Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

§1. Введение

Рассматривается двумерная отражательная дифракционная решетка, описываемая однородной эллиптической краевой задачей для стационарного уравнения акустики. При некасательном падении плоской волны на периодическую границу открыто конечное число каналов рассеяния. Процесс рассеяния характеризуется матрицей конечного размера, которую мы называем матрицей рассеяния. Цель работы – сформулировать и обосновать метод приближенного вычисления этой матрицы. Для этого задача на решетке сводится к задаче в "полуполосе" Π – наименьшем периоде решетки, на боковых сторонах Π ставится условие квазипериодичности. Упомянутая матрица рассеяния совпадает с волноводной матрицей рассеяния в Π, и мы обобщаем метод вычисления волноводной матрицы рассеяния на случай квазипериодических краевых условий.

Приближением для строки матрицы рассеяния в "полуполосе" Π служит минимизатор некоторого квадратичного функционала. Для построения этого функционала используются модельные решения вспомогательной задачи в ограниченной области Π^R, полученной из Π отрезанием от нее "цилиндрического конца" на достаточно большом расстоянии R. Минимизатор функционала стремится к строке матрицы рассеяния с экспоненциальной скоростью при стремлении R к бесконечности.

Для уравнения Гельмгольца в близкой ситуации обсуждаемый метод был предложен в работе [1]. Там же была описана схема его обоснования без полного исследования разрешимости задачи в Π^R; предполагалось, что исходная задача в волноводе Π не имеет вещественных

Ключевые слова: акустическая дифракционная решетка, рассеяние плоских волн, волноводная матрица рассеяния, метод приближенного вычисления.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского Научного Фонда No. 22-21-00136.

собственных значений (ловушечных мод). Обобщение метода на случай самосопряженных эллиптических систем с переменными коэффициентами, стабилизирующимися на бесконечности с экспоненциальной скоростью, дано в [2]. В [3] этот результат был распространен на периодические волноводы с медленной стабилизацией коэффициентов. В упомянутых работах [2] и [3] разрешимость задачи в Π^R постулировалась.

Полное обоснование метода впервые дано в работе [4] для уравнения Гельмгольца в двумерном волноводе с одним выходом на бесконечность. При этом было показано, что метод нечувствителен к наличию точечного спектра. В волноводах сложной геометрии точечный спектр, как правило, присутствует, и возможность об этом не заботиться является существенным преимуществом метода. Для дифракционных решеток это означает, что метод работает и в случае существования в решетке поверхностных волн. Для уравнения Гельмгольца в волноводах произвольной размерности и с произвольным (конечным) числов цилиндрических выходов метод обоснован в книге [5]. Метод вычисления матрицы рассеяния в электромагнитных волноводах анонсирован в заметке [6]. Подробное обоснование метода для системы Максвелла и для системы теории упругости дано в [7]. Случай квазипериодических краевых условий оставался не исследованным.

§2. Волны. Матрица рессеяния

Пусть Ω – "полуплоскость"с периодической границей. Более точно, предположим, что Ω содержит верхнюю полуплоскость $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ и, в свою очередь, содержится в полуплоскости $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > -T\}$, где T – положительное число. Граница $\partial\Omega$ лежит в полосе $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -T < x_2 < 0\}$ и периодична по переменной x_1 с периодом 1, то есть, если $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, то и $(x_1 + 1, x_2) \in \partial\Omega$. Считаем, что каждый период границы $\partial\Omega$ состоит из конечного числа гладких дуг, пересекающихся под ненулевыми углами; связность границы не предполагается.

Введем в Ω сильно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{j,k=1}^{2} D_j a_{jk}(x) D_k u(x) + \sum_{l=1}^{2} b_l(x) D_l u(x) + c(x)u(x), \qquad (2.1)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$. Предполагаем, что коэффициенты a_{jk}, b_l и c являются гладкими, 1-периодичными по переменной x_1 и стабилизируются при $x_2 \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью:

$$\sum_{j,k=1}^{2} |a_{jk}(x) - a_{jk}^0(x_1)| + \sum_{j,k=1}^{2} |\nabla a_{jk}(x) - \nabla a_{jk}^0(x_1)| \\ + \sum_{l=1}^{2} |b_l(x) - b_l^0(x_1)| + \sum_{l=1}^{2} |\nabla b_l(x) - \nabla b_l^0(x_1)| + |c(x) - c^0(x_1)| \\ \leqslant Ce^{-\delta x_2},$$

здесь a_{jk}^0, b_l^0 и c^0 – гладкие, 1-периодические функции от x_1, не зависящие от x_2; C и δ – положительные числа. Пусть еще матрица $a = (a_{jk})_{j,k=1}^2$ самосопряжена, коэффициенты b_l и c вещественны и $\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 = 0$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ формально самосопряжен относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Ясно, что $\partial_1 b_1^0 = -\partial_2 b_2^0 = 0$, то есть b_1^0 – постоянная.

