Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

С. А. Назаров

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СПЕКТРА КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА С ШИРОКИМ “ОКНОМ” НЕЙМАНА В СВЕТЕ МЕХАНИКИ ТРЕЩИН

§1. Введение

1.1. Постановка задачи. В единичной полосе $\Pi = \mathbb{R} \times (0,1)$ рассмотрим спектральную смешанную краевую задачу

$$-\Delta u^\ell(x) = \lambda^\ell u^\ell(x),\ x \in \Pi, \quad u^\ell(x_1,0) = 0,\ x_1 \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$u^\ell(x_1,1) = 0,\ |x_1| > \ell, \quad \partial_1 u^\ell(x_1,1) = 0,\ |x_1| < \ell. \tag{1.2}$$

Здесь $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ – оператор Лапласа, а $\ell > 0$ – большой параметр – полуширина “окна” Неймана (рис. 1)

$$\Gamma^\ell = \{x : |x_1| < \ell, x_2 = 1\}. \tag{1.3}$$

Вариационной постановке [1] задачи (1.1), (1.2)

$$(\nabla u^\ell, \nabla \psi^\ell)_\Pi = \lambda^\ell (u^\ell, \psi^\ell)_\Pi, \quad \psi^\ell \in \mathcal{H}^\ell, \tag{1.4}$$

на подпространстве

$$\mathcal{H}^\ell = \Big\{\psi^\ell \in H^1(\Pi) : \psi^\ell = 0 \text{ на } \partial\Pi \setminus \overline{\Gamma^\ell}\Big\} \tag{1.5}$$

отвечает [2, гл. 10] неограниченный положительно определенный самосопряженный опертор A^ℓ в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)$ с областью определения $\mathcal{D}(A^\ell)$, более широкой, чем пространство Соболева $H^2(\Pi) \cap \mathcal{H}^\ell$ (см. п. 1, §3). При этом $\nabla = (\partial_1, \partial_2) = \operatorname{grad}$ и $(\cdot,\cdot)_\Pi$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi)$.

Ключевые слова: смешанная краевая задача для оператора Лапласа, дискретный спектр, квантовый волновод, окно Неймана, асимптотика, собственные числа, пороговые резонансы, трещина, формула Гриффитса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 22-11-00046).

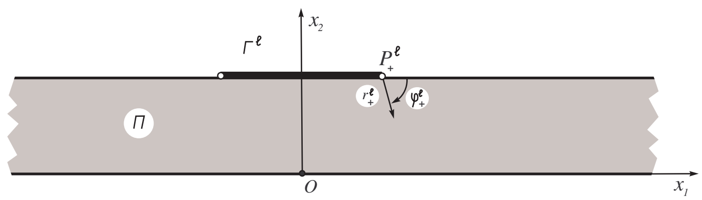

Рис. 1. Полоса с “окном” Неймана (полужирная линия).

Непрерывный спектр σ_c оператора A^ℓ – луч $[\lambda_\dagger, +\infty)$, а ниже точки отсечки $\lambda_\dagger = \pi^2$ располагается дискретный спектр

$$\sigma_d^\ell = \left\{\lambda_1^\ell, \lambda_2^\ell, \ldots, \lambda^\ell_{\#\sigma_d^\ell}\right\} \subset (0, \lambda_\dagger). \tag{1.6}$$

Список (1.6) упорядочен по возрастанию при учете кратностей, а $\#\sigma_d^\ell$ – полная кратность дискретного спектра. Соответствующие собственные функции $u_1^\ell, u_2^\ell, \ldots, u^\ell_{\#\sigma_d^\ell} \in \mathcal{H}^\ell$ можно нормировать в пространстве $L^2(\Pi)$, однако далее будут применяться и другие нормировки.

Задачам Дирихле для пары волноводов, соединенных через окно (рис. 2), или смешанным краевым задачам для волновода-полосы с “окном Неймана” (рис. 1) при различных размерах, количестве и конфигурации окон посвящено обилие исследований (см. публикации [3–13] и др.), причем обычно условия Неймана возникают как искусственные краевые условия[1] на просвете (1.3) в общей стенке двух идентичных квантовых волноводов (см. рис. 2 при $d = 1$ и статьи [3]).

Данная работа тесно примыкает к работам [3] и [10], в которых рассматривались пары квантовые волноводов на рис. 2 при $d = 1$ и $d \in (0, 1)$ соответственно. Задача Дирихле в области

$$\Pi \cup \Gamma_\ell \cup \Pi_d,$$

где $\Pi_d = \mathbb{R} \times (1, 1 + d)$, отличается от задачи (1.1), (1.2), однако методы исследования и результаты из [10], в частности, асимптотические формулы без особого труда приспосабливаются к рассматриваемой смешанной краевой задаче в одиночном волноводе Π.

[1] Альтернативой условию Неймана служит искусственное условие Дирихле на (1.3), но задача Дирихле в единичной полосе Π малоинтересна, так как ее точечный спектр заведомо пуст.

В настоящей работе информация о спектре оператора A^ℓ получена при помощи подходов, отличающихся от предложенных в статьях [3, 10], но имеющих непосредственное отношение к механике трещин (см., например, монографии [14–16], статьи [17–19]) и использующие традиционные приемы дифференцирования вдоль границы и общепринятые термины: корневые сингулярности производных, коэффициенты интенсивности, формула Гриффитса приращения энергии и т.п. Предлагаемые новые приемы пригодны и для изучения волновых процессов в упругих волноводах – многие способы исследования спектров, разработанные ранее для скалярных задач, бесполезны в случае векторных, в частности, краевых задач для системы уравнений теории упругости.

Отличные от использованных в [10] аргументы применены далее также для вывода и обоснования асимптотических разложений изолированных собственных чисел. Помимо утверждений, содержащихся в [3] или имеющих прямые аналоги в [10], получены и новые результаты, уточняющие строение спектра $\sigma^\ell = \sigma_d^\ell \cup \sigma_c$.

Известно, что при любом $\ell > 0$ дискретный спектр (1.6) не пуст и его кратность неограниченно возрастает при $\ell \to +\infty$ (см., например, [3]). В п. 2, §1 один из апробированных результатов воспроизводится при помощи традиционного подхода. Поскольку пространство (1.5) расширяется при увеличении параметра ℓ, функция $\ell \mapsto \lambda_p^\ell \in (0, \lambda_\dagger)$ монотонно убывающая, и увеличение кратности $\#\sigma_d^\ell$ может происходить исключительно в результате отцепления собственного числа от края $\lambda_\dagger$ непрерывного спектра при возникновении порогового резонанса (см. работы [20, 21], а также [22–25] и др.), т.е. при появлении на пороге нетривиального ограниченного решения – затухающего на бесконечности, т.е. захваченной волны, или стабилизирующегося, т.е. почти стоячей волны. В частности, установлена (следствие 6.1) невозможность появления захваченной волны на пороге, однако только при больших размерах ℓ. Проверка отсутствия названных волн при всех ℓ (правильный пороговый резонанс) – открытый вопрос.

1.2. Множественность дискретного спектра. Применим максиминимальный принцип

$$\lambda_m^\ell = \max_{\mathcal{R}_m^\ell} \inf_{\psi \in \mathcal{R}_m^\ell \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla\psi; L^2(\Pi)\|^2}{\|\psi; L^2(\Pi)\|^2}, \tag{1.7}$$

в котором $\mathcal{R}^\ell_m \subset \mathcal{H}^\ell$ – любое подпространство коразмерностью $m-1$, в частности, $\mathcal{R}^\ell_1 = \mathcal{H}^\ell$. Именно, известно [2, теорема 10.2.2], что, если при некотором $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ величина (1.7) попадает на интервал $(0, \lambda_\dagger)$, то она – собственное число из набора (1.6), в частности, $\#\sigma^\ell_d \geqslant m$.

Решим смешанную краевую задачу в прямоугольнике $\Pi_0(\ell) = (-\ell, \ell) \times (0, 1)$ с условиями Дирихле на сторонах $\Upsilon_{\pm\ell} = \{x : x_1 = \pm\ell, x_2 \in (0, 1)\}$ и обозначим $\mathcal{L}^\ell_m$ линейную оболочку функций

$$U^\ell_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \sin\Big(\frac{\pi}{2} x_2\Big) \sin\Big(\frac{\pi j}{2\ell}(x_1 + \ell)\Big), \quad j = 1, \dots, m, \qquad (1.8)$$

продолженных нулем с части $\Pi_0(\ell)$ на всю полосу Π. Эти функции ортонормированы в $L^2(\Pi)$, т.е. $\dim \mathcal{L}^\ell_m = m$, и любое подпространство $\mathcal{R}^\ell_m$ в формулах (1.7) содержит их нетривиальную линейную комбинацию. Кроме того,

$$\|\nabla U^\ell_j; L^2(\Pi)\|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{\ell^2}\Lambda^0_j := \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}\frac{j^2}{\ell^2}. \qquad (1.9)$$

В итоге для любого $m \in \mathbb{N}$ находим такой размер $\ell^\#_m$, что $\lambda^\ell_m < \lambda_\dagger$ и $\#\sigma^\ell_d \geqslant m$ при $\ell > \ell^\#_m$.

Следующее важное утверждение доказано в работе [3] (см. также [10]).

Лемма 1.1. *Справедливы включения*

$$\lambda^\ell_m \in \Big[\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}\frac{(j-1)^2}{\ell^2}, \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}\frac{j^2}{\ell^2}\Big], \quad j = 1, \dots, \#\sigma^\ell_d. \qquad (1.10)$$

1.3. Содержание статьи. Сначала в п. 1, §2 строятся формальные асимптотики при $\ell \to +\infty$ собственных чисел задачи (1.1), (1.2), причем в асимптотические конструкции привлекаются решения одномерной модели (2.20) смешанной краевой спектральной задачи на длинном (тонком после сжатия координат) прямоугольнике $\Pi_0(\ell)$ и статической (с фиксированным спектральным параметром) задачи (2.3)–(2.5) в полосе Π. Последняя задача служит для описания явления пограничного слоя, локализованного вблизи краев окон. Затем в п. 2 и п. 3, §2 дается определение порогового резонанса и выводятся асимптотические формулы для критических размеров ℓ^*_m при больших индексах $m \in \mathbb{N}$, при которых (размерах) окно $\Gamma^{\ell^*_m}$ вызывает пороговый резонанс, простой в рассматриваемой задаче (см. статью [24] по поводу общего случая). При этом для удобства и благодаря геометрической симметрии задача

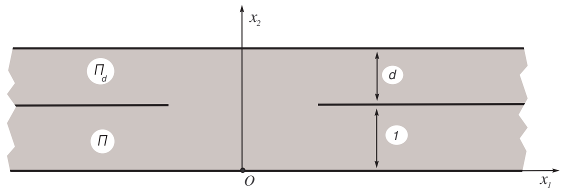

Рис. 2. Два соединенные “окном” волновода с шириной 1 и d.

в Π сужается на полуполосу $\Pi_+ = \{x \in \Pi : x_1 > 0\}$ и снабжается искусственными краевыми условиями Дирихле или Неймана на сечении $\Upsilon_0 = \{x \in \Pi : x_1 = 0\}$, т.е. рассматриваются две вспомогательные смешанные краевые задачи, помечаемые литерами D и N.

В §3 обсуждаются сингулярности решений в концах $P^\ell_\pm$ отрезка Γ^ℓ, точках смены типа краевых условий. При помощи обычного приема в теории разрушения – дифференцирования по переменной x_1, т.е. вдоль боковых сторон полуполосы Π_+ – и анализа сингулярностей удалось классифицировать пороговые резонансы в обеих вспомогательных задачах (теорема 3.1) и, в частности, показать, что у них все пороговые резонансы простые. Впрочем, такой подход не позволил проверить отсутствие двойного порогового резонанса в исходной задаче (1.1), (1.2), возникающего вследствие одновременного появления захваченной и почти стоячей волн в усеченных задачах в полуполосе Π_+ с искусственными условиями Дирихле и Неймана на торце. Эта возможность отвергается в п. 4, §4 после построения асимптотики собственных чисел, так как двойной пороговый резонанс порождает на открытом интервале (1.10) два (различных) собственных числа, что противоречит результату [3], сформулированному в лемме 1.1.

В §4 при всех возможных качествах порогового резонанса найдены асимптотики при $\varepsilon \to +0$ собственных чисел, отцепляющихся от порога при увеличении $\ell \mapsto \ell+\varepsilon$ полуширины окна Неймана. В разных ситуациях порядки возмущения составляют $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^6)$ и $O(\varepsilon)$ (см. теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 соответственно), причем и в гипотетической ситуации двойного порогового резонанса исходной задачи. Поскольку сжатие координат $x \mapsto \ell^{-1}x$ превращает длинный прямоугольник $\Pi_0(\ell)$ в тонкую область алгоритм построения асимптотики собственных чисел из дискретного спектра известен (см. монографии [26, гл. 5, §6], [27, гл. 7, §1] и статьи [28, 29]), а пограничные слои, возникающие около сдвинутых концов $P_+^{\ell+\varepsilon}$ окон, опять-таки строятся при помощи приемов из механики трещин (см. [17, 19] и [30, гл. 7]). Поэтому асимптотические анзацы приводятся без особых комментариев.

