Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

М. М. Попов

СОСРЕДОТОЧЕНЫЕ В ОКРЕСТНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧА В. А. ФОКА В $3D$

§1. Введение

Рассматривается задача о коротковолновой дифракции плоской волны на компактном теле в трехмерном случае, границей которого является гладкая, строго выпуклая поверхность Σ. Основной интерес представляет волновое поле в окрестности границы свет-тень и далее в затененной части Σ ниже предельных лучей. Здесь волновое поле образовано волнами соскальзывания распространяющимися вдоль геодезических кривых на Σ.

В двумерном случае такая задача дифракции на строго выпуклом контуре впервые была исследована В. А. Фоком [1]. Она привела к результату, представляющему особый интерес с точки зрения приложений – описанию дифракционного поля вблизи Σ ниже уровня горизонта. В этом случае сам контур является геодезической кривой, лежащей в плоскости и, тем самым, не обладающей кручением.

В трехмерных задачах возникают дополнительные трудности. Во-первых, геодезические кривые обладают кручением и не лежат в плоскости, во-вторых, они образуют на Σ каустики, и поэтому возникает проблема фокусировок волнового поля на каустиках.

Изложенная в работах [2, 3] теория волн соскальзывания, распространяющихся вдоль гладкой поверхности, вложенной в $\mathbb{R}^3$, позволяет преодолеть указанные трудности трехмерных задач. Она приводит к формуле для волнового поля в виде интеграла по решениям волнового уравнения, локализованным в окрестности геодезических и не имеющих сингулярностей на каустиках. В результате получаем алгоритм расчета волнового поля, не зависящий от положения точки наблюдения, подобно тому, что имеет место в методе суммирования гауссовых пучков, см. например, [4].

Ключевые слова: поверхностные волны, коротковолновая асимптотика, волны соскальзывания, геодезические потоки.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 20-0100627-А-М.

Цель данной работы применить предложенную теорию к трехмерной задаче В. А. Фока, которая является естественным источником поверхностных волн соскальзывания в затененной части тела.

§2. Задача В. А. Фока в $3D$

Падающая на тело плоская волна $U^{\mathrm{inc}} = \exp(ikx)$, бегущая вдоль оси x декартовой системы координат в объемлющем пространстве, порождает на его поверхности Σ границу свет-тень. Последняя образована геометрическим местом точек, в которых лучи плоской волны касаются Σ, и представляет собой также гладкую кривую Γ. Обозначим через γ параметр, например, длину дуги Γ. В каждой точке Γ задаются направляющие векторы касательными к Σ лучами, которые, очевидно, параллельны оси x. Сама граница Γ света-тени и поле направлений на ней являются начальными данными для потока геодезических на Σ, вдоль которых скользит дифракционное поле. Поскольку Σ вложена в $\mathbb{R}^3$, поток геодезических можно описывать в виде $\vec{r} = \vec{r}(s, \gamma)$, где $\vec{r}$ радиус-вектор в $\mathbb{R}^3$, s – длина дуги геодезической, параметр γ выделяет геодезическую в потоке. Таким образом падающая плоская волна наряду с потоком геодезических, являются исходными данными для рассматриваемой нами задачи В. А. Фока в $3D$.

Полагаем далее, что волновое поле U удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + k^2)U = 0$ и, для определенности, краевому условию Дирихле на Σ. Излагаемые построения легко переносятся на условия Неймана. Волновое число k считается большим параметром задачи.

§3. Метрика в окрестности геодезических

Обозначим через $\vec{r}_0(s)$ некоторую, скажем, центральную геодезическую локального вблизи ее пучка из потока $\vec{r}_0(s) = \vec{r}(s, \gamma_0)$. В качестве репера возьмем три единичных вектора: касательной $\vec{t}_0(s) = \frac{d\vec{r}_0(s)}{ds}$, главной нормали $\vec{n}(s)$, и бинормали $\vec{e}(s) = [r_0(s), \vec{n}(s)]$. Вектор $\vec{n}(s)$, совпадающий с нормалью к Σ, направляем в сторону выпуклой части Σ, где рассматривается волновой процесс. Аффинная связность описывается уравнениями Френе

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = -K(s)\vec{n}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = K(s)\vec{t}_0 + T(s)\vec{e}; \quad \frac{d\vec{e}}{ds} = -T(s)\vec{n}, \tag{1}$$

так что кривизна $K(s)$ геодезической является положительной, $T(s)$ есть кручение.