Рассмотрим эллиптическую краевую задачу

$$\mathcal{A}u(x) = \mu u(x), \quad x \in \Omega; \qquad \mathcal{B}u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

самосопряженную относительно формулы Грина

$$(\mathcal{A}u - \mu u, v)_\Omega + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\partial\Omega} = (u, \mathcal{A}v - \mu v)_\Omega + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\partial\Omega},$$

где $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_{\partial\Omega}$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$, соответственно; u, $v \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$; $\mu \in \mathbb{R}$. В качестве граничного оператора $\mathcal{B}$ мы выбираем оператор краевых условий Дирихле $\mathcal{D}u(x) = u(x)$, Неймана $\mathcal{N}u(x) = \sum_{j,k=1}^{2} \nu_j(a_{jk}(x)D_k u(x) + (2i)^{-1} b_j u(x))$, где ν – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, или Робэна $\mathcal{R}u(x) = \mathcal{N}u(x) + q(x)\mathcal{D}u(x)$. В последнем случае предполагается, что функция q вещественная, гладкая, 1-периодическая по x_1 и стабилизируется при $x_2 \to \infty$ с экспоненциальной скоростью.

С задачей (2.2) свяжем задачу в “полуполосе”

$$\Pi := \{x \in \Omega : -1/2 \leqslant x_1 \leqslant 1/2\}$$

$$\mathcal{A}v(x) = \mu v(x), \ \ x \in \Pi; \quad \mathcal{B}v(x) = 0, \ \ x \in \Gamma_0; \quad v|_{\Gamma_+} = e^{i\alpha} v|_{\Gamma_-}, \tag{2.3}$$

где $\Gamma_0 = \partial\Pi \cap \partial\Omega$, $\Gamma_\pm = \partial\Pi \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \pm 1/2\}$. Справедлива формула Грина

$$(\mathcal{A}u - \mu u, v)_\Pi + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\Gamma_0} = (u, \mathcal{A}v - \mu v)_\Pi + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\Gamma_0}$$

для любых $u, v \in C_c^\infty(\overline{\Pi})$. Мы рассматриваем задачу в Π как задачу в волноводе с одним цилиндрическим выходом на бесконечность.

Для того чтобы описать асимптотику решений задачи (2.3) на бесконечности, рассмотрим задачу в полосе $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$ с предельными коэффициентами:

$$\mathcal{A}_0 w(x) = \mu v(x), \qquad x \in (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}; \tag{2.4}$$

$$\partial_1^k w(1/2, x_2) = e^{i\alpha} \partial_1^k w(-1/2, x_2), \qquad x_2 \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1; \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{A}_0 w(x) = \mathcal{A}_0(x_1, D_1, D_2) w(x) = \sum_{j,k=1}^{2} D_j a_{jk}^0(x_1) D_k w(x).$$

Применяя к этой задаче преобразование Фурье по переменной x_2, получим операторный пучок на интервале $(-1/2, 1/2)$,

$$\mathcal{A}_0(x_1, D_1, \lambda) \widehat{w}(x_1, \lambda) = \mu \widehat{w}(x_1, \lambda), \qquad x_1 \in (-1/2, 1/2); \tag{2.6}$$

$$\partial_1^k \widehat{w}(1/2, \lambda) = e^{i\alpha} \partial_1^k \widehat{w}(-1/2, \lambda), \qquad k = 0, 1. \tag{2.7}$$

Спектр этого пучка состоит из нормальных собственных значений конечной кратности, каждая полоса $|\mathrm{Im}\lambda| < h$ содержит конечное число собственных значений. Те значения параметра μ, при которых существуют вещественные собственные значения λ, имеющие не только собственные функции, но и присоединенные, называются порогами задачи (2.3). Множество порогов счетно и не имеет конечных предельных точек. Если μ не является порогом, то на вещественной оси лежит четное число собственных значений (с учетом кратности) – поровну тех значений $\lambda(\mu)$, для которых $\lambda'(\mu) > 0$, и тех, для которых $\lambda'(\mu) < 0$.

Пусть интервал $[\mu_1, \mu_2]$ не содержит порогов, тогда число вещественных собственных значений не зависит от $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$; обозначим его через $2M$. Пусть $\lambda_j^\pm(\mu)$, $j = 1, \ldots, M$ – все вещественные собственные значения пучка (2.6)–(2.7), такие, что $\mp\lambda'(\mu) > 0$, а $\Phi_j^\pm(\cdot\,; \mu)$ –

соответствующие собственные функции, нормированные таким образом, чтобы

$$|(\lambda_j^{\pm})'(\mu)|^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} |\Phi_j^{\pm}(x_1;\mu)|^2 dx_1 = 1. \tag{2.8}$$

Тогда функции

$$v^{\pm}(x;\mu) = e^{i\lambda_j^{\pm}(\mu)x_2}\Phi_j(x_1) \tag{2.9}$$

являются решениями задачи (2.4)–(2.5). Функции v_j^+ называются приходящими, а v_j^- – уходящими волнами. Поток энергии, переносимый волной v_j^- через поперечное сечение полосы Π в направлении $+\infty$, положителен, а волной v_j^+ – отрицателен; нормировка (2.8) выбрана так, чтобы плотность потока энергии, переносимой каждой волной, была равна единице (см. [8], п. 2.4).