Последние два параграфа посвящены обоснованию полученных асимптотических представлений. В §5 при помощи традиционных подходов (лемма 5.1 о "почти собственных" значениях операторов и теорема 5.1 о "сходимости") получены оценки остатков в асимптотических формулах собственных чисел задач в Π и Π_+, которые (формулы) были выведены в §2 и §4 на формальном уровне. Наконец, в §6 оправданы асимптотики критических размеров ℓ_m^* при $m \to +\infty$ при использовании весовых пространств с отделенной асимптотикой и прверки равномерных относительно параметра ℓ априорных оценок решений вспомогательных задач в полуполосе Π_+ с энергетическими пороговыми условиями излучения на бесконечности.

§2. Формальный асимптотический анализ

2.1. Асимптотика собственных чисел. В качестве главного члена асимптотики собственной функции задачи (1.1), (1.2), отвечающей ее собственному числу

$$\lambda_m^\ell = \frac{\pi^2}{4} + \ell^{-2}\Lambda_m^0 + \ell^{-3}\Lambda_m' + \widetilde{\lambda}_m^\ell, \tag{2.1}$$

логично взять нормированную в $L^2(\{x \in \Pi : |x_1| < \ell\})$ функцию (1.8), $j = m$. Вместе с тем производная $\partial_1 U_m^\ell$ претерпевает разрывы при $x_1 = \pm\ell$ – для их компенсации, следуя [31, 32] и [26, гл. 5, §6], построим пограничные слои, которые образуются в результате замен координат

$$x \ \mapsto \ \xi^\pm = (\xi_1^\pm, \xi_2^\pm) = (\pm x_1 - \ell, x_2) \tag{2.2}$$

и формального перехода к $\ell = +\infty$. Не будем писать индекс $\pm$ и рассмотрим модельную задачу с параметром $\mu = \pi^2/4$

$$-\Delta v(\xi) = \mu v(\xi), \ \xi \in \Pi, \tag{2.3}$$

$$v(\xi_1, 0) = 0, \ \xi_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$v(\xi_1, 1) = 0, \ \xi_1 > 0, \quad \partial_1 v(\xi_1, 0) = 0, \ \xi_1 < 0. \tag{2.5}$$

Далее понадобится ее (вещественное) решение V, исчезающее при $\xi_1 \to +\infty$ со скоростью $O(e^{-\pi\sqrt{3}\xi_1/2})$ и приобретающее в рукаве $\Pi_- = \{\xi \in \Pi : \xi_1 < 0\}$ линейный рост

$$V(\xi) = (\xi_1 + M)\sin\Big(\frac{\pi}{2}\xi_2\Big) + O(e^{\pi\sqrt{2}\xi_1}), \quad \xi_1 \to -\infty. \tag{2.6}$$

Существование такого решения сомнений не вызывает, а его поведение на бесконечности определяется при помощи метода Фурье. Кроме того, M – некоторая абсолютная величина – ее приближенное значение можно найти при помощи вычислительных методов.

Лемма 2.1. *Выполнено соотношение*

$$M = 2\int\limits_{\Pi} \Big(|\nabla V_0(\xi)|^2 - \frac{\pi^2}{4}|V_0(\xi)|^2\Big)\,d\xi > 0, \tag{2.7}$$

где фигурирует непрерывная кусочно-гладкая функция

$$\Pi \ni \xi \;\mapsto\; V_0(\xi) = \begin{cases} V(\xi) & \text{при} \quad \xi_1 > 0, \\ V(\xi) - \xi_1 \sin(\pi\xi_2/2) & \text{при} \quad \xi_1 < 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Интеграл I из средней части формулы (2.7) сходится, так как благодаря соотношениям (2.8) и (2.6) подынтегральное выражение экспоненциально затухает на бесконечности. Этот интеграл неотрицательный в силу одномерных неравенств

$$\int\limits_0^1 \Big|\frac{d\mathcal{V}}{d\xi_2}(\xi_2)\Big|^2 d\xi_2 \geqslant \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^1 |\mathcal{V}(\xi_2)|^2\,d\xi_2,\; \mathcal{V} \in H^1(0,1),\; \mathcal{V}(0) = 0, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_0^1 \Big|\frac{d\mathcal{V}}{d\xi_2}(\xi_2)\Big|^2 d\xi_2 \geqslant \pi^2\int\limits_0^1 |\mathcal{V}(\xi_2)|^2\,d\xi_2,\; \mathcal{V} \in H^1(0,1),\; \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(1) = 0. \tag{2.10}$$

Более того, $I = 0$ лишь в случае

$$V_0(\xi) = C_0 \sin\Big(\frac{\pi}{2}\xi_2\Big) \text{ при } \xi_1 < 0 \text{ и } V_0(\xi) = 0 \text{ при } \xi_1 > 0,$$

который невозможен по причине потери функцией V_0 непрерывности при $C_0 \neq 0$ и превращения ее в нуль при $C_0 = 0$.

Проверка равенства $2M = I$ осуществляется многократным применением формулы Грина для функций V и V_0, причем последняя удовлетворяет соотношениям (2.3)–(2.5) вне замкнутого сегмента $\overline{\Upsilon_0} =$

$\{\xi : \xi_1 = 0,\, \xi_2 \in [0,1]\}$, на котором выполнены условия скачка

$$[V_0](\xi_2) := V_0(+0,\xi_2) - V_0(-0,\xi_2) = 0, \quad [\partial_1 V_0](\xi_2) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\xi_2\Big).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^1 V_0(0,\xi_2)[\partial_1 V_0](\xi_2)\, d\xi_2 \\
&= -\int_0^1 \big(V(0,\xi_2)[\partial_1 V_0](\xi_2) - V_0(0,\xi_2)[\partial_1 V](\xi_2)\big)\, d\xi_2 \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_0^1 \big(V(\xi)\partial_1 V_0(\xi) - V_0(\xi)\partial_1 V(\xi)\big)\Big|_{\xi_1=-R}^{R} d\xi_2 \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_0^1 V_0(-R,\xi_2)\partial_1 V(-R,\xi_2)\, d\xi_2 = M\int_0^1 \sin^2\Big(\frac{\pi}{2}\xi_2\Big)\, d\xi_2 = \frac{M}{2}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Применим метод сращиваемых разложений (см. монографии [33,34], [26, гл. 2] и др.) в исполнении [35, 36] и срастим внешнее, справедивое внутри срединной части $\Pi_0(\ell) = \{x : |x_1| < \ell, x_2 \in (0,1)\}$ волновода, разложение

$$\begin{aligned}
u_m^\ell(x) &= U_m^\ell(x) + \ell^{-1} U_m^{\ell\prime}(x) + \ldots \\
&= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\bigg(\mathcal{U}_m^0\Big(\frac{x_1}{\ell}\Big) + \frac{1}{\ell}\,\mathcal{U}_m'\Big(\frac{x_1}{\ell}\Big) + \ldots\bigg) + \ldots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

с внутренними разложениями

$$u_m^\ell(x) = \ell^{-3/2} C_m^{\pm} V(\xi^{\pm}) + \ldots, \tag{2.12}$$

приемлемыми около сегментов $\overline{\Upsilon_{\pm\ell}} = \{\xi : \xi_1 = \pm\ell,\, \xi_2 \in [0,1]\}$. Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, несущественные для предпринимаемого формального асимптотического анализа.

Разделение переменных в задаче (1.1), (1.2), суженной на прямоугольник $\Pi_0(\ell)$, вместе с анзацем (2.1) для собственного числа показывают, что поправочный член $\mathcal{U}_m'$ разложения (2.11) – решение задачи

Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\partial_y^2\mathcal{U}_m'(y)-\Lambda_m^0\mathcal{U}_m'(y)=\Lambda_m'\mathcal{U}_m^0(y),\ y\in(-1,1),\quad \mathcal{U}_m'(\pm1)=\mathcal{G}_m^\pm. \tag{2.13}$$

При этом $y=\ell^{-1}x_1$ – растянутая продольная координата, а собственная пара этой же задачи, обусловившая выбор (1.8), имеет вид

$$\left\{\Lambda_m^0,\mathcal{U}_m^0(y)\right\}=\left\{\frac{\pi^2}{4}\,m^2,\sin\Big(\frac{\pi}{2}m(y+1)\Big)\right\}. \tag{2.14}$$

Собственная функция $\mathcal{U}_m^0$ нормирована в пространстве Лебега $L^2(-1,1)$.

Данные Дирихле $\mathcal{G}_m^\pm$ в задаче (2.13) найдем при помощи процедуры сращивания. Имеем

$$\begin{aligned}&U_m^\ell(x)+\ell^{-1}U_m^{\ell\prime}(x)=\ell^{-1/2}\sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\\&\times\Big(\frac{\pi m}{2}(y\mp1)(\mp1)^m+O(|y\mp1|^3)+\ell^{-1}\mathcal{G}_m^\pm+O(\ell^{-1}|y\mp1|^2)\Big)\\&=\ell^{-3/2}\sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Big(-\frac{\pi m}{2}\xi_1^\pm(\mp1)^{m+1}+\mathcal{G}_m^\pm+O\big(\ell^{-3}(1+|\xi_1^\pm|)^3\big)\Big),\end{aligned} \tag{2.15}$$

Отметим, что, во-первых, $\partial_y^2\mathcal{U}_m^0(\pm1)=0$, и во-вторых, решение $\mathcal{U}_m'$ унаследует свойство четности/нечетности от собственной функции $\mathcal{U}_m^0(\pm1)$, а значит, его можно выбрать так, чтобы $\partial_y\mathcal{U}_m'(\pm1)=0$. Эти обстоятельства и обеспечили оценки остатков в выкладке (2.15).

Сравнивая формулы (2.11), (1.8) и (2.12), (2.6), видим, что внешнее разложение совпадает в главном с внутренними в промежуточных зонах $\xi_1^\pm=\pm x_1-\ell=O(\sqrt{\ell})$ при ограничениях

$$C_m^\pm=-\frac{\pi m}{2}(\mp1)^{m+1}\quad\text{и}\quad \mathcal{G}_m^\pm=-\frac{\pi m}{2}(\mp1)^{m+1}\,M. \tag{2.16}$$

Осталось соблюсти условие разрешимости задачи (2.13), которое можно вывести следующим образом:

$$\begin{aligned}\Lambda_m'&=\Lambda_m'\int_{-1}^{1}|\mathcal{U}_m^0(y)|^2\,dy=-\int_{-1}^{1}\mathcal{U}_m^0(y)\big(\partial_y^2\mathcal{U}_m'(y)+\Lambda_m^0\mathcal{U}_m'(y)\big)\,dy\\&=\mathcal{U}_m'(y)\partial_y\mathcal{U}_m^0(y)\Big|_{y=-1}^{1}=\pi^2m^2M.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Итак, основная поправка в анзаце (2.1) для собственного числа задачи (1.1), (1.2) найдена. Сформулируем утверждение (ср. [10, теорема 1.1]), которое включает оценку остатка $\widetilde{\lambda}_m^\ell$ и будет доказано в п. 4, §5.

Теорема 2.1. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные $\ell_m^{\#}$ и $c_m^{\#}$, что при $\ell > \ell_m^{\#}$ кратность $\#\sigma_d^\ell$ дискретного спектра оператора A^ℓ задачи* (1.1), (1.2) *превосходит m, и первые m собственных чисел из списка* (1.6) *удовлетворяют асимптотическим формулам*

$$\left|\lambda_j^\ell - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2 j^2}{\ell^2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{\ell}\Big)\right| \leqslant \frac{c_m^{\#}}{\ell^{7/2}}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.18}$$

где $M > 0$ – величина (2.7).

2.2. Пороговый резонанс и вспомогательные задачи. Для того чтобы оперировать скалярными, а не матричными дифракционными характеристиками волновода, воспользуемся геометрической симметрией и сузим задачу (1.1), (1.2) на полуполосу $\Pi_+ = (0, +\infty) \times (0, 1)$, назначив на ее торце искусственные краевые условия

$$u_D^\ell(0, x_2) = 0 \text{ или } -\partial_1 u_N^\ell(0, x_2) = 0 \quad \text{при } x_2 \in (0, 1). \tag{2.19}$$

Полученные краевые задачи с условиями Дирихле или Неймана обозначаем (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ с индексами $T = D$ или $T = N$ соответственно. При этом решения u_D^ℓ и u_N^ℓ, продолженные с полуполосы Π_+ на всю полосу Π соответственно как нечетная и четная функции переменной x_1, дают решение исходной задачи (1.1), (1.2), гладкое на сечении Υ_0.