Локальные координаты s, q, n вводятся формулой

$$\vec{R}(M) = \vec{r_0}(s) + q\vec{e}(s) + n\vec{n}(s), \qquad (2)$$

где $\vec{R}(M)$ – радиус-вектор точки M вблизи центральной геодезической. Они образуют регулярную систему координат в некоторой трубчатой окрестности $\vec{r_0}(s)$.

Метрический тензор g_{lm}, l, $m = 1, 2, 3$, следует из равенств (1), (2) и соотношения $dS^2 = (d\vec{R}, d\vec{R})$

$$g_{lm} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & 0 \\ g_{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

Явные формулы его элементов имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &\equiv g_{ss} = (1 + nK(s))^2| + q^2T^2(s) + n^2T^2(s); \\ g_{12} &\equiv g_{sq} = nT(s); \\ g_{13} &\equiv g_{sn} = -qT(s); \\ g &\equiv \det g_{lm} = (1 + nK(s))^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Соответствующий контровариантный тензор G^{lm} описывается равенством

$$G^{lm} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 & -g_{12} & -g_{13} \\ -g_{12} & g_{11} - g_{13}^2 & g_{12}g_{13} \\ -g_{13} & g_{12}g_{13} & g_{11} - g_{12}^2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Во вспомогательных координатах $\zeta^1 = s$, $\zeta^2 = q$, $\zeta^3 = n$ уравнение Гельмгольца записывается в компактной форме

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \left(G^{lm} \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial \zeta^m} \right) + k^2 U = 0. \qquad (6)$$

Ближайщая цель состоит в построении формального асимптотического (при $k \to \infty$) решения уравнения (6), сосредоточенного в малой окрестности центральной геодезической, т.е. экспоненциально убывающего при $|q| \to \infty$ при всех допустимых значениях длины дуги s. Это обстоятельство позволяет представить уравнение поверхности Σ вблизи центральной геодезической в виде $n = f(s, q)$, где $f(s, q)$ гладкая функция воих аргументов, которая может быть разложена по степеням q. Для строго выпуклой поверхности Σ ее уравнение вблизи $\vec{r_0}(s)$

представимо в виде

$$n = f(s, q) = -\frac{1}{2}\varkappa(s)q^2 + O(q^3), \tag{7}$$

где $\varkappa(s)$ есть кривизна нормального сечения Σ в точке $\vec{r}_0(s)$ плоскостью, ортогональной к $\vec{t}_0(s)$, причем $\varkappa(s) \geqslant \text{const} > 0$. Для построения нескольких первых членов асимптотики локализованного решения достаточно главного члена в разложении (7).

§4. Асимптотическое представление оператора Гельмгольца в зоне Фока

В двумерном случае, когда отсутствует координата q, зона Фока выделяется масштабными множителями для координат s и n, а именно, предполагается, что $k^{1/3}s = 0(1)$ и $k^{2/3}n = 0(1)$ при $k \to \infty$.

В трехмерном случае мы сохраняем эти масштабы, относительно координаты q полагаем $k^{1/2}q = 0(1)$.

В искомом решении U выделяется быстро осциллирующий множитель $U = \exp(iks)W$, где $W(s, q, n)$ обычно называют функцией ослабления. Затем все кооэффициенты в уравнении Гельмгольца (6) в координатах s, q, n разлагаются в ряды по их степеням. Далее собираются, с учетом масштабов, все слагаемые, имеющие одинаковый порядок по степеням большого параметра k. В статье мы будем рассматриваь три первых члена асимптотики локализованных решений. Они возникают лишь от старших производных и свободного члена, т.е. из выражения $X = gG^{lm}\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^l\partial\zeta^m} + k^2 gU$ с учетом равенства (7) при $s = 0$.

