Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

М. М. Попов

ВОЛНЫ СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В ТЕНЕВОЙ ЗОНЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ В. А. ФОКА

§1. Введение

Статья посвящена развитию предложенной в работах [1–3] новой концепции поверхностных волн интерференционной природы, распространяющихся вдоль гладких поверхностей, вложенных в трехмерное эвклидово пространство. Задача В. А. Фока [4] о коротковолновой дифракции набегающей волны на компактное тело в $3D$ с гладкой, строго выпуклой поверхностью Σ является естественным источником волн соскальзывания в затененной поверхности тела.

Исходным пунктом развиваемого метода является поток геодезических кривых на Σ, вдоль которых скользит поверхностная волна. Поскольку поверхность тела является вложенной в объемлющее эвклидово пространство, каждая геодезическая на Σ может рассматриваться как гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$.

Поток геодезических описываем в виде вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(s,\gamma)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор в $\mathbb{R}^3$, s – длина дуги геодезической, γ – параметр, выделяющий геодезическую в потоке. В задаче Фока поток строится следующим образом. Каждая геодезическая стартует из точки касания падающего на Σ луча в направлении его распространения, а длина дуги s отсчитывается от этой точки. Обозначим через $\Gamma(\gamma)$ границу свет-тень на Σ, образованную точками касания лучей. В качестве параметра γ можно взять ее длину дуги. Далее будем полагать, что $\Gamma(\gamma)$ также является гладкой кривой на Σ, так что Γ и поле направлений на ней однозначно определяет геодезический поток $\vec{r}(s,\gamma)$. Этот же поток, продолженный в затененную часть поверхности Σ, порождает там волны соскальзывания. Источником волн соскальзывания является отраженная волна в зоне Фока.

Ключевые слова: коротковолновая асимптотика, волны соскальзывания в зоне тени, задача Фока.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 20-0100627-А-М.

Цель работы состоит в согласовании построенных независимо асимптотик волн соскальзывания в зоне Фока и вне ее, см. [5] и [3] соответственно. Для этого достаточно осуществить это для произвольно выбранной геодезической, скажем $\gamma = \gamma_0$ из потока. Глобальные формулы волнового поля получаются суперпозицией (точнее интегрированием) результатов по параметру γ.

§2. Отраженная волна в трехмерной задаче В. А. Фока

Решение задачи Фока в $3D$ изложено в работе [5]. В этом параграфе приводятся формулы из нее, необходимые в дальнейшем.

Предполагается, что волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta U + k^2 U = 0$ и краевому условию Дирихле на границе Σ рассеивателя. Волновое число k считается большим параметром задачи. Рассматривается окрестность точки касания поверхности Σ лучом набегающей волны, из которой стартует геодезическая $\vec{r}_0(s)$ из потока $\vec{r} = \vec{r}(s,\gamma)$.

В трубчатой окрестности центральной геодезической $\vec{r}_0(s)$ вводятся локальные координаты s, q, n формулой

$$\vec{R} = \vec{r}_0(s) + q\vec{e}(s) + n\vec{n}(s). \tag{1}$$

Здесь $\vec{R} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ – радиус вектор в объемлющем эвклидовом пространстве, $\vec{n}(s)$ – единичный вектор главной нормали геодезической, как кривой в R^3, $\vec{e}(s)$ – единичный вектор бинормали $\vec{e}(s) = \left[\frac{d\vec{r}_0(s)}{ds}, \vec{n}(s)\right]$. Напомним, что $\vec{n}(s)$ совпадает с нормалью к Σ. Окрестность точки касания $\vec{r}_0(0)$ на Σ, называемая зоной Фока, где и рассматривается процесс дифракции, определяется следующими масштабами координат, введенными формулой (1): $k^{1/3}s = 0(1)$, $k^{2/3}n = 0(1)$, $k^{1/2}q = 0(1)$ при $k \to \infty$.

Далее будем использовать растянутые (внутрение) координаты возникающего погранслоя

$$\begin{cases} \sigma = k^{1/3} s \frac{1}{2}(2\mathbb{K}(0))^{2/3}; \xi = k^{1/2}q; \\ \nu = (2K(0))^{1/3}\ k^{2/3}\Big(n + \frac{\varkappa(0)}{2}\frac{\zeta^2}{k}\Big). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $K(0)$ – кривизна геодезической $\vec{r}_0(s)$, $\varkappa(0)$ – кривизна нормального сечения Σ, ортогональному касательному вектору $\frac{d\vec{r}_0(s)}{ds}$ в точке $s = 0$.