Примем энергетический[2] принцип излучения Мандельштама [39] (см. также [40, гл. 1], [30, гл. 5]) и, следуя подходу [41], [30, гл. 5], введем на пороге $\lambda_\dagger = \pi^2$ линейные волны

$$w_\pm(x) = (x_1 \mp i) \sin(\pi x_2), \tag{2.20}$$

подчиненные условиям ортогональности и нормировки

$$Q(w_\pm, w_\pm) = \pm i, \quad Q(w_\pm, w_\mp) = 0. \tag{2.21}$$

Здесь Q – симплектическая (полуторалинейная и антиэрмитова) форма

$$Q(u, v) = \int_0^1 \Big(\overline{v(R, x_2)}\, \partial_1 u(R, x_2) - u(R, x_2)\, \overline{\partial_1 v(R, x_2)}\Big)\, dx_2, \tag{2.22}$$

[2]Форма (2.22) пропорциональна проекции на ось волновода вектова Умова–Пойнтинга [37, 38] переноса энергии, что и определяет название принципа излучения.

пришедшая из формулы Грина для оператора Гельмгольца и потому не зависящая от параметра R для волн (2.20) и других решений краевых задач в полосе П. Известно [30, гл. 2], что независимо от того, принадлежит или нет порог $\lambda = \pi^2$ точечному спектру σ^ℓ_{Tp} оператора A^ℓ_T, задача (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ имеет решение

$$\zeta^\ell_T(x) = w_-(x_1 - \ell, x_2) + s^\ell_T w_+(x_1 - \ell, x_2) + \widetilde{\zeta}^\ell_T(x), \tag{2.23}$$

в котором остаток $\widetilde{\zeta}^\ell_T(x)$ исчезает при $x_1 \to +\infty$ как $O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1})$, а s^ℓ_T – пороговый коэффициент[3] рассеяния. Равенство

$$|s^\ell_T| = 1 \tag{2.24}$$

обеспечено формулой Грина и соотношениями (2.21).

В рассматриваемой ситуации простого порога [23, 24] пороговый резонанс характеризуется [20, 21] наличием у задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ с $\lambda = \lambda_\dagger = \pi^2$ нетривиального ограниченного решения. Резонанс называется правильным, если имеется нетривиальное ограниченное решение, не затухающее на бесконечности, т.е. в рассматриваемом случае принимающее вид cu^ℓ_T, где $c \neq 0$ и

$$u^\ell_T(x) = \sin(\pi x_2) + \widetilde{u}^\ell_T(x). \tag{2.25}$$

Функция (2.25) именуется почти стоячей волной. Подчеркнем, что пороговый резонанс может быть также инициирован захваченной волной $u^\ell_T \in H^1(\Pi_+)$, т.е. истинной собственной функцией оператора A^ℓ_T в случае $\lambda_\dagger \in \sigma^\ell_{pT}$ (ср. статьи [20, 21, 24] и др.).

Очередное утверждение очевидно (его простую проверку, опирающуюся на вытекающую из (2.20) формулу $w_-(x) - w_+(x) = -2i\sin(\pi x_2)$, можно найти, например, в статье [42]).

Предложение 2.1. *Решение* (2.25) *задачи* (1.1), (1.2), $(2.19)_T$*, обеспечивающие правильный пороговый резонанс, существует в том и только в том случае, если* $s^\ell_T = -1$.

Критерий правильного порогового резонанса будет использован в следующем пункте для нахождения критических размеров ℓ^*_m, вызывающих этот феномен.

Введем еще пороговую матрицу рассеяния в задаче (2.3)–(2.5) на пороге $\mu = \lambda_\dagger = \pi^2$. В полуполосе $\Pi_- = (-\infty, 0) \times (0, 1)$ имеются две

[3] В исходной задаче (1.1), (1.2) возникает пороговая матрица рассеяния размером 2×2 и замена ее скаляром значительно упрощает вычисления.

распространяющиеся (осциллирующие) волны

$$v_\pm(x) = \sqrt[4]{\frac{4}{3\pi^2}}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)e^{\pm i\pi\sqrt{3}x_2/2}, \tag{2.26}$$

для которых благодаря нормирующему множителю верны прежние условия ортогональности и нормировки

$$Q(v_\pm, v_\pm) = \pm i, \quad Q(v_\pm, v_\mp) = 0. \tag{2.27}$$

Согласно принципу излучения Зоммерфельда (см., например, монографии [43, 44]) волна (2.26) "путешествует" вдоль полосы Π в направлении от $\mp\infty$ к $\pm\infty$. Такая же классификация порождена энергетическим принципом излучения Мандельштама, универсальным, в частности, пригодным для сортировки линейных волн (2.20): направление распространения волн $w_\pm$ и $v_\pm$ указывается знаком при мнимой единице в первых соотношениях (2.21) и (2.27) соответственно. Иными словами, решение (2.23) порождено приходящей в рукаве Π_+ волной w_-, а s_T^ℓ – коэффициент отражения при уходящей волне w_+, причем равенство (2.24) – следствие закона сохранения энергии. Точно так же приходящие в полуполосах Π_+ и Π_- волны w_- и v_+ инициируют такие решения дифракционной задачи (2.3)–(2.5):

$$V_+(\xi) = \chi_+(\xi_1)\left(w_-(\xi) + S_+^+ w_+(\xi)\right) + \chi_-(\xi_1)S_+^- v_-(\xi) + \widetilde{V}_+(\xi), \tag{2.28}$$

$$V_-(\xi) = \chi_-(\xi_1)\left(v_+(\xi) + S_-^- v_-(\xi)\right) + \chi_+(\xi_1)S_-^+ w_+(\xi) + \widetilde{V}_-(\xi). \tag{2.29}$$

Здесь остатки $\widetilde{V}_\pm(\xi)$ затухают как $O\left(e^{-\pi\sqrt{3}\xi_1}\right)$ при $\xi_1 \to +\infty$ и $O\left(e^{\pi\sqrt{5}\xi_1/2}\right)$ при $\xi_1 \to -\infty$ (расхождение показателей в экспонентах обусловлено тем, что условия Дирихле назначены в полуполосе Π_- на обеих боковых сторонах, а в полуполосе Π_+ – только на одной), $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – эталонная срезающая функция,

$$\chi(\xi_1) = 1 \text{ при } \xi_1 > 2, \quad \chi(\xi_1) = 0 \text{ при } \xi_1 < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 1, \tag{2.30}$$

и

$$\chi_\pm(\xi_1) = \chi(\pm\xi_1). \tag{2.31}$$

Наконец, коэффициенты $S_{\cdots}^{\cdots}$ образуют пороговую (2×2)-матрицу рассеяния S, унитарную ($S^* = S^{-1}$) и симметричную ($S_-^+ = S_+^-$) (проверку этих алгебраических фактов можно найти, например, в статье [42, §2]).

Очередное утверждение для пороговой матрицы рассеяния будет доказано в п. 3, §3.

Лемма 2.2. *Верны соотношения*

$$S_-^+ = S_+^- \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |S_+^+| = |S_-^-| < 1.$$

2.3. Асимптотика критических размеров окна Неймана. Как и в п. 1 §2, применим метод сращиваемых асимптотических разложений. На длинном прямоугольнике $\Pi_0(\ell)$ в качестве внешнего разложения решения задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ возьмем линейную комбинацию волн (2.26)

$$\begin{aligned}\zeta_T^\ell(x) &= C_T^\ell v_T(x) + \dots \\ &= C_T^\ell \Big(e^{i\pi\sqrt{3}\ell/2} v_+(x_1-\ell, x_2) \mp e^{-i\pi\sqrt{3}\ell/2} v_-(x_1-\ell, x_2)\Big) + \dots,\end{aligned} \tag{2.32}$$

где

$$v_D(x) = v_+(x) - v_-(x) \text{ или } v_N(x) = v_+(x) + v_-(x). \tag{2.33}$$

Внутреннее разложение около конца P_+^ℓ окна Неймана – линейная комбинация решений (2.28) и (2.29) задачи (2.3)–(2.5) с параметром $\mu = \pi^2$

$$\zeta_T^\ell(x) = V_+(\xi) + B_T^\ell V_-(\xi) + \dots, \tag{2.34}$$

которая допускает представления

$$\zeta_T^\ell(x) = w_-(\xi) + \big(S_+^+ + S_-^+ B_T^\ell\big)\, w_+(\xi) + \dots \text{ при } \xi_1 > 0, \tag{2.35}$$

$$\zeta_T^\ell(x) = B_T^\ell v_+(\xi) + \big(S_+^- + S_-^- B_T^\ell\big)\, v_-(\xi) + \dots \text{ при } \xi_1 < 0. \tag{2.36}$$

Согласно определению (2.23) множитель при уходящей волне $w_+(\xi)$ в формуле (2.35) становится главным членом асимптотики порогового коэффициента рассеяния s_T^ℓ (см. далее теорему 6.2).

Сравнивая разложения (2.32) и (2.36), приходим к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} e^{i\pi\sqrt{3}\ell/2} C_T^\ell &= B_T^\ell \\ \mp e^{-i\pi\sqrt{3}\ell/2} C_T^\ell &= S_+^- + S_-^- B_T^\ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; B_T^\ell = -\frac{S_+^-}{S_-^- \pm e^{-i\pi\sqrt{3}\ell}}, \tag{2.37}$$

причем знаки минус и плюс отвечают литерам $T = D$ и $T = N$ соответственно. Таким образом,

$$s_T^\ell = s_T^0(\ell) + \dots, \text{ где } \quad s_T^0(\ell) = S_+^+ - \frac{S_-^+ S_+^-}{S_-^- \pm e^{-i\pi\sqrt{3}\ell}}. \tag{2.38}$$

Теорема 2.2. *Величина $s_T^0(\ell)$ лежит на единичной окружности $\mathbb{S}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и при*

$$\ell^\bullet_{Tm} = \ell^\bullet_{T0} + \frac{\sqrt{3}}{2} m > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{2.39}$$

попадает в точку -1; здесь $T = D, N$ и $\ell^\bullet_{T0} \in (-\sqrt{3}/2, 0]$ – некоторые числа.

Доказательство. Прежде всего отметим, что знаменатель дроби из формулы (2.38) не обращается в нуль благодаря лемме 2.2.

Подставим сумму $V_+ + B_T^\ell V_-$ в формулу Грина на длинном прямоугольнике $\Pi_0(R) = (-R, R) \times (0,1)$ и перейдем к пределу при учете соотношений (2.21), (2.27) и представлений (2.28), (2.29). В результате получим равенства

$$\begin{aligned} 0 &= Q\left(v_- + w_+(S_+^+ + B_T^\ell S_-^+), v_- + w_+(S_+^+ + B_T^\ell S_-^+)\right) \\ &- Q\left(v_+ B_T^\ell + w_-(S_+^- + B_T^\ell S_-^-), v_+ B_T^\ell + w_-(S_+^- + B_T^\ell S_-^-)\right) \\ &= -i + i|S_+^+ + B_T^\ell S_-^+|^2 - i|B_T^\ell|^2 + i|S_+^- + B_T^\ell S_-^-|^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

В силу заключения (2.37) имеем

$$S_+^- + B_T^\ell S_-^- = \pm \frac{S_-^+ e^{-i\pi\sqrt{3}\ell}}{S_-^- \pm e^{-i\pi\sqrt{3}\ell}} \quad \Rightarrow \quad |B_T^\ell| = |S_+^- + B_T^\ell S_-^-|.$$

Следовательно, последние два слагаемых в равенствах (2.40) взаимно уничтожаются, т.е. в самом деле

$$|s_T^0(\ell)| = |S_+^+ + B_T^\ell S_-^+| = 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что следующая величина также лежит на единичной окружности $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$:

$$S_-^- - \frac{S_-^+ S_+^-}{1 + S_+^+} = e^{i\pi\Psi}, \quad \Psi \in [0, 2). \tag{2.41}$$

Сравнив эту формулу с последним выражением из (2.38), находим величины

$$\ell^\bullet_{jT} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{cases} 2j - \Psi + 1 & \text{при} \quad T = D, \\ 2j - \Psi & \text{при} \quad T = N, \end{cases} \quad \text{где } j \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \tag{2.42}$$

для которых главный член $s_T^0(\ell^\bullet_{mT})$ асимптотики порогового коэффициента отражения s_T^ℓ во вспомогательной задаче на полуполосе Π_+ с условиями Дирихле ($T = D$) и Неймана ($T = N$) на отрезке Υ_0 превращается в -1. Осталось из семейства (2.42) выбрать положительную монотонную последовательность (2.39). Лемма доказана. $\square$

Асимптотический анализ будет продолжен в §6, где будет проверено основное утверждение в данной статье.