После сокращения на общий множитель $\exp(iks)$, для функции ослабления W последовательно получаем:

$$\left.\begin{aligned} k^{4/3} &: 2ik\frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + k^2 2nK(0)W, \\ k^{7/6} &: ik2qT(0)\frac{\partial W}{\partial n}; \\ k^1 &: \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} - k^2\varkappa(0)K(0)q^2 W. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Введем далее внутренние координаты σ, ξ, ν погранслоя Фока:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma = \eta k^{1/3} s; \quad \xi = \sqrt{k} q; \\ &\nu = \beta k^{2/3}\Big(n + \frac{\varkappa(0)}{2}\frac{\xi^2}{k}\Big); \\ &n = \frac{\nu}{\beta k^{2/3}} - \frac{1}{2}\varkappa(0)\frac{\xi^2}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Постоянные величины η и β подбираются так, чтобы в главном порядке $k^{4/3}$ получалось "параболическое" уравнение Леонтовича–Фока, а именно: $\beta = (2K(0))^{1/3}$, $\eta = \frac{1}{2}\beta^2$. Функцию W рассматриваем как сложно зависящую от s, q, n,

$$W = W(\sigma(s), \xi(q), \nu(n, \xi(q))). \tag{10}$$

Подстановка равенств (9), (10) в формулы (8) приводит к следующему асимптотическому представлению оператора Гельмгольца в зоне Фока

$$k^{4/3}\beta^2\{L_0 + k^{-1/6}\frac{1}{\beta}L_1 + k^{-1/3}\cdot\frac{1}{\beta^2}L_2 + O(k^{-1/2})\}W. \tag{11}$$

Явные формулы операторов в (11) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &L_0 = i\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \nu; \\ &L_1 = 2i\xi T(0)\frac{\partial}{\partial\nu}; \\ &L_2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \varkappa(0)K(0)\xi^2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Преобразование Фурье по σ (метод разделения переменных) позволяет представить L_0 в виде

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} l_0, \quad l_0 = \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - (\zeta - \nu).$$

§5. Рекуррентная цепочка уравнений для W

Функцию ослабления W ищем также в виде разложения по степеням $k^{-1/6}$

$$W = W_0 + k^{-1/6}W_1 + k^{-1/3}W_2 + O(k^{-1/2}). \tag{13}$$

Подстановка (13) в (11) приводит к рекуррентной системе уравнений для членов асимптотического ряда

$$\begin{aligned} &L_0W_0 = 0, \\ &L_0W_1 + \frac{1}{\beta}L_1W_0 = 0, \\ &L_0W_2 + \frac{1}{\beta}L_1W_1 + \frac{1}{\beta^2}L_2W_0 = 0, \text{и т.д.} \end{aligned} \tag{14}$$

Решение рассматриваемой задачи в зоне Фока содержит две волны; падающую $W^{\rm inc}$ и отраженную W^{ref}. Полное волновое поле W образовано их суммой $W = W^{\rm inc} + W^{ref}$. Оно должно удовлетворять краевому условию Дирихле. Каждая из двух волн должна быть решением системы (14). При этом нам нужны такие решения, которые были бы локализованы в окрестности $\vec{r}_0(s)$, т.е. экспоненциально убывали при $|q| \to \infty$, и не имели бы сингулярностей на каустиках геодезических из потока $\vec{r}(s, \gamma)$.

§6. Падающая волна в координатах s, q, n в зоне Фока

Обозначим через $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ орты декартовой системы координат в объемлющем пространстве. Падающая плоская волна $\exp(ikx)$ распространяется вдоль оси x. Связь декартовых координат x, y, z с локальными координатами в окрестности выбранной центральной геодезической $\vec{r}_0(s)$ описывается формулой (2). Для вычисления набега фазы падающей волны в зоне Фока используем формулу

$$x = (\vec{r}_0(s), \vec{e}_x) + q(\vec{e}(s), \vec{e}_x) + n(\vec{n}(s), \vec{e}_x), \tag{15}$$

в которой правую часть следует разложить в ряд по степеням s и воспользоваться масштабными множителями погранслоя Фока.

