет более сложный характер, как, напр, в случае Ковалевской движения твердого тела, точки приближенного решения плотно заполняют некоторую область пространства, которую никак нельзя назвать линией. Поскольку задача богата квадратичными алгебраическими интегралами, мы ожидали, что эта область является куском квадратики, но оказалось, что это не так. Точки траектории, найденные по обратимой схеме, не могут лежать даже на гиперповерхностях 4-го порядка.

Благодарности. Мы благодарны М. Петковшеку (Люблянский университет, Словения), обратившему наше внимание на возможность построения дискретного аналога теории определителей Лагутинского на конференции по компьютерной алгебре, которая проходила в Москве в 2017 г. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11- 20257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Hairer, G. Wanner, Ch. Lubich, *Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, Springer, Berlin Heidelberg New York (2000).

2. А. Баддур, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов, *О разностных схемах, аппроксимирующих дифференциальные уравнения первого порядка и задающих проективные соответствия между слоями*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **507** (2021), 157–172.
3. F. Severi, *Lezioni di geometria algebrica*, Angelo Graghi, Padova (1908).
4. V. P. Gerdt, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Yu Ying, *On the properties of numerical solutions of dynamical systems obtained using the midpoint method*. — Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science **27**, No. 3 (2019), 242–262.
5. А. Баддур, М. М. Гамбарян, Л. Гонсалес, М. Д. Малых, *О реализации численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений в системах компьютерной алгебры*. — Программирование (2023).
6. Ю. С. Сикорский, *Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике*, ОНТИ, М.-Л. (1936).
7. В. В. Голубев, *Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки*, ГТТИ, Москва (1953).
8. В. В. Козлов, *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, РХД, Москва-Ижевск (2000).
9. М. Н. Лагутинский, *Приложение полярных операций к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде*. — Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. **12** (1911), 111–243.
10. М. Н. Лагутинский, *О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальных алгебраических уравнений*. — Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. **13** (1912), 200–224.
11. C. Christopher, J. Llibre, J. Vitório Pereira, *Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields*. — Pacific J. Math. **229**, No. 1 (2007), 63–117.
12. G. Chéze, *Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time*. — Journal of Complexity **27**, No. 2 (2011), 246–262.
13. М. Д. Малых, *Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского*. — Вестник НИЯУ МИФИ **5**, No. 24 (2016), 327–336.
14. М. Д. Малых, Юй Ин, *Методика отыскания алгебраических интегралов дифференциальных уравнений первого порядка*. — Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика **26**, No. 3 (2018), 285–291.

Ayryan E. A., Gambaryan M. M., Malykh M. D., Sevastyanov L. A. On the trajectories of dynamical systems with quadratic right sides, calculated by reversible difference schemes.

Approximate trajectories of dynamic systems described by ordinary differential equations with quadratic right sides, found by reversible schemes, are considered. These schemes are notable for the fact that the transition from layer to layer is described by Cremona transformations, which gives

a large set of algebraic properties. On the way of generalizing the theory of Lagutinski determinants, the necessary and sufficient condition of belonging of approximate trajectories to the hypersurfaces of given linear systems was found. When approximating classical oscillators integrated in elliptic functions, the points of the approximate solution line up on phase space in some lines that are elliptic curves. Their equations are written explicitly for the Jacobi oscillator. In the case of the Volterra-Lotka system, these points line up in lines that are not algebraic. For the Kowalevski case of solid motion, it has been proven that the points of the approximate solution cannot lie even on hypersurfaces of the 4th order.

Объединённый институт ядерных исследований; Поступило 28 сентября 2022 г.
Государственный университет “Дубна”,
141980 г. Дубна Московской обл., Россия
E-mail: ayrjan@jinr.ru

Объединённый институт ядерных исследований, Дубна
E-mail: mmalykh@jinr.ru

Российский университет дружбы народов;
Объединённый институт ядерных исследований,
Дубна, Московская область, 141980
E-mail: malykh_md@pfur.ru

E-mail: sevastianov-la@rudn.ru