Теорема 2.3. *Для $T = D$ и $T = N$ при больших индексах $m \in \mathbb{N}$ для членов монотонных последовательностей $\{\ell^*_{mT}\}_{m\in\mathbb{N}}$ критических размеров окна Неймана, порождающих правильные пороговые резонансы в задаче* (1.1), (1.2), $(2.19)_T$*, справедливо соотношение*

$$\left|\ell^*_{m+\mathbf{m}_T} - \ell^\bullet_{Tm}\right| \leqslant Ce^{-\delta m}, \quad \delta > 0. \tag{2.43}$$

Здесь $\ell^\bullet_{mm}$ – величины (2.39)*, найденные по пороговой матрице рассеяния S в задаче* (2.3)–(2.5) *в соответствии с формулами* (2.41) *и* (2.42)*, а сдвиги индексов $\mathbf{m}_T \in \mathbb{Z}$ учитывают количество критических размеров окна вне действия асимптотической формулы.*

Из оценки (2.43) вытекает, что все правильные пороговые резонансы в задаче (1.1), (1.2) простые.

Следствие 2.1. *Найдется такое число $m_* \in \mathbb{N}$, что при $m_D, m_N > m_*$ равенство $\ell_{m_D D} = \ell_{m_N N}$ невозможно.*

§3. Выгоды от манипуляций с корневыми сингулярностями

3.1. Область определения оператора задачи. В точках $P^\ell_\pm = (\pm\ell, 1)$ смены типа краевого условия в задаче (1.1), (1.2) градиент решения u^ℓ приобретает корневые сингулярности (см., например, [30, гл. 7, §1 и §4]), а именно,

$$u^\ell(x) = K^\ell_\pm r_\pm^{1/2} \sin\frac{\varphi_\pm}{2} + O(r_\pm^{3/2}), \quad r_\pm \to +0. \tag{3.1}$$

Здесь $(r_\pm, \varphi_\pm) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$ – система полярных координат с центром в точке $P^\ell_\pm$ (рис. 1), а $K^\ell_\pm$ – коэффициент интенсивности (термин заимствован из механики трещин; ср. монографии [14–16], [30, гл. 7] и др.). При $K^\ell_\pm \neq 0$ функция (3.1) не попадает в пространство $H^2_{loc}(\overline{\Pi})$ из-за отделенного в представлении (3.1) слагаемого $O(r_+^{1/2})$, порождающего корневые сингулярности производных. Поэтому (подробности см.

в [45], [30, гл. 2]) областью определения введенного в п. 1, §1 оператора A^ℓ служит линейное пространство

$$\mathcal{D}(A^\ell) = \Big\{ u^\ell(x) = \widehat{u}^{\,\ell}(x) + \sum_{\pm} \chi_0(r_\pm) K_\pm^\ell r_\pm^{1/2} \sin\frac{\varphi_\pm}{2} \;\Big|\; K_\pm^\ell \in \mathbb{C},$$
$$u^\ell \in H^2(\Pi),\ u^\ell(x_1, 0) = 0 \ \text{ при } x_1 \in \mathbb{R},\ \text{ выполнены условия (1.2)} \Big\}, \tag{3.2}$$

причем $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ – срезающая функция, локализующая сингулярности решения,

$$\chi_0(r) = 1 \text{ при } r < \frac{1}{3}\min\{1, \ell\},\ \chi_0(r) = 0\ \ r > \frac{2}{3}\min\{1, \ell\},\ \ 0 \leqslant \chi_0 \leqslant 1. \tag{3.3}$$

3.2. Коэффициент интенсивности в решении модельной задачи. Аналогичная указанной в (3.2) сингулярность в точке $P^0 = (0, 1)$ возникает и у решения (2.6) задачи (2.3)–(2.5) с параметром $\mu = \pi^2/4$:

$$V(\xi) = \chi_0(\rho) K \rho^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + \widehat{V}(\xi) \quad \widehat{V} \in H^2_{loc}(\overline{\Pi}). \tag{3.4}$$

Здесь $\rho = |\xi - P^0|$ и $\varphi \in (0, \pi)$ – угловая переменная. Все ингредиенты формулы (3.4) вещественные.

Замечание 3.1. Гармонические в полуплоскости $\{\xi : \xi_2 < 1\}$ функции, удовлетворяющие краевым условиям (2.5), имеют вид

$$\rho^{\pm(j-1/2)} \sin\Big(\Big(j - \frac{1}{2}\Big)\varphi\Big), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

и называются степенными решениями. Дифференцирование вдоль границы оставляет каждую решением той же задачи (обычный прием в теории трещин; ср. [30, гл. 7, §4]). В этом параграфе понадобятся следующие простые формулы:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \rho^{k+1/2} \sin\Big(\Big(k + \frac{1}{2}\Big)\varphi\Big) = C_k \rho^{k-1/2} \sin\Big(\Big(k - \frac{1}{2}\Big)\varphi\Big), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и в случаях $k = 0$, $k = 1$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \rho^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} \rho^{-1/2} \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} \rho^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big) = \frac{3}{2} \rho^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2}. \tag{3.6}$$

Наиболее простой способ вычислить коэффициенты C_k предложен в работах [17, 19]: нужно положить $\varphi = \pi$ и заметить, что $\partial_1 = -\partial_\rho$ на полуоси $\{\xi : \xi_1 < 0,\, \xi_2 = 1\}$.

Лемма 3.1. *Вещественный коэффициент интенсивности в представлении* (3.4) *отличен от нуля*: $K = +\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ *или* $K = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Доказательство. Производная $V_1 = \partial_1 V$ удовлетворяет той же задаче (2.3)–(2.5), что и сама функция V, однако в силу формул (3.4) и (3.6) приобретает корневую особенность в точке P^0:

$$V_1(\xi) = -\frac{1}{2} K \rho^{-1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + O(\rho^{1/2}), \quad \rho \to +0. \tag{3.7}$$

Кроме того, $V_1(\xi) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\xi_2\right) + O\left(e^{2\sqrt{\pi}\xi_1}\right)$ при $\xi_1 \to -\infty$. Подставим функции V и V_1 в формулу Грина на прямоугольнике $\Pi_0(R)$ с вырезанным полукругом $\mathbb{B}^+_{1/R}(P^0) = \{\xi \in \overline{\Pi} : \rho < 1/R\}$ и вычислим предел при $R \to +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{\pm} \pm \lim_{R\to+\infty} \int_0^1 \left(V(\xi)\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}(\xi) - V_1(\xi)\frac{\partial V}{\partial \xi_1}(\xi)\right)\Big|_{\xi_1 = \pm R} d\xi_2 \\ - \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \left(V(\xi)\frac{\partial V_1}{\partial \rho}(\xi) - V_1(\xi)\frac{\partial V}{\partial \rho}(\xi)\right)\Big|_{\rho = 1/R} d\varphi = 0 + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}K^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Лемма доказана. □

3.3. Доказательство леммы 2.2. Предположим, что $S_+^- = 0$. Тогда осциллирующая волна $v_-(\xi)$ исчезает из разложения (2.28), т.е. решение (2.28) затухает при $\xi_1 \to +\infty$. Обозначим K_+ коэффициент интенсивности у этой функции. При $\rho \to +0$ верны аналогичные (3.4) и (3.7) представления

$$\begin{aligned} V_+(\xi) &= K_+ \rho^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + O(\rho^{3/2}), \\ V_{1+}(\xi) &:= \partial_1 V_+(\xi) = -\frac{1}{2} K_+ \rho^{-1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + O(\rho^{1/2}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставим функции (3.9) в формулу Грина на множестве $\Pi_0(R) \setminus \mathbb{B}^+_{1/R}(P^0)$ и, повторив в главном выкладку (3.8) при учете определения (2.20) волн $w_\pm$ и разложения (2.20) с $S^-_+ = 0$, получим равенство[4]

$$0 = \frac{1}{2}\left(1 + \overline{S^+_+}\right)\left(1 + S^+_+\right) + \frac{\pi}{2}\left|K_+\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \operatorname{Re} S^+_+\right)^2 + \left(\operatorname{Im} S^+_+\right)^2 + \pi\left|K_+\right|^2\right). \quad (3.10)$$

Следовательно, $S^+_+ = -1$ и $K_+ = 0$, а значит, во-первых, согласно предложению 2.1 решение V теряет линейный рост при $\xi_1 \to +\infty$, и во-вторых, производная $\partial_1 V_+$ принадлежит пространству Соболева $H^1(\Pi)$, так как остается ограниченной в точке P^0 и экспоненциально затухает на бесконечности. Иными словами, $\partial_1 V_+$ – собственная функция задачи (2.3)–(2.5) с параметром $\mu = \pi^2$. Прежние аргументы показывают, что коэффициент интенсивности у собственной функции нулевой, причем по индукции можно убедиться в том, что ее производные любых порядков обладают таким же свойством. Поскольку корневое подпространство оператора задачи (2.3)–(2.5) в точке $\mu = \pi^2$ конечномерно, видим, что

$$P(\partial_1)\partial_1 V_+(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad (3.11)$$

для некоторого нетривиального дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Формула (3.11) невозможна, так как гладкая внутри полосы Π функция $\partial_1 V_+$ затухает при $\xi_1 \to \pm\infty$. Полученное противоречие заканчивает проверку леммы 2.2.

Приведенные в последнем абзаце рассуждения приводят к еще одному утверждению.

Следствие 3.1. *У задачи* (2.3)–(2.5) *нет нетривиальных решений* $v \in H^1(\Pi)$, *т.е. собственных функций или, что то же, захваченных волн.*

3.4. Неполные сведения о кратности пороговых резонансов, уточняемые впоследствии. Зафиксируем размер ℓ_T, при котором у задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ реализуется пороговый резонанс, порожденный ее решением

$$u^\ell_T(x) = c^\ell_T \chi(x_1 - \ell)\sin(\pi x_2) + \chi_0(r_+) K^\ell_T r_+^{1/2} \sin\frac{\varphi_+}{2} + \widehat{u}^\ell_T(x). \quad (3.12)$$

---

[4]Разные знаки в формулах (3.8) и (3.10) объясняются тем, что функция V приобретает линейный рост при $\xi_1 \to -\infty$, а функция V_+ – при $\xi_1 \to +\infty$

Здесь c_T^ℓ и K_T^ℓ – некоторые коэффициенты, а для остатка выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_T^\ell(x) = O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}) \text{ при } x_1 \to +\infty, \\ &\widehat{u}_T^\ell(x) = O(r_+^{3/2}) \text{ при } r_+ \to +0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

которые можно почленно дифференцировать при соглашении

$$\nabla O(e^{-\beta x_1}) = O(e^{-\beta x_1}) \quad \text{и} \quad \nabla O(r_+^\gamma) = O(r_+^{\gamma-1}). \tag{3.14}$$

Подчеркнем, что $u_T^\ell \in C^2([0, \min\{1, \ell/2\}] \times [0,1])$, т.е. решение и его первые и вторые производные непрерывны в угловых точках $(0,0)$ и $(0,1)$ (на самом деле дифференциальные свойства собственных функций в вершинах прямых углов еще лучше – см., например, книгу [30, гл. 2, §4]).

Следующее утверждение, относящееся к случаю искусственных условий Дирихле $T = D$, проверяется при помощи приема [46].

Лемма 3.2. *У нетривиального ограниченного решения* $(3.12)_D$ *задачи* (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ *коэффициент интенсивности не равен нулю*:

$$K_D \neq 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. В формулу Грина на области $\Pi_+(R) \setminus \overline{\mathbb{B}^+_{1/R}(P^\ell_+)}$ подставим функцию u_D^ℓ – захваченную ($c_D^\ell = 0$) или почти стоячую ($c_D^\ell \neq 0$) волну – и ее производную

$$\partial_1 u_D^\ell(x) = -\chi_0(r_+)\frac{1}{2}K_T^\ell r_+^{-1/2} \sin\frac{\varphi_+}{2} + \widehat{\partial_1 u}_D^\ell(x). \tag{3.16}$$

Остаток $\widehat{\partial_1 u}_D^\ell$ подчинен требованиям

$$\begin{aligned} &\widehat{\partial_1 u}_D^\ell(x) = O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}) \text{ при } x_1 \to +\infty, \\ &\widehat{\partial_1 u}_D^\ell(x) = O(r_+^{1/2}) \text{ при } r_+ \to +0. \end{aligned}$$

Обе функции удовлетворяют уравнению Гельмгольца в полуполосе Π_+ и краевым условиям на ее боковых сторонах (см. соотношения (1.1) и (1.2)). Таким образом, в формуле Грина сохраняются только одномерные интегралы:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_0^1 |\partial_1 u_D^\ell(0,x_2)|^2 dx_2 \\
&- \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^1 \Big(|\partial_1 u_D^\ell(R,x_2)|^2 - \overline{u_D^\ell(R,x_2)}\, \partial_1^2 u_D^\ell(R,x_2) \Big)\, dx_2 \\
&+ \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^\pi \Big(\overline{\partial_{r_+} u_D^\ell(x)}\, \partial_1 u_D^\ell(x) - \overline{u_D^\ell(x)}\, \partial_{r_+} \partial_1 u_D^\ell(x) \Big)\, d\varphi_+ \\
&=: I_0 + I_\infty + I_{\mathbb{B}}.
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

В силу экспоненциального затухания производной (3.16) (при любом коэффиценте c_D^ℓ) имеем $I_\infty = 0$. Согласно теореме о единственности продолжения (см., например, книгу [47]) след $\partial_1 u_D^\ell(0,\cdot)$ не может обратиться в нуль всюду на торце Υ_0 и, следовательно, $I_0 > 0$. Для окончания проверки неравенства (3.15) осталось вычислить интеграл $I_{\mathbb{B}} = -\dfrac{\pi}{2}|K_D^\ell|^2$, повторив с незначительными изменениями выкладку (3.8). $\square$

Лемма 3.2 показывает, в частности, что пороговый резонанс в задаче (1.1), (1.2) на полуполосе Π_+ с искусственным условием Дирихле $(2.19)_D$ не может быть кратным (иначе найдется ограниченное решение с нулевым коэффициентом интенсивности).