В рассматриваемом волновом поле U выделяется быстро осциллирующий множитель $U = \exp(iks)W$ и функция ослабления W отыскивается в виде ряда по степеням $k^{-1/6}$

$$W = W_0 + k^{-1/6}W_1 + k^{-1/3}W_2 + \dots \tag{3}$$

В работе [5] построены два члена асимптотики отраженной волны W_0^{ref}, W_1^{ref}, которые будут рассматриваться далее

$$W_0^{\mathrm{ref}} = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} \Big[-\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) \Big], \tag{4}$$

$$W_1^{\mathrm{ref}} = -i\frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi T(0)}{(2K(0))^{1/3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} (\zeta - \nu) \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu).$$

В приведенных формулах $v(\zeta)$, $w_1(\zeta - \nu)$, $w_2(\zeta)$ функции Эйри в определении Фока, $T(0)$ – кручение центральной геодезической $T(s)$ в точке касания луча. Функция Эрмита $\Phi(\xi)$ обеспечивает локализацию асимптотики отраженной волны в трубчатой окрестности геодезической $\vec{r}_0(s)$ и имеет вид

$$\Phi(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}_{(0)}\xi^2), \quad \mu_{(0)} = \varkappa_{(0)}K(0) - T^2_{(0)}, \tag{5}$$

при $\mu_{(0)} \geqslant \mathrm{const} > 0$.

Отметим, что на отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ переменной ζ функции Эйри в формулах (4) осциллируют. С другой стороны, при построении последующих членов асимптотики функции ослабления (3) возрастают степени множителей $(\xi - \nu)$ при $w_1(\xi - \nu)$ и ее производной. Поэтому для сходимости интегралов по ζ требуется дформировать контур интегрирования, пользуясь аналитичностью подинтегральных функций комплексной переменной ζ, см. по этому поводу монографию [7].

§3. Регуляризация интегрлов для отраженной волны

Расщепим отрицательную полуось на комплексной плоскости ζ на два луча e_1 и e_2, полагая

$$l_1 : \zeta \in (-\infty e^{\frac{2\pi i}{3}}, 0], l_2 : \zeta \in (-\infty e^{-\frac{2\pi i}{3}}, 0], \tag{6}$$

положительную полуось обозначим для удобства как $l_3 : \zeta \in [0, +\infty)$. Воспользуемся следующей формулой

$$\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) = \frac{1}{2i} \Big\{ w_1(\zeta - \nu) - \frac{w_2(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) \Big\},$$

вытекающей из соотношения $2iv(\zeta) = w_1(\xi) - w_2(\xi)$ между функциями Эйри. Далее интегралы для членов асимптотики W^{ref} отраженной волны распадаются на сумму трех интегралов. Для W_0^{ref} получаем:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_{(l_1)} d\zeta \frac{-1}{2i} \frac{w_2(\zeta)}{w_1(\xi)} w_1(\zeta - \nu) e^{i\sigma\zeta}, \\ J_2 &= \int\limits_{(l_2)} d\zeta \frac{1}{2i} w_1(\zeta - \nu) e^{i\sigma\zeta}, \\ J_3 &= \int\limits_{(l_3)} d\zeta \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu) e^{i\sigma\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Каждый из трех интегралов сходится за счет экспоненциального убывания функций $w_2(\zeta)$, $w_1(\zeta - \nu)$ и $v(\zeta)$ соответственно.

Для выделения отдельных волн соскальзывания описанный контур аналитически “поднимается” в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\zeta > 0$, где расположены нули функции $w_1(\zeta)$ на луче $\arg\zeta = \frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. В результате в формуле для отраженной волны W^{ref} возникает сумма вычетов в корнях ζ_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$ функции Эйри $w_1(\zeta)$, каждый из которых приводит к отдельной волне соскальзывания.

Для двух первых членов асимптотики волны соскальзывания с номером p, локазизованной в окрестности $\vec{r}_0(s)$, формулы (2), (4), (7) приводят к следующему результату

$$\left.\begin{aligned} U_{0,p}^{\mathrm{ref}} &= -2\sqrt{\pi} i \Phi(\xi) \exp\{iks + ik^{1/3} s \frac{\zeta_p}{2} (2K_{(0)})^{2/3}\} \\ &\quad \times \frac{v(\zeta_p)}{w_1'(\zeta_p)} w_1(\zeta_p - \nu); \\ U_{1,p}^{\mathrm{ref}} &= 2\sqrt{\pi} \Phi(\xi) \frac{\xi T(0)}{2K_{(0)}^{1/3}} \exp\{iks + ik^{1/3} s \frac{\zeta p}{2} (2K(0))^{2/3}\} \\ &\quad \times \frac{v(\zeta_p)}{w_1'(\zeta_p)} (\zeta p - \nu) w_1(\zeta_p - \nu) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

с локализующей функцией $\Phi(\xi)$.