Напомним, что длина дуги s центральной геодезической отсчитывается от точки касания падающего луча, а касательный вектор $\vec{t}_0(0)$ совпадает с $\vec{e}_x$. Не ограничивая общности, будем считать, что при $s = 0$ выполняются следующие равенства

$$\vec{t}_0(0) = \vec{e}_x; \quad \vec{n}(0) = \vec{e}_z; \quad \vec{e}_{(0)} = \vec{e}_y. \tag{16}$$

Результаты вычисления скалярных произведений в (15), использующих уравнения Френе и равенства (16):

$$\left.\begin{aligned} (\vec{r}_0(s), \vec{e}_x) &= x_0(0) + s - K^2(0)\frac{s^3}{6} - 3K(0)K'(0)\frac{s^4}{4!} + \dots, \\ q(\vec{e}(s), \vec{e}_x) &= -q(K(0)T(0)\frac{s^2}{2} + \dots), \\ n(\vec{n}(s), \vec{e}_x) &= n(K(0)s + K'(0)\frac{s^2}{2} + \dots). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Обозначим через $x^{\mathrm{inc}} = x - x_0(0)$ набег фазы плоской волны в зоне Фока. В формулах (17) перейдем к координатам σ, ξ, ν погранслоя Фока. В результате для фазы набегающей плоской волны получаем следующее разложение

$$kx^{\mathrm{inc}} = ks + \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} - k^{-1/6}a_1 - k^{-1/3}a_2 + O(k^{-2/3}),$$

в котором введены дополнительные обозначения:

$$a_1 = \xi\sigma^2\beta^{-1}T(0), \quad a_2 = \frac{1}{2}\varkappa(0)\sigma\xi^2\beta + \beta^{-5}K'(0)(\sigma^4 - 2\sigma^2\nu).$$

Представление падающей плоской волны в зоне Фока принимает вид

$$\begin{aligned} &\exp(ikx^{\mathrm{inc}}) = \exp(iks + i(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3})) \\ &\times (1 - ik^{-1/6}a_1 + k^{-1/3}(ia_2 - \frac{1}{2}a_1^2) + O(k^{-2/3}). \end{aligned} \qquad (18)$$

Плоская волна есть точное решение уравнения Гельмгольца, поэтому разложение (18) является решением рекуррентной системы (14). Нам нужно построить локализованное вблизи $\vec{r}_0(s)$ решение этой системы, соответствующее падающей волне.

§7. Локализованная набегающая волна в зоне Фока

В набегающей волне U^{inc}, сосредоточенной в окрестности центральной геодезической $\vec{r}_0(s)$, выделяем быстро осциллирующий множитель, полагая $U^{\mathrm{inc}} = e^{iks}W^{\mathrm{inc}}$. Функция ослабления W^{inc} строится далее как решение рекуррентной системы (14). В теории волн соскальзывания и задаче В. А. Фока в $2D$ существенную роль играет следующая формула

$$(-i\sigma)^m \exp\{i(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3})\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} \frac{d^m}{d\zeta^m} v(\zeta - \nu) d\zeta, \qquad (19)$$

см. по этому поводу [5]. В частности, для главного члена набегающей волны W_0^{inc} в равенстве (18) формула (19) при $m = 0$ приводит к следующему выражению

$$\widehat{W}_0^{\mathrm{inc}} = \exp\{i(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3})\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} v(\zeta - \nu) d\zeta. \qquad (20)$$

Интеграл в правой части (20) есть решение однородного уравнения, полученное методом разделения переменных (преобразование Фурье по σ). Применение формулы (19) к асимптотическому разложению (18) падающей плоской волны позволяет представить ее в виде интеграла Фурье от функции Эйри v, производной v' и полиномиальных коэффициентов при них. Так например, для второго члена асимптотики набегающей волны получаем следующее выражение

$$\widehat{W}_1^{\mathrm{inc}} = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \xi \beta^{-1} T(0) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} (\zeta - \nu) v(\zeta - \nu). \qquad (21)$$