Теперь рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с искусственным условием Неймана $(2.19)_N$ при прежнем значении $\lambda_N = \lambda_D$ спектрального параметра. Благодаря уравнению Гельмгольца производная (3.16) удовлетворяет краевому условию Неймана на торце Υ_0 полуполосы Π_+, т.е. $\partial_1 u_D^\ell$ – сингулярное решение задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_N$ с особенностью в точке P_+^ℓ. Пусть в этой задаче реализуется пороговый резонанс. Соответствующее ограниченное решение $(3.12)_N$ с коэффициентом интенсивности K_N^ℓ и производную $\partial_1 u_D^\ell$ подставим в формулу Грина на области $\Pi_+(R) \setminus \mathbb{B}_{1/R}(P_+^\ell) = \{x \in \Pi : x_1 \in (0,R),\, r_+ > 1/R\}$ и, повторив вычисления из доказательства леммы 3.2, выводим при учете соотношения (3.16), что

$$
\overline{K_D^\ell} K_N^\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad K_N^\ell = 0. \qquad (3.18)
$$

Итак, общий пороговый резонанс в обеих задачах (1.1), (1.2) с условиями $(2.19)_D$ и $(2.19)_N$ возникает только при ограничениях (3.15) и (3.18) (далее в п. 4, §4 будет показано, что такая ситуация вообще невозможна).

Убедимся в том, что резонанс в самой задаче (1.1), (1.2), $(2.19)_N$ не может быть кратным. Сначала заметим, что при условии (3.18) разложение (3.12) можно уточнить (см., например, [30, гл. 2]) следующим образом:

$$u_N^\ell(x) = c_N^\ell \chi(x_1-\ell)\sin(\pi x_2) + \chi_0(r_+) K_{N3}^\ell r_+^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi_+\Big) + \widehat{\mathbf{u}}_N^\ell(x), \quad (3.19)$$

причем $\widehat{\mathbf{u}}_N^\ell(x) = O(r_+^{5/2})$ при $r_+ \to +0$. Тогда производная $\partial_1 u_N^\ell$ – решение задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ из пространства Соболева $H^1(\Pi_+)$ с таким поведением[5] на бесконечности и около точки P_+^ℓ:

$$\begin{aligned} &\partial_1 u_N^\ell(x) = O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}) \text{ при } x_1 \to +\infty, \\ &\partial_1 u_N^\ell(x) = \frac{3}{2} K_{N3}^\ell r_+^{1/2} \sin\frac{\varphi_+}{2} + O(r_+^{5/2}) \text{ при } r_+ \to +0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В силу проверенной в лемме 3.2 единственности ограниченного решения $(3.12)_D$, выводим связь $u_D^\ell = c_{ND}\partial_1 u_N^\ell$, т.е. u_D^ℓ – захваченная волна в задаче (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ согласно первой формуле (3.20) и, следовательно, $\lambda_\dagger = \pi^2 \in \sigma_{pD}^\ell$.

Нужно еще обсудить две ситуации: $K_{N3}^\ell = 0$ в решении (3.20) и $K_N^\ell \neq 0$ в решении $(3.12)_N$. Первая невозможна по лемме 3.2, так как производная $\partial_1 u_N^\ell$, удовлетворяя задаче (1.1), (1.2), $(2.19)_D$, приобретает нулевой коэффициент интенсивности. Во второй эта же производная – сингулярное решение упомянутой задачи, и прежняя аргументация (формула Грина, предельный перехоод и т.д.) устанавливает, что $K_D^\ell = 0$ у любого ее ограниченного решения, т.е. резонанс (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ отсутствует.

Полученная информация о пороговых резонансах задач в полуполосе Π_+ и продолжение решений $(3.12)_D$ и $(3.12)_N$ по четности и нечетности через ось ординат приводят к следующему утверждению об исходной задаче на цельной полосе Π.

Теорема 3.1. *Пороговые резонансы в задаче* (1.1), (1.2) *с окном Неймана шириной 2ℓ появляются в следующих ситуациях*:

[5] Напоминаем про соглашение (3.14).

1° *величина* ℓ *является критической для обеих задач с искусственными краевыми условиями* $(2.19)_D$ *и* $(2.19)_N$, *причем соответствующие ограниченные решения* (3.12) *имеют коэффициенты интенсивности* $K_D^\ell \neq 0$ *и* $K_N^\ell = 0$, *а* $u_D^\ell \in \mathcal{H}^\ell$ – *захваченная волна, но* $K_{N3}^\ell \neq 0$ *в представлении* (3.19);

2° *величина* ℓ *критическая только для задачи* (1.1), (1.2), $(2.19)_D$, *а ее ограниченное решение* $(3.12)_D$ *может быть как захваченной, так и почти стоячей волной*;

3° *величина* ℓ *критическая только для задачи* (1.1), (1.2), $(2.19)_N$ *и ее ограниченное решение* $(3.12)_N$ *имеет коэффициент интенсивности* $K_N^\ell \neq 0$.

Кроме того,

4° *в обеих задачах с искусственными краевыми условиями Дирихле или Неймана на торце* Υ_0 *полуполосы* Π_+ *двойной пороговый резонанс не возникает.*

Доказательство. В проверке нуждается только утверждение 4°, впрочем в случае искусственного условия Дирихле оно вытекает непосредственно из леммы 3.2 (см. выше). Если у задачи в Π_+ с искусственным условием Неймана есть два линейно независимых ограниченных решения u_{N1}^ℓ и u_{N2}^ℓ, то коэффициент интерсивности у одного из них, например, K_{N1}^ℓ, можно обратить в нуль. Таким образом, $u_{D1}^\ell = \partial_1 u_{N1}^\ell \in H^1(\Pi_+)$ – захваченная волна в задаче (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ с нетривиальным по лемме 3.2 коэффициентом интенсивности K_{D1}^ℓ. В случае $K_{N2}^\ell \neq 0$ получаем сингулярное решение $u_{D1}^\ell = \partial_1 u_{N1}^\ell$ той же задачи с особенностью $-\dfrac{1}{2}K_{N2}^\ell r_+^{-1/2}\sin\dfrac{\varphi_+}{2}$, а значит, привычный трюк с формулой Грина приводит к невозможному равенству $K_{D1}^\ell K_{N2}^\ell = 0$. Следовательно, $K_{N2}^\ell = 0$ и существует пара захваченных волн u_{D1}^ℓ, u_{D2}^ℓ, которая наследует линейную независимость от пары u_{N1}^ℓ, u_{N2}^ℓ. Последнее противоречит лемме 3.2, т.е. теорема доказана в полном объеме. □

В п. 4, §4 будет показано, что ситуация 1° невозможна, т.е. в силу остальных утверждений теоремы все пороговые резонансы простые и в спектре задачи (1.1), (1.2) на цельной полосе П. Предварим этот окончательный результат вспомогательным вычислением.

Лемма 3.3. *Пусть* ℓ – *критический размер окна Неймана в задаче* (1.1), (1.2), $(2.19)_N$. *Ситуация* 1° *из теоремы 3.1 возможна лишь в* *том случае, когда равен нулю (неотрицательный) интеграл*

$$I = \int_0^1 \left(|\partial_2 u_N^\ell(0,x_2)|^2 - \pi^2 |u_N^\ell(0,x_2)|^2 \right) dx_2,$$

вычисленный для ограниченного решения $(2.25)_N$. *Если же* $I > 0$, *то реализуется ситуация* 3°.

Доказательство. Как и при проверке леммы 3.2, подставим в формулу Грина на множестве $\Pi_+(R) \setminus \mathbb{B}^+_{1/R}(P^\ell_+)$ решение $(2.25)_N$ и его производную $\partial_1 u_N^\ell \in C^1([0,\ell/2]\times[0,1])$, экспоненциально затухающую при $x_1 \to +\infty$. В результате предельного перехода $R \to +\infty$ аналогично выкладке (3.17) получим соотношение

$$\int_0^1 \left(|\partial_1 u_N^\ell(0,x_2)|^2 - u_N^\ell(0,x_2)\partial_1^2 u_N^\ell(0,x_2) \right) dx_2 = -\frac{\pi}{2}(K_N^\ell)^2. \qquad (3.21)$$

При помощи уравнения Гельмгольца, условия Неймана на торце Υ_0 и формулы интегрирования по частям придаем соотношению (3.21) вид

$$-\frac{\pi}{2}(K_N^\ell)^2 = \int_0^1 u_N^\ell(0,x_2) \left(\partial_2^2 u_N^\ell(0,x_2) + \pi^2 u_N^\ell(0,x_2) \right) dx_2 = -I,$$

и тем самым заканчиваем доказательство леммы. □

Возникновение ситуаций 2° и 3° сомнений не вызывает, так как максиминимальный принцип (1.7) из п. 2, §1 доказывает, что кратности $\#\sigma^\ell_{dT}$ дискретных спектров операторов A^ℓ_T задач (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ неограниченно возрастают при $\ell \to +\infty$, что сопровождается отцеплением собственных чисел от порога $\lambda_\dagger = \pi^2$. Отметим, что известен пример [48] акустического волновода довольно-таки причудливой формы с двойным пороговым резонансом на простом пороге, однако в случае условий Дирихле таких примеров до сих пор нет.

§4. Отцепление собственных чисел от порога

4.1. Правильный пороговый резонанс и ненулевой коэффициент интенсивности. Пусть при $\ell = \ell_D$ в задаче (1.1), (1.2), $(2.19)_D$

возникает правильный пороговый резонанс, т.е. у нее есть (вещественное) решение (2.25), которое обозначим u^0. В силу леммы 3.2 коэффициент интенсивности $K_D^0 := K_D^{\ell_D}$ в представлении (3.12) этого решения отличен от нуля. Далее рассматриваем и аналогичный правильный пороговый резонанс в задаче (1.1), (1.2) с искусственными краевыми условиями Неймана $(2.19)_N$ при $\ell = \ell_N$ в предположении $K_N^0 := K_N^{\ell_N} \neq 0$ (см. теорему 3.1, 3°).

Придадим малое возмущение $\varepsilon > 0$ размеру ℓ_T и будем искать собственное число возмущенной задачи в виде

$$\lambda_T^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2\theta^2 + \widetilde{\lambda}_T^\varepsilon, \tag{4.1}$$

где $\theta > 0$ – величина, подлежащая определению, а (малый) остаток $\widetilde{\lambda}_T^\varepsilon$ будет оценен в п. 4, §5. Там же будут пояснено, почему рассматриваемое возмущение краевых условий можно интерпретировать как регулярное, однако при формальном анализе с целью вывести явные формулы для поправочных членов удобно придать многомасштабное асимптотическое разложение соответствующей собственной функции u_T^ε из пространства

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_T^{\ell_T+\varepsilon} = \{\psi^\varepsilon \in H^1(\Pi_+) : \\ \psi^\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Pi_+ \setminus (\Gamma^{\ell_T+\varepsilon} \cup \Upsilon_0),\ \text{выполнены условия } (2.19)_N\}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Именно, в конечной части волновода, но на удалении от конца $P_+^{\ell_T+\varepsilon}$ окна Неймана примем простейший асимптотический анзац

$$u_T^\varepsilon(x) = u_T^0(x) + \varepsilon u_T'(x) + \dots . \tag{4.3}$$

В то же время на больших расстояниях от торца Υ_0 представим собственную функцию как медленно затухающую волну

$$\begin{aligned} u_T^\varepsilon(x) &= a_T^\varepsilon \sin(\pi x_2)\, e^{-x_1\sqrt{\pi^2-\lambda_T^\varepsilon}} + \dots \\ &= (a_T^0 + \varepsilon a_T' + \dots)\, \sin(\pi x_2)\,(1 - \varepsilon\theta x_1 + \dots) + \dots, \end{aligned} \tag{4.4}$$

удовлетворяющую задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца в полосе Π с параметром (4.1). При этом незамедлительное согласование разложений (4.1), (2.28) и (4.6) на уровне $1 = \varepsilon^0$ показывает, что

$$a_T^0 = 1. \tag{4.5}$$

Подчеркнем, что в этом параграфе все объекты асимптотического анализа вещественные.