§4. Продолжение волн соскальзывания в область тени

Для продолжения волн соскальзывания из зоны Фока в тень требуется снять ограничение на малость длины геодезических, задаваемое условием $k^{1/3}s = 0(1)$ при $k \to \infty$. Как отмечалось, в нашем случае один и тот же геодезический поток $\vec{r}(s,\gamma)$, порожденный границей свет-тень падающей на тело волны, описывает волны соскальзывания как в зоне Фока, так и при условии $s = 0(1)$ в области тени на Σ. Этот факт позволяет воспользоваться результатами работы [3], а именно, применить подробно изложенную там технику непосредственно к исходному геодезическому потоку $\vec{r}(s,\gamma)$ при $s \geqslant 0$. При этом согласование асимптотических формул обоих типов осуществить при малых s, т.е. вблизи границы свет-тень на Σ. Подчеркнем, что изложенный в [3] процесс построения асимптотики волн соскальзывания содержит в формулах произвольные постоянные. Поэтому он не приводит к однозначному результату без согласования с источником волн соскальзывания. Этот же факт имеет место в методе суммирования гауссовых пучков, см. [5].

Ниже приводятся формулы для двух членов $U_p^{(2)}$ асимптотики волны соскальзывания с номером p, локазизованной в окрестности выделенной геодезической $\vec{r}_0(s)$. В этом пункте статьи мы вносим произвольные постоянные, которые возникают при построении волны соскальзывания, но были опущены в работе [3]:

$$U_p^{(2)} = \exp\left\{iks + ik^{1/3}\frac{1}{2}\zeta_p \int\limits_0^s (2K_{(s)})^2\,ds\right\}[V_0 + k^{-1/6}V_1 + 0(k^{-1/3})], \quad (10)$$

в которой функции V_0 и V_1 имеют вид

$$\begin{aligned} V_0 &= c_1(2K_{(s)})^{1/6}\Psi(s,\xi)w_1(\zeta_p - \nu), \\ V_1 &= -ic_1(2K_{(s)})^{1/6}\Psi(s,\xi)\frac{\xi T_{(s)}}{(2K_{(s)})^{1/3}}(c_3+\nu)w_1(\zeta_p - \nu). \end{aligned} \quad (11)$$

Постоянная c_1 возникла в общем решении дифференциального уравнения $2\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha}{\eta}\frac{d\eta}{ds}$ в [3]. Постоянная c_2 входит при построении экспоненциально убывающего при $|\xi| \to \infty$ решения уравнения типа – Шредингера $2i\frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{\partial^2\psi}{d\xi^2} - \mu(s)\xi^2\psi = 0$, которая обеспечивает локализацию асимптотики. Наконец, c_3 появляется при построении общего решения неоднородного уравнения для второго члена асимптотики V_1, образованного суммой частного решения неоднородного и однородного уравнений.

§5. Согласование асимптотик в окрестности границы свет-тень

Фактически предлагаемый процесс согласования двух типов асимптотик волн соскальзывания вблизи границы свет-тень задачи Фока состоит в фиксации произвольных постоянных в формулах (10), (11) из условия совпадения с формулами (8) при малых s.

Далее остановимся на вычислении главного члена в формулах (10), (11) при $s \to 0$. Разлагая кривизну $K(s)$ в ряд по степеням s, последовательно получаем $\eta(s) = (2K(0))^{1/3} + o(s)$;

$$\int\limits_0^s \eta^2(s)\,ds = (2K(0))^{2/3}s + o(s^2)$$

и приходим к факту согласования экспонент в формулах (8) и (10).

Особого рассмотрения требует соотношение между локализующими функциями $\Psi(s,\xi)$ и $\Phi(\xi)$, описываемые формулами различной аналитической структуры. Обратимся к технике построения $\Psi(s,\xi)$ в зоне Фока, т.е. при малых s. Комплекснозначные функции $Q(s)$ и $P(s)$ являются решениями уравнений в вариациях с постоянном коэффициентом $\mu(0) = \varkappa(0)K(0) - T^2_{(0)}$ и начальными условиями, приведенными ниже:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}Q(s) = P(s); \quad \frac{d}{ds}P(s) = -\mu(0)Q(s); \\ Q(0) = 1 + i0; \quad P(0) =) + i1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} Q(s) = \cos(\sqrt{\mu(0)}s) - i\sqrt{\mu(0)}\sin(\sqrt{\mu(0)}s); \\ P(s) = \sin(\sqrt{\mu(0)}s) + i\sqrt{\mu(0)}\cos(\sqrt{\mu(0)}s), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