Рассмотрим решения Y_j, $j = 1, \dots, M$, задачи (2.3), допускающие асимптотику

$$Y_j(x,\mu) = v_j^+(x,\mu) + \sum_{m=1}^{M} S_{jm}(\mu)v_m^-(x,\mu) + O(e^{-\delta x_2}) \tag{2.10}$$

при $x_2 \to +\infty$; число δ положительно и может быть выбрано не зависящим от $[\mu_1, \mu_2]$. Если μ не является собственным значением задачи (2.3), то функции Y_j определяются своей асимптотикой однозначно и образуют базис в пространстве ограниченных решений задачи (2.3). В противном случае функции Y_j определены с точностью до собственной функции, отвечающей числу μ. Так как любая собственная функция задачи (2.3) экспоненциально затухает на бесконечности, то произвол в определении Y_j не влияет на матрицу $S(\mu) = (S_{jm}(\mu))_{j,m=1}^{M}$, заданную асимптотическими разложениями (2.10). Матрица $S(\mu)$ унитарна и называется матрицей рассеяния в волноводе Π.

Продолжим волны $v_j^{\pm}$ и функции Y_j на всю область Ω по квазипериодичности, за новыми функциями сохраним прежние обозначения. Тогда Y_j описывает рассеяние плоской волны v_j^+ на периодической границе дифракционной решетки. Матрица рассеяния $S(\mu)$ является основной характеристикой этого процесса. Цель работы – формулировка и обоснование метода приближенного вычисления матрицы $S(\mu)$.

Для примера рассмотрим оператор Лапласа $\mathcal{A} = -\Delta$. Тогда пучок (2.6) имеет вид

$$-\widehat{w}''(x_1, \lambda) = (\mu - \lambda^2)\widehat{w}(x_1, \lambda), \quad x_1 \in (-1/2, 1/2);$$
$$\widehat{w}(1/2, \lambda) = e^{i\alpha}\widehat{w}(-1/2, \lambda), \qquad \widehat{w}'(1/2, \lambda) = e^{i\alpha}\widehat{w}'(-1/2, \lambda).$$

Вещественные собственные числа этого пучка вычисляются по формуле $\lambda_k^{\pm} = \mp(\mu - (\alpha + 2\pi k)^2)^{1/2}$, где k пробегает множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $(\alpha + 2\pi k)^2 < \mu$, а соответствующие нормированные собственные функции – по формуле $\Phi_k(x_1) = (4(\mu - (\alpha + 2\pi k)^2))^{-1/4} e^{i(2\pi k + \alpha)x_1}$. Волны принимают вид

$$v_k^{\pm}(x, \mu) := e^{i\lambda_k^{\pm}(\mu)x_2}\Phi_k(x_1)$$
$$= (4(\mu - (\alpha + 2\pi k)^2))^{-1/4} e^{i(2\pi k + \alpha)x_1} e^{\mp(\mu - (\alpha + 2\pi k)^2)^{1/2} x_2}.$$

Параметры α и μ определяют угол падения волны v_k^+ на границу решетки.

§3. Формулировка метода

При $R > 0$ положим

$$\Pi^R = \Pi \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < R\}, \quad \Gamma_{\pm}^R = \Gamma_{\pm} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < R\}$$

и

$$\Gamma^R = \partial\Pi^R \setminus \partial\Pi.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{A}X_j^R(x, \mu) = \mu X_j^R(x, \mu), \quad x \in \Pi^R; \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B}X_j^R(x, \mu) = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad \partial_1^k X_j^R|_{\Gamma_+^R} = e^{i\alpha}\partial_1^k X_j^R|_{\Gamma_-^R}, \quad k = 0, 1; \tag{3.2}$$

$$(\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})X_j^R(x, \mu) = (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})\Big(v_j^+(x, \mu) + \sum_{m=1}^{M} a_m v_m^-(x, \mu)\Big), \quad x \in \Gamma^R; \tag{3.3}$$

здесь $\zeta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, числа $a_m \in \mathbb{C}$ пока произвольны. Введем функционал

$$J_j^R(a_1, \dots, a_M; \mu) = \Big\|\mathcal{D}\Big(X_j^R(\cdot, \mu) - v_j^+(\cdot, \mu) - \sum_{m=1}^{M} a_m v_m^-(\cdot, \mu)\Big); L_2(\Gamma^R)\Big\|^2. \tag{3.4}$$

Его минимизатор $a_j^0(R,\mu) = (a_{j1}^0(R,\mu), \dots, a_{jM}^0(R,\mu))$ будет служить приближением для строки $(S_{j1}(\mu), \dots, S_{jM}(\mu))$ матрицы рассеяния. Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Предположим, что отрезок* $[\mu', \mu'']$ *свободен от порогов задачи* (2.3). *Тогда для всех* $\mu \in [\mu', \mu'']$ *и* $R \geqslant R_0$, *где* R_0 – *достаточно большое число, существует единственный минимизатор* $a^0(R,\mu) = (a_1^0(R,\mu), \dots, a_M^0(R,\mu))$ *функционала* $J_j^R(a,\mu)$ *из* (3.4). *Справедливы оценки*

$$|a_j^0(R,\mu) - S_{lj}(\mu)| \leqslant Ce^{-\delta R}, \quad j = 1, \dots, M, \tag{3.5}$$

с тем же числом δ, *что и в* (2.10), *а постоянная* C *не зависит от* R *и* μ.