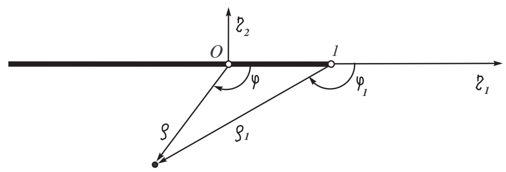

Рис. 3. Нижняя полуплоскость с полубесконечным "окном" Неймана (полужирная линия) и полярные координаты с центрами $(0,0)$ и $(1,0)$.

Наконец, следуя [17], [30, гл. 7, §3] и др., в непосредственной близости от точки $P_+^{\ell_T+\varepsilon}$ построим пограничный слой в растянутых координатах

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = \left(\varepsilon^{-1}(x_1 - \ell_T), \varepsilon^{-1}(x_2 - 1)\right). \tag{4.6}$$

Замена координат $x \mapsto \eta$ и формальный переход к $\varepsilon = 0$ приводит к задаче в нижней полуплоскости (рис. 3)

$$-\Delta z(\eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2_- = \mathbb{R} \times (-\infty, 0), \tag{4.7}$$

$$z(\eta_1, 0) = 0, \ \eta_1 > 1, \quad \partial_2 z(\eta_1, 0) = 0, \ \eta_1 < 1. \tag{4.8}$$

Краевые условия (4.8) унаследованы от условий (1.2), но уравнение Лапласа (4.7) возникло потому, что $\Delta_x + \lambda_T^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\Delta_\eta + O(1)$ в силу предположения (4.1), т.е. предельный переход $\varepsilon \to +0$ превращает оператор Гельмгольца в оператор Лапласа. Члены пограничного слоя суть степенные решения (3.5) в системе полярных координат $(\rho_1, \varphi_1) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$ с центром $P^1 = (1, 0)$ – в эту точку переходит конец $P_+^{\ell_T+\varepsilon}$ удлиненного окна Неймана при замене $x \mapsto \eta$. При учете поведения (3.12) главного члена u_T^0 внешнего разложения (4.3) положим

$$u_T^\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/2} K_T^0 \rho_1^{1/2} \sin\frac{\varphi_1}{2} + \dots. \tag{4.9}$$

Выражение из правой части (4.9) переразложим в полярных координатах $\rho = \sqrt{(\eta_1 - 1)^2 + \eta_2^2} = \varepsilon^{-1} r_+$ и $\varphi = \varphi_+$. Поскольку $\rho_1 = \rho + 1$ при $\varphi = \varphi_1 = \pi$ (см. рис. 3 и ср. рекомендации в замечании 3.1), получаем

$$K_T^0 \rho_1^{1/2} \sin\frac{\varphi_1}{2} = K_T^0 \left(\rho^{1/2} + \frac{1}{2}\rho^{-1/2}\right) \sin\frac{\varphi}{2} + O(\rho^{-3/2}) \text{ при } \rho \to +\infty. \tag{4.10}$$

Теперь нужно согласовать разложение (4.3) на уровне ε с разложениями (4.4), (4.5) на бесконечности и (4.9), (4.10) около точки $P_+^{\ell_T+\varepsilon}$. В результате задача

$$-\Delta u_T'(x) = \pi^2 u_T'(x), \quad x \in \Pi_+, \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered}\partial_1 u_T'(x_1, 1) = 0,\ x_1 \in (0, \ell_T), \quad u_T'(x_1, 1) = 0,\ x_1 \in (\ell_T, +\infty), \\ u_T'(x_1, 0) = 0,\ x_1 \in (0, +\infty),\end{gathered} \tag{4.12}$$

с одним из искусственных краевых условий (4.10) снабжается предоставленными процедурой сращивания асимптотическими условиями в рамках соглашения (3.14)

$$u_T'(x) = \frac{1}{2}\, K_T^0 r_+^{-1/2} \sin\Big(\frac{\varphi_+}{2}\Big) + O(r_+^{1/2}), \quad r_+ \to +0, \tag{4.13}$$

$$u_T'(x) = (a_T' - \theta x_1) \sin(\pi x_2) + O\Big(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}\Big), \quad x_1 \to +\infty. \tag{4.14}$$

Существование такого решения обеспечено общими результатами теории Кондратьева [49], конкретизованными для рассматриваемой задачи, например, в книге [30, гл. 2 и 7], а именно, решение с нужным поведением (4.14) наличествует всегда, однако коэффициент a_T' остается произвольным (его можно обратить в нуль путем вычитания функции $c_T' u_T^0$ с подходящим коэффициентом c_T'), а связь коэффициентов K_T^0 и θ, как обычно в подобных ситуациях, определяется подстановкой в формулу Грина на области $\Pi_+(R) \setminus \mathbb{B}_{1/R}(P_+^{\ell_T})$ (длинный прямоугольник с мелкой круглой каверной) функций u' и u^0:

$$\begin{aligned}0 = &\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^1 \big(u_T^0(R,x_2)\,\partial_1 u_T'(R,x_2) - u_T'(R,x_2)\,\partial_1 u_T^0(R,x_2)\big)\, dx_2 \\ &- \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_0^\pi \big(u_T^0(x)\,\partial_{r_+} u_T'(x) - u_T'(x)\,\partial_{r_+} u_T^0(x)\big)\big|_{r_+=1/R}\, d\varphi_+.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Вычисление интегралов и предельный переход дают выражение $-\dfrac{1}{2}\theta + \dfrac{\pi}{2}\,(K_T^0)^2$ для правой части (4.15). Следовательно,

$$\theta = \pi (K_T^0)^2 > 0. \tag{4.16}$$

Итак, найден поправочный член $-\varepsilon^2\theta^2$ в асимптотике (4.1) собственного числа λ^ε вспомогательных задач (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ при $T = D$

или $T = N$, а также и исходной задачи (1.1), (1.2). Следующее утверждение будет доказано в п. 4, §5.

Теорема 4.1. *Пусть при $\ell = \ell_T$ в задаче* (1.1), (1.2), (2.19)$_T$ *реализуется правильный пороговый резонанс, причем дополнительно $K_N^{\ell_N} \neq 0$ в случае искусственных краевых условий Неймана. Тогда найдутся такие положительные величины ε_T, c_T и Λ_T, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T]$ возмущенная задача* (1.1), (1.2), (2.19)$_T$ *с параметром $\ell = \ell_T + \varepsilon$ имеет собственное число, удовлетворяющее оценке*

$$|\lambda_T^\varepsilon - \pi^2 + \varepsilon^2\theta^2| \leqslant c_T \varepsilon^{5/2}, \tag{4.17}$$

где множитель $\theta > 0$ находится по формуле (4.16). *Такое "околопороговое" собственное число единственно, т.е. нет других точек дискретного спектра $\sigma_{dT}^{\ell_T+\varepsilon}$ на интервале $(\pi^2 - \Lambda_T, \pi^2)$.*

Теорема 4.1 дает асимптотику околопорогового собственного числа задачи (1.1), (1.2), но формула (4.17), разумеется, не способна описать весь дискретный спектр $\sigma_d^{\ell_T+\varepsilon}$. Собственные числа из непустого дискретного спектра $\sigma_d^{\ell_T} \subset (0, \pi^2)$ оператора A^{ℓ_T} претерпевают возмущения $O(\varepsilon)$, которые находятся при помощи классических результатов спектрального анализа самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [2, 50], а также п. 4, §5).

4.2. Правильный пороговый резонанс и нулевой коэффициент интенсивности. Согласно лемме 3.2 указанная ситуация возможна только в случае искусственных условий Неймана, т.е. $T = N$ всюду в данном пункте. Асимптотическая процедура из п. 1, §4 в целом сохраняется, но загромождается, так как для построения поправки[6] в асимптотике собственного числа

$$\lambda_N^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^6\theta^2 + \widetilde{\lambda}_N^\varepsilon \tag{4.18}$$

требуется построить большее число членов внешнего и внутреннего разложений. Изменения в процедуре объясняются следующим наблюдением о пограничном слое в окрестности точки $P_+^{\ell_N+\varepsilon}$, основанном

[6]Показатели 2 и 6 степеней параметра ε в соотношениях (4.1) и (4.18) вычисляются по формуле $2 \times 2(k + 1/2)$, где $k = 0$ и $k = 1$ – индексы степенных решений (3.5) со знаком плюс, фигурирующих в представлениях (3.12) и (3.19) почти стоячих волн u_T^ℓ и u_N^ℓ.

на формулах (3.6) из замечания 3.1 и связи систем полярных координат (ρ_1, φ_1) и (ρ, φ) (рис. 3), которая уже использовалась при выводе соотношения (4.10):

$$\begin{aligned}&\rho_1^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi_1\Big) + \frac{3}{2}\rho_1^{1/2} \sin\frac{\varphi_1}{2} = \rho^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big) \\ &+ \frac{3}{8}\rho^{-1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{8}\rho^{-3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big) + O(\rho^{-5/2}), \quad \rho \to +\infty,\end{aligned} \tag{4.19}$$

и

$$\begin{aligned}&\rho_1^{5/2} \sin\Big(\frac{5}{2}\varphi_1\Big) = \rho^{5/2} \sin\Big(\frac{5}{2}\varphi\Big) - \frac{5}{2}\rho^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big) \\ &+ \frac{15}{8}\rho^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{5}{16}\rho^{-1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + O(\rho^{-3/2}), \quad \rho \to +\infty.\end{aligned} \tag{4.20}$$

В левых частях формул (4.19) и (4.20) присутствуют те степенные решения (3.5), которые допустимы в качестве членов разложения около точки $P_+^{\ell+\varepsilon}$ собственной функции $u_N^\varepsilon \in H^1_{loc}(\overline{\Pi_+})$ задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_N$. Первые слагаемые из правых частей этих формул, умноженные соответственно на "младшие" коэффициенты интенсивности K^0_{N3}, K^0_{N5} и порожденные растяжением координат множители $\varepsilon^{3/2}$, $\varepsilon^{5/2}$, фигурируют в следующей асимптотике при $r_+ \to +0$ решения $(2.25)_N$ предельной ($\varepsilon = 0$) задачи:

$$\begin{aligned}&u_N^0(x) = K^0_{N3} r_+^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big) + K^0_{N5} r_+^{5/2} \sin\Big(\frac{5}{2}\varphi\Big) + O(r_+^{7/2}) \\ &= \varepsilon^{3/2} K^0_{N3} \rho^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big) + \varepsilon^{5/2} K^0_{N5} \rho^{5/2} \sin\Big(\frac{5}{2}\varphi\Big) + O(\varepsilon^{7/2}\rho^{7/2}).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Оставшиеся в (4.19) сингулярные (с отрицательными показателями степеней радиальной переменной ρ) слагаемые будут назначены в качестве данных аналогичных (4.13) асимптотических условий для младших членов анзаца

$$u_T^\varepsilon(x) = u_T^0(x) + \varepsilon^2 u_T'(x) + \varepsilon^3 u_T''(x) + \dots. \tag{4.22}$$

Наконец, в правой части формулы (4.19) нет гармоники $\rho^{1/2}\sin(\varphi/2)$, которую нельзя принять как упомянутое данное, – ее отсутствие обеспечено подбором коэффициента при $\rho_1^{1/2}\sin(\varphi_1/2)$ в левой части. Аналогичные действия нужно было бы произвести и с формулой (4.20), уничтожив в ее правой части слагаемые $O(\rho^{3/2})$ и $O(\rho^{1/2})$, однако подобные преобразования не понадобятся при построении начальных членов асимптотики – см. замечание 4.1.

Опишем разложения собственной функции других типов и произведем сращивание. Асимптотический анзац (4.18) для собственного числа λ_N^ε приводит к такой формуле для собственной функции на удалении от окна Неймана:

$$\begin{aligned} u_T^\varepsilon(x) &= a_N^\varepsilon \sin(\pi x_2)\, e^{-x_1\sqrt{\pi^2-\lambda_N^\varepsilon}} + \dots \\ &= (1+\varepsilon^2 a_N' + \varepsilon^3 a_N'' + \dots)\sin(\pi x_2)\,(1-\varepsilon^3\theta x_1 + \dots) + \dots . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Равенство $a_N^0 = 1$ – результат первичного сращивания с решением (2.25) (ср. формулу (4.5)).

Наконец, внутреннее разложение около точки $P_+^{\ell+\varepsilon}$ составим из следующих решений задачи (4.7), (4.8):

$$\begin{aligned} u_N^\varepsilon(x) = \varepsilon^{3/2} K_{N3}^0 \Big(\rho_1^{3/2} \sin\Big(\frac{3}{2}\varphi_1\Big) + \frac{3}{2}\rho_1^{1/2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\Big) \\ + \varepsilon^{5/2} K_{N3}' \rho_1^{1/2}\sin\frac{\varphi_1}{2} + \dots . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Коэффициент K_{N3}' подлежит определению, но оказывается несущественным, коэффициент K_{N3}^0 взят из разложения (4.21), а по поводу отсутствия слагаемого $K_{N5}^0 r_+^{5/2}\sin\Big(\dfrac{5}{2}\varphi\Big)$ сошлемся на замечание 4.1.