откуда следует, что $\operatorname{Im}\frac{P(s)}{Q(s)} = \sqrt{\mu(0)} + o(s^2)$, $\operatorname{Re}\frac{P(s)}{Q(s)} = o(s)$ так, что главный член асимптотики функции $\Psi(s,\xi)$ при $s \to 0$ согласуется с функцией $\Phi(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu(0)}\xi^2)$. Поэтому постоянную c_2 следует положить равной единице.

Далее, формулы (8) для волны соскальзывания в зоне Фока получены с помощью вычетов в корнях функции Эйри $w_1(\zeta)$ – простые полюса. Это приводит к дополнительному множителю $-2\pi i \frac{v(\zeta_p)}{w_1'(\zeta_p)}$. Кроме того, формулы (11) содержат отсутствующую в равенствах (8) функцию $(2K(s))^{1/6}$. Поэтому постоянную c_1 берем в виде

$$c_1 = -2\sqrt{\pi} i (2K(0))^{-1/6} \frac{v(\zeta_p)}{w_1'(\zeta_p)}.$$

Наконец произвольную постоянную c_3 в (11) полагаем равной $c_3 = -\zeta_p$.

В результате для функций V_0 и V_1 получаем формулы, согласущиеся при малых s, т.е. вблизи границы свет-тень с (8):

$$V_0 = -2\sqrt{\pi} i \frac{2K(s)^{1/6}}{(2K(0))^{1/6}}\, \Psi(s,\xi) \frac{v(\zeta_p)}{w_1'(\zeta_p)}$$

$$V_2 = 2\sqrt{\pi} \frac{2K(s)^{1/6}}{(2K(0))^{1/6}}\, \Psi(s,\xi) \frac{T(s)}{(2K(s))^{1/3}} \frac{v(\zeta_p)}{w_1'(\zeta_p)} (\zeta_p - \nu) w_1(\zeta_p - \nu). \quad (14)$$

Приведенные формулы являются начальными данными для продолжения волн соскальзывания в область тени, возникающими в задаче В. А. Фока в трехмерном случае.

§6. Заключение

Согласование асимптотик волн соскальзывания в зоне Фока и в области тени на Σ детально описан для решений, локализованных в окрестности одной выделенной геодезической из исходного потока $\vec{r}(s,\gamma)$. Для получения глобальной асимптотики волн соскальзывания в теневой зоне поверхности рассеивателя необходимо построить локализованные решения с начальными данными (14) для каждой геодезической из их потока. В результате все решения приобретают зависимость от параметра γ.

Ответ дается суперпозицей – интегралом по γ – всех решений. Возникающий интеграл не имеет сингулярностей на каустиках геодезических и алгоритм его вычисления не зависит от положения на Σ точки наблюдения M. Он включает следующие шаги:

1) построение пучка геодезических, покрывающих некоторую окрестность точки M на Σ;

2) вычисление локальных координат s, q, n точки M для каждой геодезической из пучка;

3) суммирование вкладов в точку M всех геодезических из пучка.

Отметим, что именно таков алгоритм, использующийся в методе суммирования гауссовых пучков, см. [6].

Список литературы

1. M. M. Popov, *On theory of the surface wave propagation on a smooth, strictly convex surface embeded in* $\mathbb{R}^3$, Proceedings of DD 2019 Conference (2019), pp. 159–162.
2. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для гладких, строго выпуклых поверхностей, вложенных в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 301–313.
3. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа. Волны соскальзывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **506** (2021), 210–222.
4. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* — Советское радио, М., (1970).
5. М. М. Попов, *Сосредоточенные в окрестности геодезических решения и задача В. А. Фока в* $3D$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **516** (2022), 253–266.
6. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981), 195–216.
7. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* — Изд-во Ленинградского ун-та, Л., (1974).

Popov M. M. Greeping waves in the chadow area of the $3D$ Fock problem.

This paper is direct extension of the article [5] devoted to the exploration of the Fock's problem in 3D case. Namely, in the paper propagation of the creeping waves in the shadow area of the diffraction obstacle is studied. The creeping waves stem from the reflected wave in the solution of the problem in a vicinity of the light-shadow boundary on the surface of the diffraction obstacle and then they are prolonged into shadow area. The main results of the paper are the initial data for the prolongation procedure.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
192288, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 11 ноября 2022 г.