Для построения локализованного в окрестности геодезической решения задачи В. А. Фока необходимо в таком же виде иметь и набегающую волну. Фукнция ослабления ее W^{inc} строится далее как решение рекуррентной системы (14). Обозначим через $\Phi(\xi)$ локализующую функцию, т.е. функцию, которая экспоненциально убывает при $|\xi| \to \infty$. Решения первых двух уравнений (14) представляем в виде

$$W_0^{\mathrm{inc}} = \Phi(\xi) \widehat{W}_0^{\mathrm{inc}}, \quad W_1^{\mathrm{inc}} = \Phi(\xi) \widehat{W}_1^{\mathrm{inc}}. \qquad (22)$$

Поскольку первые два уравнения (14) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями по переменной ν, то $\Phi(\xi)$ коммутирует с операторами L_0 и L_1 и в (22) она выступает как произвольный постоянный множитель. С целью построения $\Phi(\xi)$ обратимся к третьему уравнению рекуррентной системы (14). Приведем явную формулу для неоднородного члена $\frac{1}{\beta} L_1 W_1^{\mathrm{inc}} + \frac{1}{\beta^2} L_2 W_0^{\mathrm{inc}} \equiv N$.

Принимая во внимание равенства (12), (20), (21), (22), получаем последовательно

$$\frac{1}{\beta}L_1W_1^{\mathrm{inc}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\beta^2}\Phi(\xi)\xi^2T_{(0)}^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}(v(\zeta-\nu)+(\zeta-\nu)v'(\zeta-\nu)),$$

и далее

$$\frac{1}{\beta^2}L_2W_0^{\mathrm{inc}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}v(\zeta-\nu)\Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \varkappa(0)K(0)\xi^2\Phi\Big).$$

Обозначим через H дифференциальный оператор Эрмита

$$H\Phi(\xi) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \mu(0)\xi^2\Big)\Phi(\xi), \quad \text{где} \quad \mu(0) = \varkappa(0)K(0) - T^2(0),$$

тогда для неоднородного члена N получаем следующее выражение

$$N = \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta^2}\{(H\Phi_{(\xi)} + \Phi_{(\xi)}\cdot\xi^2T^2(0))\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}v(\zeta-\nu)$$
$$+\Phi_{(\xi)}\cdot\xi^2T_{(0)}^2 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}(\zeta-\nu)v'(\zeta-\nu)\}. \tag{23}$$

Для построения локализующей функции $\Phi(\xi)$ приходим к задаче Штурма–Лиувилля на оси $-\infty<\xi<\infty$ для оператора H. Собственными функциями H являются функции Эрмита, среди которых мы выбираем следующую $\Phi(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu(0)}\xi^2)$, удовлетворяющую уравнению $H\Phi = -\sqrt{\mu(0)}\Phi$.

Отметим, что при $\mu(0)\leqslant 0$ локализованного решения, т.е. экспоненциально убывающего при $|\xi|\to\infty$, нет.

§8. Решение третьего уравнения для W_2^{inc}

Формулу для неоднородного члена (23) представим в виде

$$N = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}\beta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}[Av(\zeta-\nu) + B(\zeta-\nu)v'(\zeta-\nu)], \tag{24}$$

где введены дополнительные обозначения

$$A = -\sqrt{\mu(0)} + \xi^2T_{(0)}^2; \quad B = 2\xi^2T_{(0)}^2.$$

Решение $W_2^{\rm inc}$ ищем в виде, аналогичном (24):

$$W_2^{\rm inc} = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}\beta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}[X(\nu,\zeta)v(\zeta-\nu)+Y(\nu,\zeta)v'(\zeta-\nu)]. \qquad (25)$$

Здесь функции $X(\nu,\zeta)$ и $Y(\nu,\zeta)$ подлежат определению из третьего уравнения (14) для $W_2^{\rm inc}$. Применяя оператор $l_0 = \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - (\zeta-\nu)$ к квадратной скобке в равенстве (25), получаем следующую линейную комбинацию функций $v(\zeta-\nu)$ и $v'(\zeta-\nu)$:

$$v(\zeta-\nu)\Big(\frac{\partial^2 X}{\partial\nu^2} - 2(\zeta-\nu)\frac{\partial Y}{\partial\nu} + Y\Big) + v'(\zeta-\nu)\Big(-2\frac{\partial X}{\partial\nu} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\nu^2}\Big).$$