Все подготовлено для применения процедуры сращивания. Согласование на уровне ε^2 разложений (4.22) и (4.19), (4.24) дает для члена u_N' задачу $(4.11)_N$, $(4.12)_N$, $(2.19)_N$ с асимптотическими условиями, понимаемыми в смысле (3.14),

$$\begin{aligned} u_N'(x) &= -\frac{3}{8}\, K_{N3}^0 r_+^{-1/2} \sin\Big(\frac{\varphi}{2}\Big) + O(r_+^{1/2}), \quad r_+ \to +0, \\ u_N'(x) &= a_N' \sin(\pi x_2) + O\Big(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}\Big), \quad x_1 \to +\infty. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Поскольку по предположению решение $(2.25)_N$ предельной ($\varepsilon = 0$) задачи приобретает порядок $r_+^{3/2}$ в точке P_+^ℓ, условие разрешимости указанной задачи выполнено благодаря тому, что у функции u_N' нет линейного роста на бесконечности, а предел при $R \to +\infty$ интеграла по $(0,\pi) \ni \varphi$ обращается в нуль, так как синусы $\sin\Big(\dfrac{1}{2}\varphi\Big)$ и $\sin\Big(\dfrac{3}{2}\varphi\Big)$ ортогональны в пространстве $L^2(0,\pi)$ (ср. соотношение (4.15)). Таким образом, можно выбрать решение сформулированной задачи, затухающее при $x_1 \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью (взяли $a_N' = 0$ в формулах (4.23) и (4.25)) и допускающее представление

$$u_N'(x) = -\frac{3}{8}\,K_{N3}^0 r_+^{-1/2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathbf{K}_N' r_+^{1/2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + O(r_+^{1/2}), \quad r_+\to+0 \tag{4.26}$$

(уточнили первую строку (4.25)).

Произведем сращивание на уровне ε^3. Поскольку возмущение спектрального параметра (4.18) – бесконечно малая $O(\varepsilon^6)$ более высокого порядка, для члена u_N'' анзаца (4.22) выводим прежнюю дифференциальную задачу (4.11), (4.12), $(2.19)_N$, однако в силу представлений (4.21), (4.26), (4.23) и связей (4.19), (4.10) асимптотические условия вида (4.25) становятся такими:

$$\begin{aligned} u_N''(x) &= \frac{1}{8}\,K_{N3}^0 r_+^{-3/2}\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \frac{1}{2}\mathbf{K}_N'' r_+^{-1/2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &\quad + O(r_+^{1/2}), \quad r_+\to+0, \\ u_N''(x) &= (a_N'' - \theta x_1)\sin(\pi x_2) + O\left(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}\right), \quad x_1\to+\infty. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Коэффициент $\mathbf{K}_N''$ истолкован в замечании 4.1, но он не проявляется в дальнейших вычислениях. Теперь условие разрешимости полученной задачи для u_N'' позволяет найти поправочный член $-\varepsilon^6\theta^2$ в представлении (4.18) собственного числа, а именно, аналогично формуле (4.15) выводим соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R\to+\infty}\int_0^1 \big(u_T^0(R,x_2)\,\partial_1 u_N''(R,x_2) - u_N''(R,x_2)\,\partial_1 u_N^0(R,x_2)\big)\,dx_2 \\ &\quad - \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^1 \big(u_N^0(x)\,\partial_{r_+}u_N''(x) - u_N''(x)\,\partial_{r_+}u_N^0(x)\big)\big|_{r_+=1/R}\,d\varphi_+ \\ &= -\theta\int_0^1 \sin^2(\pi x_2)\,dx_2 \\ &\quad - \frac{1}{8}(K_{N3}^0)^2\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi \bigg(r_+^{3/2}\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\partial_{r_+}r_+^{-3/2}\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ &\quad - r_+^{-3/2}\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\partial_{r_+}r_+^{3/2}\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\bigg)\bigg|_{r_+=1/R}\,d\varphi_+ \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\theta + \frac{3\pi}{16}(K^0_{N3})^2 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3}{8}\pi(K^0_{N3})^2 > 0. \tag{4.28}$$

Итак, поправка $-\varepsilon^6\theta^2$ в асимптотике (4.18) собственного числа λ^ε_N найдена, а оценка остатка $\widetilde{\lambda}^\varepsilon_N$ будет пояснена в п. 4, §5.

Теорема 4.2. *Пусть при $\ell = \ell_N$ в задаче* (1.1), (1.2), $(2.19)_N$ *реализуется правильный пороговый резонанс, причем $K^{\ell_N}_N = 0$. Тогда найдутся такие положительные величины ε_N, c_N и Λ_N, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_N]$ возмущенная задача* (1.1), (1.2), $(2.19)_N$ *с параметром $\ell = \ell_N + \varepsilon$ имеет собственное число, удовлетворяющее оценке*

$$|\lambda^\varepsilon_N - \pi^2 + \varepsilon^6\theta^2| \leqslant c_N\varepsilon^7,$$

где множитель $\theta > 0$ находится по формуле (4.28). *Такое "околопороговое" собственное число единственно, т.е. нет других точек дискретного спектра $\sigma^{\ell_N+\varepsilon}_{dN}$ на интервале $(\pi^2 - \Lambda_N, \pi^2)$.*

Замечание 4.1. Слагаемое $O(r_+^{5/2})$ из представления (4.21) почти стоячей волны не было учтено в процедуре сращивания потому, что благодаря связи $r_+ = \varepsilon\rho$, множителю ε^2 при u'_N и очевидным соотношениям

$$\varepsilon^3 = \varepsilon^{5/2} \times \varepsilon^{1/2} \quad \text{и} \quad \varepsilon^3 = \varepsilon^2 \times \varepsilon^{1/2} \times \varepsilon^{1/2},$$

используемым в процедуре сращивания, коэффициент $\mathbf{K}''_N$ при сингулярности $O(r_+^{-1/2})$ в соотношении (4.27) – линейная комбинация коэффициентов K^0_{N5} и K'_{N3} из разложений (4.21) и (4.26) соответственно. Величина $\mathbf{K}'_N$ не сказывается на окончательном выводе (4.28), а выражение $O(\varepsilon^{5/2})$, указанное во внутреннем разложении (4.24) для пояснений к сращиванию, все еще нуждается в уточнении.

4.3. Порог – собственное число. Пусть при некотором $\ell = \ell_T$ простой пороговый резонанс возник как результат включения $\lambda_\dagger \in \sigma^{\ell_T}_{pT}$, а соответствующая собственная функция $u^0_T = u^{\ell_T}_T \in H^1(\Pi_+)$ задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ нормирована в пространстве $L^2(\Pi_+)$. Считаем, что коэффициент интенсивности $K^0_T := K^{\ell_T}_T$ отличен от нуля (см. лемму 3.2 и теорему 3.1, 2°, для случая $T = D$ и теорему 3.1, 3°, для случая $T = N$). При этом приходится изменить асимптотические анзацы из п. 1, §4, а именно, теперь собственное число $\lambda^\varepsilon_T \in \sigma^{\ell_T}_{dT}$ ищем в виде

$$\lambda^\varepsilon_T = \lambda_\dagger - \varepsilon\theta^2 + \widetilde{\lambda}^\varepsilon_T, \quad \theta > 0. \tag{4.29}$$

Кроме того, анзацы (4.9) и (4.1) для собственной функции u_T^ε сохраняются, однако во внутреннем разложении фигурируют функции u_T^0 и u_T', экспоненциально затухающая на бесконечности и ограниченная соответственно (ср. далее представление (4.13)), и потому разложение (4.4) на первом этапе не требуется. Увеличение до ε порядка возмущения собственного числа (4.29) (в сравнении с прежним порядком ε^2 в формуле (4.1)) приводит к такой модификации уравнения (4.4):

$$-\Delta u_T'(x) - \pi^2 u_T'(x) = -\theta^2 u_T^0(x), \quad x \in \Pi_+. \tag{4.30}$$

Краевые условия (4.12) и асимптотическое условие (4.13) около точки $P_+^{\ell_T}$ остаются без изменений и их достаточно для того, чтобы найти ограниченное решение полученной задачи. Как обычно, условие его существования (см. лемму 4.1) дает выражение для поправочного члена $-\varepsilon\theta^2$:

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= \theta^2 \|u_T^0; L^2(\Pi_+)\|^2 = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Pi_+} u_T^0(x)\big(\Delta u_T'(x) + \pi^2 u_T'(x)\big)\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^1 \big(u_T^0(R,x_2)\,\partial_1 u_T'(R,x_2) - u_T'(R,x_2)\,\partial_1 u_T^0(R,x_2)\big)\,dx_2 \\
&- \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^1 \big(u_T^0(x)\,\partial_{r_+} u_T'(x) - u_T'(x)\,\partial_{r_+} u_T^0(x)\big)\big|_{r_+=1/R}\,d\varphi_+ \\
&= \frac{\pi}{2}\,(K_T^0)^2.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Лемма 4.1. *Если простой пороговый резонанс $\lambda_\dagger \in \sigma_{pT}^{\ell_T}$ порожден собственной функцией $u_T^0 \in H^1(\Pi_+)$, то задача* (4.30), (4.12), (4.13) *имеет решение*

$$u_T'(x) = \chi(x_1 - \ell)\,k_T'\,\sin(\pi x_2) + \chi_0(r_+)\frac{1}{2}\,K_T^0 r_+^{-1/2} \sin\frac{\varphi_+}{2} + \widehat{\mathbf{u}}_T'(x). \tag{4.32}$$

где $k_T' \in \mathbb{R}$ – некоторое число, а для остатка $\widehat{\mathbf{u}}_T'$ выполнены соотношения (3.13). *Решение* (4.32) *определено с точностью до захваченной волны $c_T' u_T^0$ с произвольным множителем c_T'.*

Доказательство. В рамках соглашения (3.14) назначим в волноводе Π_+ энергетическое условие излучения

$$\mathbf{u}'_T(x) = \mathbf{k}'_T w_+(x-\ell) + O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}), \quad x_1 \to +\infty, \tag{4.33}$$

в котором w_+ – уходящая линейная волна (2.20), а $\mathbf{k}'_T$ – коэффициент рассеяния, определяемый однозначно при решении всей задачи (4.30), (4.12), (4.13), (4.33). Вместе с тем решение $\mathbf{u}'_T$ определено с точностью до слагаемого $\mathbf{c}'_T u^0_T$, однако общие результаты [30, гл. 5] (см. также статьи [35,36] о квантовых волноводах) показывают что такое решение существует при выполнении одного условия разрешимости, которое, как обычно, принимает вид (4.31). Теперь положим

$$u'_T = \mathbf{u}'_T + C_T \zeta^\ell_T \tag{4.34}$$

и при учете формул (2.20) и (2.23) получим следующее представление при $x_1 \to +\infty$:

$$\begin{aligned} u'_T(x) = \big(&\mathbf{k}'_T(x_1 - \ell - i) \\ &+ C_T\big((x_1-\ell+i) + s^\ell_T(x_1-\ell-i)\big)\sin(\pi x_2) + O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1}). \end{aligned} \tag{4.35}$$

По определению дифракционного решения $\zeta^\ell_T \in H^1_{loc}\big(\overline{\Pi_+}\big)$ сумма (4.34) по-прежнему удовлетворяет рассматриваемой задаче, и, поскольку $s^\ell_T \neq -1$ в силу предложения 2.1 и предположения о правильном пороговом резонансе, уничтожим линейный рост правой части (4.35), зафиксировав коэффициент

$$C_T = -\frac{\mathbf{k}'_T}{1+s^\ell_T}.$$

Ограниченное решение (4.34) построено и лемма доказана. □

Стабилизация решения (4.32) при $x_1 \to +\infty$ не препятствует вычислению (4.31) коэффициента

$$\theta^2 = \frac{\pi}{2}\,(K^0_T)^2 \tag{4.36}$$

в поправочном члене анзаца (4.29) для собственного числа задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$, однако при обосновании асимптотики в п. 4, §5 требуется затухающая приближенная собственная функция. Она возникает в результате традиционного сращивания с аналогичной (4.4) волной

$$\varepsilon k'_T e^{-\sqrt{\pi^2-\lambda^\varepsilon_T}x_1}\sin(\pi x_2) = \varepsilon k'_T\left(1 + O\left(\sqrt{\varepsilon}x_1\right)\right).$$

Следующее утверждение обсуждается в п. 4, §5.