Для того чтобы найти зависимость X_j^R от $a_1, \dots, a_M$, рассмотрим задачи

$$\mathcal{A}Z_{j,\pm}^R(x,\mu) = \mu Z_{j,\pm}^R(x,\mu), \quad x \in \Pi^R; \tag{3.6}$$

$$\mathcal{B}Z_{j,\pm}^R(x,\mu) = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad \partial_1^k Z_{j,\pm}^R|_{\Gamma_+^R} = e^{i\alpha}\partial_1^k Z_{j,\pm}^R|_{\Gamma_-^R}, \quad k = 0,1; \tag{3.7}$$

$$(\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})Z_{j,\pm}^R(x,\mu) = (\mathcal{N} + i\zeta\mathcal{D})v_j^{\pm}(x,\mu), \ \ x \in \Gamma^R; \ \ j = 1, \dots, M. \tag{3.8}$$

Ясно, что $X_j^R = Z_{j,+}^R + \sum_m a_m Z_{m,-}^R$, где $Z_{j,\pm}^R$ – решения задач (3.6)–(3.8). Введем $M \times M$–матрицы с элементами

$$\begin{aligned} E_{ij}^R &= \big((Z_{i,-}^R - v_i^-), (Z_{j,-}^R - v_j^-)\big)_{\Gamma^R}, \\ F_{ij}^R &= \big((Z_{i,+}^R - v_i^+), (Z_{j,-}^R - v_j^-)\big)_{\Gamma^R} \end{aligned} \tag{3.9}$$

и положим

$$G_i^R = \big((Z_{i,+}^R - v_i^+), (Z_{i,+}^R - v_i^+)\big)_{\Gamma^R}.$$

Функционал (3.4) переписывается в виде

$$J_j^R(a,\mu) = \langle aE^R(\mu), a\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle F_j^R(\mu), a\rangle + G_l^R(\mu),$$

где F_j^R – j-ая строка матрицы F^R и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^M$. Минимум достигается на вектор-строке $a_j^0 = a_j^0(R,\mu)$, удовлетворяющей системе $a_j^0(R,\mu)E^R + F_j^R = 0$. Таким образом, аппроксимацией $S^R(\mu)$ для матрицы рассеяния $S(\mu)$ является решение уравнения $S^R E^R + F^R = 0$.

Для доказательства теоремы 3.1 нужно показать, что задачи (3.6)–(3.8) однозначно разрешимы при больших R, матрица E^R неособенная и минимизатор $a_j^0(R,\mu)$ функционала $J_j^R(\cdot,\mu)$ подчиняется оценке (3.5).

§4. Задача в области Π^R

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{A}u(x,\mu)=\mu u(x,\mu), \quad x\in\Pi^R; \tag{4.1}$$

$$\mathcal{B}u(x,\mu)=0, \quad x\in\Gamma_0; \quad \partial_1^k u|_{\Gamma_+^R}=e^{i\alpha}\partial_1^k u|_{\Gamma_-^R}, \quad k=0,1; \tag{4.2}$$

$$(\mathcal{N}+i\zeta\mathcal{D})u(x,\mu)=h(x), \quad x\in\Gamma^R, \tag{4.3}$$

где $\mu\in\mathbb{R}$ и $h\in L_2(\Gamma^R)$. Мы покажем, что для нее имеет место альтернатива Фредгольма.

Пусть сначала $\mathcal{B}=\mathcal{D}$, то есть на Γ_0 выполнено условие Дирихле. Для краткости вместо $\mathcal{D}u$ будем писать u. Положим

$$\mathcal{H}=\bigl\{u\in H^1(\Pi^R): u|_{\Gamma_0}=0;\ u|_{\Gamma_+^R}=e^{i\alpha}u|_{\Gamma_-^R}\bigr\};$$

как обычно, $H^1(\Pi^R)$ обозначает пространство Соболева в Π^R со скалярным произведением

$$[u,v]=(\nabla u,\nabla v)_{\Pi^R}+(u,v)_{\Pi^R}.$$

Функция $u\in C^2(\overline{G^R})\cap\mathcal{H}$ является решением задачи (4.1)–(4.3), если и только если

$$((\mathcal{A}-\mu)u,v)_{\Pi^R}+(\mathcal{N}u,v)_{\Gamma_+^R\cup\Gamma_-^R}+(\mathcal{N}u+i\zeta u,v)_{\Gamma^R}=(h,v)_{\Gamma^R} \tag{4.4}$$

для всех $v\in\mathcal{H}$. Интегрируя по частям и учитывая, что $v=0$ на Γ_0, перепишем (4.4) в виде

$$(a\nabla u,\nabla v)_{\Pi^R}+\frac{1}{2}(\langle b,-i\nabla u\rangle,v)_{\Pi^R}+\frac{1}{2}(u,\langle b,-i\nabla v\rangle)_{\Pi^R} \\ -\mu(u,v)_{\Pi^R}+i\zeta(u,v)_{\Gamma^R}=(h,v)_{\Gamma^R}, \tag{4.5}$$

где a и b – матрица и вектор с компонентами a_{jk} и b_l, соответственно, из формулы (2.1); $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Каждое слагаемое в последнем равенстве имеет смысл для u и v из $H^1(G^R)$. Функция $u\in\mathcal{H}$ называется обобщенным решением задачи (4.1)–(4.3), если (4.5) выполняется для всех $v\in\mathcal{H}$.

Так как оператор $\mathcal{A}$ сильно эллиптический, то существует такая положительная постоянная c_0, что

$$(a\nabla u, \nabla u)_{\Pi^R} + \|u; L_2(\Pi^R)\|^2 \geqslant c_0 \|u; H^1(\Pi^R)\|^2$$

для любого $u \in H^1(\Pi^R)$. Следовательно, существует ограниченный и обратимый оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, такой, что

$$(a\nabla u, \nabla v)_{\Pi^R} + (u, v)_{\Pi^R} = [Au, v].$$

Поскольку операторы вложения $\mathcal{H} \hookrightarrow L_2(G^R)$ и $H^{1/2}(\Gamma^R) \hookrightarrow L_2(\Gamma^R)$ компактны, то существуют компактные операторы $V_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, такие, что

$$\frac{1}{2}(\langle b, -i\nabla u\rangle, v)_{\Pi^R} + \frac{1}{2}(u, \langle b, -i\nabla v\rangle)_{\Pi^R} = [V_1 u, v],$$
$$(u, v)_{\Pi^R} = [V_2 u, v], \qquad (u, v)_{\Gamma^R} = [V_3 u, v].$$

Наконец, пусть $f \in \mathcal{H}$ – такой элемент, что

$$(h, v)_{\Gamma^R} = [f, v].$$

Теперь (4.5) означает, что

$$[Au, v] + [Vu, v] = [f, v] \tag{4.6}$$

для всех $v \in \mathcal{H}$; здесь

$$V = V_1 - (\mu + 1)V_2 + i\zeta V_3.$$

Поэтому

$$Au + Vu = f. \tag{4.7}$$

Пусть теперь $\mathcal{B} = \mathcal{R}$; случай, когда в условии Робэна $q = 0$ (то есть $\mathcal{B} = \mathcal{N}$), не исключается. Положим

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(\Pi^R) :\ u|_{\Gamma_+^R} = e^{i\alpha} u|_{\Gamma_-^R}\}.$$

Функция $u \in C^2(\overline{G^R}) \cap \mathcal{H}$ является решением задачи (4.1)–(4.3), если и только если

$$((\mathcal{A} - \mu)u, v)_{\Pi^R} + (\mathcal{N}u + qu, v)_{\Gamma_0} + (\mathcal{N}u, v)_{\Gamma_+^R \cup \Gamma_-^R} + (\mathcal{N}u + i\zeta u, v)_{\Gamma^R} = (h, v)_{\Gamma^R} \tag{4.8}$$

для всех $v \in \mathcal{H}$. Интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$(a\nabla u, \nabla v)_{\Pi^R} + \frac{1}{2}(\langle b, -i\nabla u\rangle, v)_{\Pi^R} + \frac{1}{2}(u, \langle b, -i\nabla v\rangle)_{\Pi^R} - \mu(u,v)_{\Pi^R} \\ + (qu, v)_{\Gamma_0} + i\zeta(u,v)_{\Gamma^R} = (h, v)_{\Gamma^R}, \quad (4.9)$$

Функция $u \in \mathcal{H}$ называется обобщенным решением задачи (4.1)–(4.3), если (4.9) выполняется для всех $v \in \mathcal{H}$. Аналогично предыдущему случаю, это соотношение равносильно уравнению вида (4.7), где оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ограничен и обратим, оператор $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ компактен и, наконец, f – элемент из $\mathcal{H}$. Для этого уравнения верна альтернатива Фредгольма. Значит, для доказательства его однозначной разрешимости достаточно проверить, что $\ker(A + V) = 0$.

Предложение 4.1. *Для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и $h \in L_2(\Gamma^R)$ задача* (4.1)–(4.3) *имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. Предположим, что $u \in \ker(A + V)$. Полагая $v = u$ и $h = 0$ в (4.5) или (4.9) и рассматривая слева только мнимую часть, получаем $\zeta(u,u)_{\Gamma^R} = 0$, то есть $u = 0$ на Γ^R. Задача (4.1)–(4.3) эллиптическая, следовательно ее обобщенное решение при $h = 0$ является гладкой функцией на $\overline{\Pi^R}$ вне особенностей границы. В частности, краевое условие на Γ^R можно понимать в классическом смысле, откуда $\mathcal{N}u = -i\zeta u = 0$ на Γ^R. Таким образом, функция u имеет нулевые данные Коши на Γ^R. Значит, $u \equiv 0$ в Π^R по теореме Хольмгрена о единственности продолжения ([9], Часть I, §3.4). □

Предложение 4.2. *Пусть u – обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3)*, причем h – гладкая функция на Π^R и $h \in L_2(\Pi^R)$. Тогда u – гладкая функция на $\overline{\Pi^R}$ вне особенностей границы, причем справедливо равенство*

$$\|\mathcal{N}u; L_2(\Pi^R)\|^2 + \zeta^2\|u; L_2(\Pi^R)\|^2 = \|h; L_2(\Pi^R)\|^2. \quad (4.10)$$

Доказательство. Гладкость решения вытекает из эллиптичности задачи и гладкости h. Из равенств (4.5) и (4.9) при $v = u$ получаем

$$\zeta(u,u)_{\Gamma^R} = \mathrm{Im}(h,u)_{\Gamma^R}. \quad (4.11)$$

Положим здесь $h = \mathcal{N}u + i\zeta u$ и получим

$$\mathrm{Im}(\mathcal{N}u, u)_{\Gamma^R} = 0. \quad (4.12)$$

Отсюда и из тождества

$$(\mathcal{N}u, \mathcal{N}u)_{\Gamma^R} + \zeta^2(u,u)_{\Gamma^R} + 2\zeta \mathrm{Im}(\mathcal{N}u,u)_{\Gamma^R} = ((\mathcal{N}+i\zeta)u, (\mathcal{N}+i\zeta)u)_{\Gamma^R} \tag{4.13}$$

следует (4.10). □

§5. Обоснование метода

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 3.1, остается проверить обратимость матрицы E^R из (3.9) и установить оценку (3.5).

Лемма 5.1. *Пусть $v_j^\pm$, $j = 1, \dots, M$, – приходящие и уходящие волны, определенные равенствами* (2.9). *Тогда при больших R и $j, l = 1, \dots, M$*

$$(\mathcal{N}u_j^\pm, u_l^\pm)_{\Gamma^R} - (u_j^\pm, \mathcal{N}u_l^\pm)_{\Gamma^R} = \mp i\delta_{jl},$$
$$(\mathcal{N}u_j^\pm, u_l^\mp)_{\Gamma^R} - (u_j^\pm, \mathcal{N}u_l^\mp)_{\Gamma^R} = 0.$$

Доказательство. Введем форму

$$q_R(u,v) = ((\mathcal{A}-\mu)u, v)_{\Pi^R} + (\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\Gamma_0} - (u, (\mathcal{A}-\mu)v)_{\Pi^R} - (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\Gamma_0}.$$

Правая часть здесь имеет смысл для u и v вида $\eta_R v_j^\pm$, где $(x_1, x_2) \mapsto \eta_R(x_2)$ – срезка, равная нулю при $x_2 < 0$ (см. определение области Ω в начале п. 2) и единице – при $x_2 > R/2$. В п. 2.4 [8] доказано, что, если выполнено условие нормировки (2.8), то

$$q_R(\eta_R v_j^\pm, \eta_R v_l^\pm) = \mp i\delta_{jl}, \qquad q_R(\eta_R v_j^\pm, \eta_R v_l^\mp) = 0. \tag{5.1}$$

По формуле Грина

$$q_R(u,v) = -(\mathcal{B}u, \mathcal{Q}v)_{\Gamma_+^R \cup \Gamma_-^R} + (\mathcal{Q}u, \mathcal{B}v)_{\Gamma_+^R \cup \Gamma_-^R} + (\mathcal{N}u, v)_{\Gamma^R} - (u, \mathcal{N}v)_{\Gamma^R}.$$

Для u, v вида $\eta_R v_j^\pm$ интегралы в правой части по $\Gamma_+^R \cup \Gamma_-^R$ сокращаются ввиду условий квазипериодичности, и остается только учесть (5.1). □

Предложение 5.2. *Матрица E^R с элементами* (3.9) *невырождена при всех $R \geqslant R_0$, где R_0 – достаточно большое число.*

Доказательство. Допустим, что это утверждение неверно. Тогда для всякого R^0 найдутся такое число $R > R^0$ и такой вектор $c = (c_1, \dots, c_M)$, что $|c| = 1$ и $E^R c = 0$. Тогда в силу (3.9) для функций $v = \sum_j c_j v_j^-$ и $Z = \sum_j c_j Z_{j,-}^R$ верно $\|Z - v; L_2(\Gamma^R)\|^2 = \langle E^R c, c\rangle = 0$. Согласно (3.8) имеем $\|\mathcal{N}(Z-v); L_2(\Gamma^R)\| = 0$, и потому

$$Z = v, \qquad \mathcal{N}Z = \mathcal{N}v \tag{5.2}$$

на Γ^R. Функция Z удовлетворяет условиям предложения 4.2, следовательно справедливо соотношение (4.12) с заменой u на Z, откуда

$$(\mathcal{N}Z, Z)_{\Gamma^R} - (Z, \mathcal{N}Z)_{\Gamma^R} = 0.$$

Учитывая (5.2) и лемму 5.1, приходим к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{N}v, v)_{\Gamma^R} - (v, \mathcal{N}v)_{\Gamma^R} \\ &= \sum_{j,l} c_j \overline{c_l} \left((\mathcal{N}v_j^-, v_l^-)_{\Gamma^R} - (v_j^-, \mathcal{N}v_l^-)_{\Gamma^R} \right) = i \sum_j |c_j|^2 = i. \qquad \square \end{aligned}$$

Предложение 5.3. *Пусть* $a^0(R) = (a_1^0(R), \dots, a_M^0(R))$ *– минимизатор функционала* $J_l^R(a)$ *из* (3.4). *Тогда*

$$J_l^R(a^0(R)) = O(e^{-2\delta R}) \text{ при } R \to \infty \tag{5.3}$$

равномерно относительно $\mu \in [\mu', \mu'']$; δ *– то же число, что и в* (2.10).

Доказательство. Пусть $X_l^R(a)$ – решение задачи (3.1)–(3.3) и пусть

$$\varphi_l(a) = v_l^+ + \sum_{j=1}^{M} a_j v_j^-, \tag{5.4}$$

где $a = (a_1, \dots, a_M)$ – произвольный вектор из $\mathbb{C}^M$. Тогда условие (3.3) на Γ^R принимает вид $(\mathcal{N}+i\zeta)X_l^R(S_l) = (\mathcal{N}+i\zeta)\varphi_l(S_l)$. В силу формулы (4.10) при $u = X_l^R(S_l) - Y_l^+$, имеем

$$\begin{aligned} \|X_l^R(S_l) - Y_l^+; L_2(\Gamma^R)\| &\leqslant |\zeta|^{-1} \|(\mathcal{N} + i\zeta)(X_l^R(S_l) - Y_l^+); L_2(\Gamma^R)\| \\ &= |\zeta|^{-1} \|(\mathcal{N} + i\zeta)(\varphi_l(S_l) - Y_l^+); L_2(\Gamma^R)\|. \end{aligned}$$

Из (2.10) получаем, что

$$\left(\|\mathcal{N}(\varphi_l(S_l) - Y_l^+); L_2(\Gamma^R)\| + \|\varphi_l(S_l) - Y_l^+; L_2(\Gamma^R)\| \right)^{1/2} \leqslant Ce^{-\delta R},$$

где C не зависит от R и $\mu \in [\mu', \mu'']$. Таким образом,

$$\begin{aligned} J_l^R(S_l) &= \|X_l^R(S_l) - \varphi_l(S_l); L_2(\Gamma^R)\|^2 \\ &\leqslant (\|X_l^R(S_l) - Y_l^+; L_2(\Gamma^R)\| + \|Y_l^+(S_l) - \varphi_l(S_l); L_2(\Gamma^R)\|)^2 \\ &\leqslant c(1 + |\zeta|^{-1})^2 e^{-2\delta R}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где c не зависит от R, ζ и μ. Для того чтобы получить (5.3), остается учесть неравенство $J_l^R(a^0(R)) \leqslant J_l^R(S_l)$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\varphi_l(a^0)$ и $\varphi_l(S_l)$ заданы равенством (5.4), а $X_l^R(a^0)$ и $X_l^R(S_l)$ – соответствующие решения задачи (3.1)–(3.3); положим $X := X_l^R(a^0) - X_l^R(S_l)$ и $\varphi := \varphi_l(a^0) - \varphi_l(S_l) = \sum\limits_{j=1}^{M}(a_j^0 - S_{lj})v_j^-$. По лемме 5.1

$$(\mathcal{N}\varphi,\varphi)_{\Gamma^R} - (\varphi,\mathcal{N}\varphi)_{\Gamma^R} = i\sum_{j=1}^{M}|a_j^0 - S_{lj}|^2 := i|a^0 - S_l|^2$$

или, что то же самое, $2\mathrm{Im}(\mathcal{N}\varphi,\varphi)_{\Gamma^R} = |a^0 - S_l|^2$. Подставляя это соотношение в (4.13), получим

$$\begin{aligned}&|a^0 - S_l|^2 \\ &= \zeta^{-1}\left(\|(\mathcal{N}+i\zeta)\varphi; L_2(\Gamma^R)\|^2 - \|\mathcal{N}\varphi; L_2(\Gamma^R)\|^2 - \zeta^2\|\varphi; L_2(\Gamma^R)\|^2\right).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Обозначим через $\|\varphi\|_\nu$ “норму данных Коши”

$$\|\varphi\|_\nu := \left(\|\mathcal{N}\varphi; L_2(\Gamma^R)\|^2 + \zeta^2\|\varphi; L_2(\Gamma^R)\|^2\right)^{1/2}$$

и запишем правую часть (5.6) в виде

$$|\zeta|^{-1}\big|\|(\mathcal{N}+i\zeta)\varphi; L_2(\Gamma^R)\| - \|\varphi\|_\nu\big|\left(\|(\mathcal{N}+i\zeta)\varphi; L_2(\Gamma^R)\| + \|\varphi\|_\nu\right). \tag{5.7}$$

Из определения функций $X_l^R(a)$, $\varphi_l(a)$ и предложения 4.2 выводим

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{N}+i\zeta)\varphi; L_2(\Gamma^R)\|^2 &= \|(\mathcal{N}+i\zeta)X; L_2(\Gamma^R)\|^2 \\ &= \|\mathcal{N}X; L_2(\Gamma^R)\|^2 + \zeta^2\|X; L_2(\Gamma^R)\|^2 = \|X\|_\nu^2,\end{aligned}$$

следовательно

$$\big|\|(\mathcal{N}+i\zeta)\varphi; L_2(\Gamma^R)\| - \|\varphi\|_\nu\big| = \big|\|X\|_\nu - \|\varphi\|_\nu\big| \leqslant \|X-\varphi\|_\nu.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|X-\varphi\|_\nu &= \|(X_l^R(a^0) - \varphi_l(a^0)) - (X_l^R(S_l) - \varphi_l(S_l))\|_\nu \\ &\leqslant \|(X_l^R(a^0) - \varphi_l(a^0))\|_\nu + \|(X_l^R(S_l) - \varphi_l(S_l))\|_\nu.\end{aligned}$$

В силу краевого условия (3.3), для любого вектора a имеем

$$\|X_l^R(a) - \varphi_l(a)\|_\nu = (2\zeta^2 J_l^R(a))^{1/2},$$

и потому, согласно (5.5),

$$\begin{aligned}|\zeta|^{-1}\big|\|(\mathcal{N}+i\zeta)\varphi; L_2(\Gamma^R)\| - \|\varphi\|_\nu\big| &\leqslant (2J_l^R(a^0))^{1/2} + (2J_l^R(S_l))^{1/2} \\ &\leqslant c(1+|\zeta|^{-1})e^{-\delta R}.\end{aligned}$$

Последний множитель в (5.7) оценивается через $C\|\varphi\|_\nu$, причем

$$\|\varphi\|_\nu = \Big\| \sum_{j=1}^{M} (a_j^0 - S_{lj}) u_j^- \Big\|_\nu \leqslant \mathcal{C}|a^0 - S_l|,$$

где $\mathcal{C} := \max_j \|u_j^-\|_\nu \leqslant C(1+|\zeta|)$ с постоянной C, не зависящей от ζ и μ. Значит,

$$|a^0 - S_l|^2 \leqslant C(\zeta) e^{-\delta R} |a^0 - S_l|,$$

где $C(\zeta) = c|\zeta|^{-1}(1+|\zeta|)^2$ с постоянной c, не зависящей от R, ζ и μ. $\square$

Список литературы

1. V. Grikurov, E. Heikkola, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, *On computation of scattering matrices and on surface waves for diffraction gratings.* — Numerische Mathematik **94**, No. 2 (2003.), 269–288.
2. Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, *О методе вычисления волноводных матриц рассеяния в присутствии точечного спектра.* — Функц. анализ прилож. **48**, No. 1 (2014), 61–72.
3. П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, *Излучение и рассеяние в областях с периодическими волноводами при медленной стабилизации характеристик среды.* — Пробл. матем. анализа **64** (2012), 93–117.
4. Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, *О методе вычисления матриц рассеяния для волноводов.* — Алгебра анализ **23**, No. 1 (2011), 200–231.
5. L. Baskin, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, O. Sarafanov, *Resonant Tunneling: Quantum Waveguides of Variable Cross-Sections, Asymptotics, Numerics, and Applications.* — in: Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer (2015).
6. Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов, *О вычислении волноводной матрицы рассеяния для системы Максвелла.* — Функц. анализ прилож. **49**, No. 1 (2015), 93–96.
7. Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов, *Метод приближенного вычисления волноводных матриц рассеяния.* — Успехи матем. наук **75**, No. 3 (2020), 123–182.
8. Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, *О поведении волноводных матриц рассеяния в окрестности порогов.* — Алгебра анализ **30**, No. 2 (2018), 188–237.
9. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York–London–Sydney (1964).

Plamenevsky B. A., Poretsky A. S., Sarafanov O. V. A method for approximate computation of the scattering matrix in acoustic diffraction gratings.

A two-dimensional reflection acoustic grating is considered. We formulate and justify a method for approximate computation of the scattering matrix describing the scattering of plane waves on the periodic boundary of this grating. To this purpose, the problem in the grating is reduced to a problem in an auxiliary waveguide. The known method for computing waveguide scattering matrices is expanded to the obtained waveguide. The suggested method is not influenced by surface waves in the grating.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Университетская набережная, д. 7/9
199034 г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: b.plamenevskii@spbu.ru
E-mail: a.poretsky@spbu.ru
E-mail: o.sarafanov@spbu.ru

Поступило 8 ноября 2022 г.