Далее приравнивая коэффициенты при $v(\zeta-\nu)$ и $v'(\zeta-\nu)$ по отдельности к коэффициентам $-A$ и $-B(\zeta-\nu)$, соответственно, в квадратной скобке в правой части (24), приходим к системе дифференциальных уравнений относительно искомых функций X и Y:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial\nu^2} - 2(\zeta-\nu)\frac{\partial Y}{\partial\nu} + Y = -A, \\ -2\frac{\partial X}{\partial\nu} + \frac{\partial^2 Y}{\partial\nu^2} = -(\zeta-\nu)B. \end{cases}$$

Решение системы дается следующими формулами

$$X = -\frac{1}{4}B(\nu-\zeta)^2 = -\frac{1}{2}\xi^2 T_{(0)}^2(\zeta-\nu)^2; \quad Y = \sqrt{\mu(0)}. \qquad (27)$$

Приведем явную формулу для третьего члена асимптотики $W_2^{\rm inc}$

$$W_2^{\rm inc} = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}\beta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}\Big(-\frac{1}{2}\xi^2 T_{(0)}^2(\zeta-\nu)^2 v(\zeta-\nu) + \sqrt{\mu(0)}v'(\zeta-\nu)\Big). \qquad (28)$$

§9. Построение отраженной волны W^{ref}

Отраженная волна, сосредоточенная в окрестности выделенной, центральной, геодезической $\vec r_0(s)$ строится как решение рекуррентной системы уравнений (14). Решение однородного уравнения w_0^{ref} берется в виде

$$W_0^{ref} = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}B_0(\zeta)w_1(\zeta-\nu), \qquad (29)$$

где $B_0(\zeta)$ пока произвольный постоянный (не зависящий от ν) множитель. Он будет найден далее из краевого условия на Σ. Появление функции Эйри $w_1(\zeta-\nu)$ в определении В. А. Фока [1] обусловлено тем, что она описывает волну, уходящую от границы Σ и удовлетворяющую принципу предельного поглощения, см. главу 10 в [6] и [3].

Сумма падающей W_0^{inc} и отраженной W_0^{ref} волн должна удовлетворять условию Дирихле на Σ

$$(W_0^{\mathrm{inc}} + W_0^{ref})\Big|_{\nu=0} = 0. \tag{30}$$

Принимая во внимание равенства (20), (22) и (29), из (30) получаем, что $B_0(\zeta) = -\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)}$. Таким образом, главный член асимптотики сосредоточенного в окрестности геодезической $\vec{r}_0(s)$ решения W_0 принимает вид

$$W_0 = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta}\Big[v(\zeta-\nu) - \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta-\nu)\Big]. \tag{31}$$

Подчеркнем, что структурно формула (31) совпадает с формулой В. А. Фока в двумерном случае за исключением присутствия локализующего множителя $\Phi(\xi)$. Однако, она не имеет сингулярностей на каустиках геодезических и допускает их кручение.

Обратимся к построению второго члена W_1^{ref} асимптотики дифракционной волны.

Введем дополнительное обозначение $D = -\frac{2i\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}\beta}\xi T_{(0)}$. Для неоднородного члена в исходном уравнении (14) для W_1^{ref} получаем следующее выражение

$$-\frac{1}{\beta} L_1 W_0^{ref} = D \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1'(\zeta-\nu). \tag{32}$$

Искомое решение ищем в виде

$$W_1^{ref} = D \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} Z(\nu,\zeta) w_1(\zeta-\nu), \tag{33}$$

в котором функция $Z(\nu,\zeta)$ подлежит определению из уравнения для W_1^{ref}. Левая часть этого уравнения преобразуется следующим образом

$$L_0 W_1^{ref} = D \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} l_0(Z(\nu,\zeta) w_1(\zeta-\nu)). \tag{34}$$

Сравнивая равенства (32) и (34), получаем дифференциальное уравнение на $Z(\nu,\zeta)$

$$l_0(Z(\nu,\zeta)w_1(\zeta-\nu)) = w_1'(\zeta-\nu)$$

решение которого $Z(\nu,\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta-\nu)$ выбирается из условий $\frac{\partial^2 Z}{\partial\nu^2} = 0$, $-2\frac{\partial Z}{\partial\nu} = 1$.

Приведем окончательную формулу для W_1^{ref}:

$$W_1^{ref} = \frac{-i\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}\beta} \xi T_{(0)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} (\zeta-\nu) w_1(\zeta-\nu). \tag{35}$$

Не трудно убедиться, сравнивая равенства (21), (22) с (35), что сумма $W_1^{\mathrm{inc}} + W_1^{\mathrm{ref}}$ удовлетворяет условию Дирихле при $\nu = 0$.

Второй член асимптотики полного волнового поля в зоне Фока принимает вид

$$W_1 = \Phi(\xi) \frac{i\xi T_{(0)}}{\sqrt{\pi}\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\sigma\zeta} (\zeta-\nu) \Big[v(\zeta-\nu) - \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta-\nu) \Big]. \tag{36}$$

§10. Заключение

Изложенные построения касаются вывода формул для формального асимптотического (при $k \to \infty$) решения уравнения Гельмгольца, локализованного в трубчатой окрестности выделенной геодезической из исходного потока $\vec{r} = \vec{r}(s,\gamma)$ и не имеющего сингулярностей на каустиках. Решение описывается явными функциями локальных координат погранслоя σ, ξ, ν в окрестности границы свет-тень на поверхности Σ в зоне Фока для одной выделенной (центральной) геодезической $\vec{r}_0(s) = \vec{r}(s,\gamma_0)$.

Для решения задачи Фока в $3D$, то есть в области поверхности Σ вблизи границы свет-тень, покрытой исходным потоком геодезических, следует построить локализованные решения для каждой геодезической потока $\vec{r}(s,\gamma)$. В результате все функции, полученные выше для волнового поля, приобретают зависимость от параметра γ, т.е.

$$U_{(\gamma)} \equiv U^{\text{inc}}_{(\gamma)} + U^{\text{ref}}_{(\gamma)} = e^{iks}\Phi_{(\xi,\gamma)}[W^{\text{inc}}_{(\gamma)} + W^{\text{ref}}_{(\gamma)}], \tag{37}$$

и глобальная асимптотика решения задачи В. А. Фока описывается суперпозицией (интегралом) этих решений

$$U^{\text{total}} = \int\limits_{(\Gamma)} d\gamma U_{(\gamma)}. \tag{38}$$

Предлагаемое выражение (38) для волнового поля не имеет сингулярностей на каустиках геодезических, допускает их кручение и приводит к алгоритму расчета поля, не зависящему от положения точки наблюдения.

Список литературы

1. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* — Советское радио, М., 1970.
2. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для гладких, строго выпуклых поверхностей, вложенных в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 301–313.
3. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа. Волны соскальзывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ ???
4. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **104** (1981), 195–216.
5. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* — Ленинградский университет, Л., 1974.
6. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач.* — Ленинград. ун-ет, Ленинград, 1972.

Popov M. M. Asymptotic solutions of the wave equation localized in a tabular vicinity of the geodesics and the Fock problem in $3D$.

The $3D$ problem of the short wave diffraction by a compact body with the smooth strongly convex boundary surface is considered. At that the particular interest presents the diffraction wave field in a vicinity of the light-shadow curve on the scatterer boundary surface. This curve is formed by the geometrical locus of tangent points of the incident rays. In $2D$ case this problem was the first time studied by academician V. A. Fock long ago and we call it now the Fock problem. But in $3D$ case new additional difficulties emerge in the problem: i) in the shadowed part of the boundary surface the diffraction wave field slides along geodesics which form caustics and ii) the geodesics are not plane curves due to the torsion.

In the paper we propose a solution of $3D$ Fock problem in terms of superposition (integral) of asymptotic solutions of the wave equation localized in a vicinity of each geodesics from corresponding geodesic flow. The solution gets over the difficulties.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д.27, 192288 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 22 марта 2022 г.