Теорема 4.3. *Пусть $T = D, N$ и при $\ell = \ell_T$ в задаче* (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ *реализуется пороговый резонанс, обусловленный наличием собственной функции $u_T^{\ell_T}$, которую нормируем в $L^2(\Pi_+)$. При $T = N$ дополнительно считаем, что $K_N^0 \neq 0$. Тогда найдутся такие положительные величины ε_T, c_T и Λ_T, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T]$ возмущенная задача* (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ *с параметром $\ell = \ell_T + \varepsilon$ имеет собственное число, удовлетворяющее оценке*

$$|\lambda_T^\varepsilon - \pi^2 + \varepsilon\theta^2| \leqslant c_T \varepsilon^{3/2}, \qquad (4.37)$$

где множитель $\theta > 0$ находится по формуле (4.36), *K_T^0 – коэффициент интенсивности собственной функции u_T^0. Такое "околопороговое" собственное число единственно, т.е. нет других точек дискретного спектра $\sigma_{Td}^{\ell_T+\varepsilon}$ на интервале $(\pi^2 - \Lambda_T, \pi^2)$.*

Замечание 4.2. 1) Теорема 4.3 не обслуживает гипотетическую ситуацию, в которой равен нулю коэффициент интенсивности $K_N^{\ell_N}$ собственной функции задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ на пороге $\lambda_\dagger = \pi^2$. При помощи максиминимального принципа [2, теорема 10.2.2] нетрудно установить, что при малом $\varepsilon > 0$ кратность дискретного спектра $\sigma_{Nd}^{\ell_N+\varepsilon}$ возрастает за счет возникновения околопорогового собственного числа. На основе результатов п. 2, §4 нетрудно предсказать скорость $O(\varepsilon^6)$ его отцепления от порога – такой результат можно получить путем построения младших асимптотических членов (напоминаем, что $K_{N3}^{\ell_N} \neq 0$). Кроме того, в этом случае $u_D^{\ell_N} = \partial_1 u_N^{\ell_N}$ – собственная функция задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ при $\lambda = \pi^2$, и поскольку $K_D^{\ell_N} \neq 0$ в силу леммы 3.2, у возмущенной задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ с параметром $\ell_N + \varepsilon$ есть собственное число из формулы (4.37) при $T = D$. Таким образом, у задачи (1.1), (1.2) в цельной полосе Π возникают два околопороговых собственных числа с разными скоростями отцепления от порога.

2) Формулы (4.29) и (4.31) сохраняют силу и при отрицательном малом параметре ε (окно Неймана сужается). На первый взгляд кажется, что тем самым конкретизируется асимптотика собственного числа задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$, вкрапленного в ее непрерывный спектр $\sigma_{Tc}^{\ell_T-|\varepsilon|}$. Скоропалительный вывод может случиться ошибочным, поскольку собственные числа из непрерывного спектра обладают природной неустойчивостью. Таким образом, для выяснения того, появляется ли в точечном спектре $\sigma_{Tp}^{\ell_T-|\varepsilon|}$ собственное число или оно смещается в комплексную плоскость, превращаясь в точку комплексного

резонанса (ср. [51,52] и др.), опять требуется найти младшие асимптотические члены, которые тем не менее строить не будем, так как все неясности возникают только в гипотетической ситуации.

4.4. Отсутствие двойного порогового резонанса в исходной задаче. В условиях теоремы 4.2 у задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_D$ при $\ell = \ell_N$ также реализуется пороговый резонанс, порожденный захваченной волной $u_D^{\ell_N} = \partial_1 u_N^{\ell_N} \in H^1(\Pi_+)$ (см. теорему 3.1, 1° и 3°), т.е. порог в спектре исходной задачи (1.1), (1.2) оказывается двойным. Вместе с тем теоремы 4.2 и 4.3 предоставляют два собственных числа этой задачи в Π, которые заведомо приобретают разные скорости отцепления от порога. Иными словами, в предположении из теоремы 3.1, 1°, при малом $\varepsilon > 0$ существуют в точности два простых околопороговых собственных числа оператора $A^{\ell_N+\varepsilon}$ задачи (1.1), (1.2) в Π. Этот вывод противоречит лемме 1.1, а значит, все пороговые резонансы простые и в спектре исходной задачи в цельной полосе (ср. теорему 3.1, 4°).

§5. Обоснование асимптотик собственных чисел

5.1. Абстрактная постановка задачи. Ввиду геометрической симметрии задачи (1.1), (1.2) в полосе Π каждую ее собственную функцию можно представить как сумму двух функций, четной и нечетной относительно переменной x_1, причем для простого собственного числа одна из составляющих тривиальна. Таким образом, в п. 1, §2 можно было изначально иметь дело с задачами (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ при $T = D$ и $T = N$. Именно так и поступим в данном параграфе, однако индексы писать не будем.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\ell$, заданном формулой (4.2), введем скалярное произведение

$$\langle u^\ell, \psi^\ell \rangle = (\nabla u^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\Pi_+} \tag{5.1}$$

и переформулируем интегральное тождество, обслуживающее указанную задачу, как абстрактное уравнение

$$\mathcal{T}^\ell v^\ell = \tau^\ell v^\ell \text{ в } \mathcal{H}^\ell$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^\ell = \left(\lambda^\ell\right)^{-1} \tag{5.2}$$

и положительно определенным, симметричным и непрерывным, а значит, самосопряженным оператором $\mathcal{T}^\ell$, заданным при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^\ell v^\ell, \psi^\ell \rangle = (\nabla v^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\Pi_+}, \qquad u^\ell, \psi^\ell \in \mathcal{H}^\ell. \tag{5.3}$$

Согласно связи (5.2) спектральных параметров существенный спектр Σ_c^ℓ оператора $\mathcal{T}^\ell$ – замкнутый сегмент $[0, \tau_\dagger]$ с точкой отсечки $\tau_\dagger = \pi^{-2}$, а на полуинтервале $(\tau_\dagger, \mathcal{N}^\ell]$ располагается его дискретный спектр Σ_d^ℓ; здесь $\mathcal{N}^\ell$ – норма оператора $\mathcal{T}^\ell$.

Следующее утверждение, известное как лемма о "почти собственных" значениях [53], вытекает из спектрального разложения резольвенты [2, гл. 6].

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{V}^\ell \in \mathcal{H}^\ell$ и $t^\ell > \tau_\dagger$ таковы, что*

$$\|\mathcal{V}^\ell; \mathcal{H}^\ell\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\ell \mathcal{V}^\ell - t^\ell \mathcal{V}^\ell; \mathcal{H}^\ell\| =: \delta^\ell \in (0, t^\ell - \tau_\dagger). \tag{5.4}$$

Тогда на замкнутом сегменте $[t^\ell - \delta^\ell, t^\ell + \delta^\ell]$ присутствует собственное значение $\tau^\ell \in \Sigma_d^\ell$ оператора $\mathcal{T}^\ell$.

5.2. Собственные числа при больших размерах ℓ. Для собственной пары (2.14) задачи (2.13) считаем, что $T = D$ при четном и $T = N$ при нечетном индексе $m \in \mathbb{N}$. Следуя вычислениям из п. 1, §3, в качестве "почти собственного" значения оператора $\mathcal{T}^\ell$ возьмем

$$t_m^\ell = \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2 m^2}{\ell^2} \Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{\ell} \Big) \right)^{-1}, \tag{5.5}$$

а для построения "почти собственного" вектора

$$\mathcal{V}_m^\ell = \|\mathbf{U}_m^\ell; \mathcal{H}^\ell\|^{-1} \mathbf{U}_m^\ell \tag{5.6}$$

применим асимптотическую конструкцию (см. [54], а также [26, гл. 2], [55] и др.), использующую срезающие функции с "перехлестывающимися носителями". Именно, помимо (2.30) введем срезающую функцию

$$\begin{gathered} \mathcal{X}^\ell(x_1) = \chi(\ell - x_1), \\ \mathcal{X}^\ell(x_1) = 1 \text{ при } x_1 \in [0, \ell - 2], \quad \mathcal{X}^\ell(x_1) = 0 \text{ при } x_1 \geqslant \ell - 1, \end{gathered} \tag{5.7}$$

где χ – эталонная срезка (2.30), и положим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m^\ell(x) = {} & \mathcal{X}^\ell(x_1) \big(\mathcal{U}_m^0(\ell^{-1} x_1) + \ell^{-1} \mathcal{U}_m'(\ell^{-1} x_1) \big) \sin\Big(\frac{\pi}{2} x_2 \Big) \\ & + \chi(x_1) \ell^{-1} C_m^+ V(x_1 - \ell, x_2) \\ & - \mathcal{X}^\ell(x_1) \chi(x_1) \ell^{-1} C_m^+ ((x_1 - \ell) + M) \sin\Big(\frac{\pi}{2} x_2 \Big), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где числа C_m^+ и M взяты из формул (2.16) и (2.7), а функции $\mathcal{U}_m'$ и V – решения задач (2.13) и (2.3)–(2.6) соответственно. Члены (2.15) асимптотических разложений, подвергшиеся сращиванию в п. 1, §2, присутствуют и в первом и во втором слагаемом из правой части равенства (5.8), однако вычитаемое в ней компенсирует такое дублирование.

Функция $\mathbf{U}_m^\ell$ удовлетворяет всем краевым условиям в задаче (1.1), (1.2), (2.19) благодаря множителю $\sin(\pi x_2/2)$, соотношениям (2.3), (2.4) для V и простому факту: решение $\mathcal{U}_m'$ задачи (2.13) наследует свойство четности/нечетности от собственной функции $\mathcal{U}_m^0$. Кроме того, при $x_1 > \ell+2$ функция (5.8) совпадает с $C_m^\pm V(\xi^+) = O(e^{-\pi\sqrt{3}(x_1-\ell)/2})$, а значит, исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и в итоге попадает в пространство $\mathcal{H}^\ell$. Иными словами, условия леммы 5.1 выполнены. Вычислим величину δ^ℓ из формулы (2.19).

Прежде всего заметим, что в силу формул (5.8) и (2.6), (2.2) справедливо соотношение

$$\mathbf{U}_m^\ell(x) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\big(\mathcal{U}_m^0(\ell^{-1}x_1) + O(\ell^{-1})\big) + O\big(\ell^{-1}e^{\pi\sqrt{2}(x_1-\ell)}\big)$$
$$\text{при } x_1 < \ell - 2,$$

а значит, в согласии с равенством (2.3) при большом ℓ имеем

$$\|\nabla\mathbf{U}_m^\ell; \mathcal{H}^\ell\|^2 \geqslant \mathbf{c}\ell, \quad \mathbf{c} > 0. \tag{5.9}$$

Наконец, определения (5.1)–(5.3) и (5.5), (5.6) обеспечивают равенство

$$\delta^\ell = \sup\big|\langle\mathcal{T}^\ell\mathcal{V}_m^\ell - t_m^\ell\mathcal{V}_m^\ell, v^\ell\rangle\big| = t_m^\ell\,\|\mathbf{U}_m^\ell; \mathcal{H}^\ell\|^{-1}\sup\bigg|(\nabla\mathbf{U}_m^\ell, \nabla v^\ell)_{\Pi_+}$$
$$- \bigg(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2 m^2}{\ell^2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{\ell}\Big)\bigg)(\mathbf{U}_m^\ell, v^\ell)_{\Pi_+}\bigg|. \tag{5.10}$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в $\mathcal{H}^\ell$, т.е. $\|v^\ell; \mathcal{H}^\ell\| \leqslant 1$, и поэтому проинтегрированные по x_1 одномерные неравенства (2.9) и (2.10) показывают, что

$$\|v^\ell; \mathcal{H}^\ell\|^2 = \|\nabla v^\ell; L^2(\Pi_+)\|^2 \geqslant \frac{\pi^2}{4}\|v^\ell; L^2(\Pi_+)\|^2. \tag{5.11}$$

Преобразуем выражение между последними знаками модуля в соотношении (5.10), которому при помощи формулы интегрирования по частям придадим вид $(I_m^\ell, v^\ell)_{\Pi_+}$, где

$$\begin{aligned}
I^\ell_m &:= -\Delta \mathbf{U}^\ell_m - \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2 m^2}{\ell^2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{\ell}\Big)\right)\mathbf{U}^\ell_m \\
&= -\mathcal{X}^\ell \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Big(\Delta(\mathcal{U}^0_m + \ell^{-1}\mathcal{U}'_m) + \frac{\pi^2 m^2}{\ell^2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{\ell}\Big)(\mathcal{U}^0_m + \ell^{-1}\mathcal{U}'_m)\Big) \\
&- \frac{1}{\ell}C^+_m \chi\Big(\Delta + \frac{\pi^2}{4}\Big)V + \mathcal{X}^\ell \chi \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\ell^{-1}C^+_m \Delta(\xi_1 + M) \\
&- \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)[\Delta, \mathcal{X}^\ell]\Big(\mathcal{U}^0_m + \ell^{-1}\mathcal{U}'_m - C^+_m\Big(\frac{x_1}{\ell} - 1 + \frac{M}{\ell}\Big)\Big) \\
&- \frac{1}{\ell}C^+_m[\Delta, \chi]\Big(V - (\xi^+_1 + M)\sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Big) \\
&- \frac{\pi^2 m^2}{\ell^3}\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{\ell}\Big)C^+_m \chi\Big(V - \chi^\ell(\xi^+_1 + M)\sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Big) \\
&=: I^1 + I^2 + I^3 + I^4 + I^5 + I^6.
\end{aligned}$$

Поочередно оценим скалярные произведения $(I^j, v^\ell)_{\Pi_+}$. