УДК 517.9

Пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны волн шепчущей галереи. Бабич В. М., Бабич М. В. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 5–19.

Статья посвящена построению разложения пространственно временного лучевого метода (ПВЛМ) в случае волн шепчущей галереи. Рассматривается также комплексный вариант ПВЛМ -разложения, описывающий соответствующий класс квазифотонов.

Библ. – 7 назв.

УДК 517.9

Операторы Штурма–Лиувилля с $W^{-1,1}$-матричными потенциалами. Грановский Я. И., Маламуд М. М. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 20–39.

В работе исследуется спектральная структура реализаций матричного трехчленного оператора Штурма–Лиувилля

$$\mathcal{L}(P,Q,R)y := R^{-1}(x)\big(-(P(x)y')' + Q(x)y\big), \qquad y = (y_1,\dots,y_m)^\top,$$

с сингулярным потенциалом $Q(\cdot) = Q(\cdot)^*$ на полуоси и оси. Показывается, что в случае $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ и некоторых условиях на коэффициенты $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$, неотрицательный спектр реализации Дирихле L^D (и других самосопряженных реализаций) является лебеговским постоянной кратности m. В частности, оператор Шредингера с матричным потенциалом $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ имеет на полуоси $\mathbb{R}_+$ лебеговский спектр постоянной кратности m. Этот результат применяется к выражению Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}(P,Q,R)$ с дельта-взаимодействиями на оси $\mathbb{R}$. Показано, что если минимальный оператор $L := L_{\min}$ в $L^2(\mathbb{R};R;\mathbb{C}^m)$ самосопряжен, то при условии $Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ неотрицательный спектр оператора L является лебеговским на полуоси $\mathbb{R}_+$ постоянной кратности $2m$. В частности, если минимальный оператор Шредингера $\mathbf{H}$ на оси с потенциальной матрицей $Q(\cdot) = Q_1(\cdot) + \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\delta(\cdot - x_k)$, самомопряжен, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, то его неотрицательный спектр является лебеговским постоянной кратности $2m$ при условиях $Q_1(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

Библ. – 21 назв.

УДК 517.951

Асимптотические свойства решений одного ультрагиперболического уравнения. Демченко М. Н. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 40–64.

Рассматривается ультрагиперболическое уравнение в евклидовом пространстве, являющееся обобщением уравнения Клейна–Гордона–Фока. Изучается поведение решений на бесконечности при удалении точки вдоль времениподобных направлений. Обсуждается вопрос существования решения: для заданной асимптотики на бесконечности строится соответствующее решение уравнения.

Библ. – 9 назв.

УДК 517.982.25, 517.983.243

Об унитарных инвариантах семейства одномерных подпространств. Кориков Д. В. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 65–68.

В работе приводится полная система числовых унитарных инвариантов конечного семейства одномерных подпространств гильбертова пространства. Инварианты суть углы между подпространствами и суммами подпространств, входящих в семейство.

Библ. – 4 назв.

УДК 517.9

О характеристических определителях граничных задач для систем типа Дирака. Лунев А., Маламуд М. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 69–120.

Изучаются асимптотические свойства спектра граничных задач для следующей $n \times n$-системы типа Дирака

$$y' + Q(x)y = i\lambda B(x)y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_n), \quad x \in [0, \ell],$$

на конечном отрезке $[0,\ell]$ с общими регулярными граничными условиями $Cy(0)+Dy(\ell)=1$, где $C,D\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Здесь $Q=(Q_{jk})_{j,k=1}^{n}\in L^1([0,\ell];\mathbb{C}^{n\times n})$ – потенциальная матрица и

$$B=\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)=B^*\in L^1([0,\ell];\mathbb{R}^{n\times n})$$

– диагональная "весовая" матрица. При $n=2m$ и $B(x)=\operatorname{diag}(-I_m,I_m)$ эта система эквивалентна $n\times n$-системе Дирака.

Показывается, что при условии $\operatorname{supp}(Q_{jk})\subset\operatorname{supp}(\beta_k-\beta_j)$ разность характеристических определителей $\Delta_Q(\,\cdot\,)$ и $\Delta_0(\,\cdot\,)$ изучаемой и "невозмущенной" ($Q\equiv 0$) граничных задач является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции,

$$\Delta_Q(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int\limits_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u)e^{i\lambda u}\,du,\quad g\in L^1[\widetilde{b}_-,\widetilde{b}_+].$$

Этот результат справедлив для произвольных граничных условий и произвольной диагональной матрицы $B(\cdot)=B(\cdot)^*$.

Это представление применяется для доказательства того, что характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$ всегда является функцией класса A экспоненциального типа, ограниченной на действительной оси. Также находятся условия, гарантирующие, что $\Delta_Q(\,\cdot\,)$ – функция типа синуса и дается точная асимптотика его нулей (собственных значений задачи) в этом случае.

Показывается также, что если элементы матрицы $B(\,\cdot\,)$ меняют знак, то даже в случае регулярных граничных условий в ситуации общего положения спектр распадается на две ветви:

собственные значения "хорошей" ветви лежат в горизонтальной полосе и близки к таковым у "невозмущенной задачи", а собственные числа "плохой" ветви имеют ненулевую плотность и уходящие в бесконечность мнимые части. Этот эффект иллюстрируется на конкретном 2×2-примере.

Библ. – 37 назв.

УДК 517.9

Собственные функции существенного спектра для оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робена–Неймана. Лялинов М. А., Федоров Н. С. — В кн.: Математич еские вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 121–134.

В работе изучалось задача о собственных функциях существенного спектра оператора Лапласа в угловой области с граничным условием Робена на верхней грани и граничным условием Неймана на нижней грани. Собственные функции данного оператора могут быть интерпретированы как волны вблизи пологого берега водоема. В работе рассматривался случай отрицательной части спектра оператора Лапласа. Собственные функции получены в виде интеграла Зоммерфельда. Вычислена асимптотика вдали от вершины клина, которая может быть интерпретирована как поверхностная волна, амплитуда которой во внутренности клина и на его нижней границе убывает экспоненциально при удалении от вершины клина. На верхней границе амплитуда данной поверхностной волны ограничена на любом удалении от вершины клина. Выделен случай некоторых специальных углов раствора клина, в котором собственные функции могут быть выражены через элементарные функции.

Библ. – 11 назв.

УДК 517.98

Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю внутренней лакуны. Мишулович А. А. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 135–175.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ изучается эллиптический дифференциальный оператор второго порядка вида $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с периодическими коэффициентами. Изучается поведение при малом ε полугруппы $e^{-A_\varepsilon t}$, $t > 0$, срезанной спектральным проектором оператора A_ε на интервал вида $[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty)$. Здесь $\varepsilon^{-2}\lambda_+$ — правый край спектральной лакуны оператора A_ε. Получена аппроксимация “срезанной” полугруппы по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с погрешностью $O(\varepsilon)$, а также более точная аппроксимация при учете корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ (после выделения множителя $e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2}$). Результаты применяются к усреднению решения задачи Коши $\partial_t v_\varepsilon = -A_\varepsilon v_\varepsilon$, $v_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon$, с начальным данным f_ε из специального класса.

Библ. – 24 назв.

УДК 517.956.8:517.956.328

Асимптотический анализ спектра квантового волновода с широким “окном” Неймана в свете механики трещин. Назаров С. А. — В кн.:

Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 176–237.

Выведены разнообразные асимптотические представления собственных чисел из дискретного спектра краевой задачи для оператора Лапласа в единичной полосе с условиями Дирихле на ее боковых сторонах всюду, кроме отрезка длиной $2\ell > 0$, на котором поставлены условия Неймана (плоский квантовый волновод с "окном"). Поскольку кратность дискретного спектра неограниченно возрастает при $\ell \to +\infty$, существует монотонная неограниченная последовательность критических полудлин $\{\ell_m^*\}$, при которых у оператора задачи возникает пороговый резонанс, характеризующийся наличием нетривиального ограниченного решения, захваченной или почти стоячей волны, и провоцирующий различные околопороговые спектральные аномалии. Исследовано качество пороговых резонансов и получены асимптотические формулы для величин ℓ_m^* при больших номерах m. Анализ сопровождается систематическим применением методов механики разрушения.

Библ. – 58 назв.

УДК 517.958

Метод вычисления матрицы рассеяния для акустических дифракционных решеток. Пламеневский Б. А., Порецкий А. С., Сарафанов О. В. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 238–252.

Рассматривается двумерная отражательная акустическая дифракционная решетка. Сформулирован и обоснован метод приближенного вычисления матрицы рассеяния плоских волн на периодической границе такой решетки. С этой целью задача на решетке сводится к задаче во вспомогательном волноводе, для которого обобщается известный метод вычисления волноводных матриц рассеяния. Предложенный метод нечувствителен к наличию в решетке поверхностных волн.

Библ. – 9 назв.

УДК 517.9

Сосредоточеные в окрестности геодезических решения и задача В. А. Фока в $3D$. Попов М. М. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 253–266.

Рассматривается трехмерная задача о коротковолновой дифракции на компактном теле с гладкой, строго выпуклой поверхностью. Особый интерес представляет окрестность границы свет-тень, образованной геометрическим местом точек касания лучей падающей волны с поверхностью тела. В двумерном случае такая задача была исследована впервые академиком В. А. Фоком. В трехмерном случае возникают дополнительные трудности: 1) геодезические на поверхности тела, вдоль которых скользит дифракционное поле, обарзуют каустики и 2) сами геодезические не являются плоскими кривыми (обладают кручением). В работе предложено асимптотическое решение задачи в виде суперпозиции (интеграла) локализованных в трубчатой окрестности геодезических решений волнового уравнения, позволяющих обойти эти дополнительные трудности.

Библ. – 6 назв.

УДК 517.9

Волны соскальзывания в теневой зоне трехмерной задачи В. А. Фока. Попов М. М. — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 52 (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 516) СПб., 2022, с. 267–274.

Статья является продолжением моей работы этого тома, в которой решена задача В. А. Фока в трехмерном случае – истичнике волн соскальзывания. Основной результат данной работы – начальные данные для волн соскальзывания, распространяющихся в затененной области поверхности Σ рассеивателя. Они порождаются отраженной волной в решении задачи В. А. Фока.

Библ. – 7 назв.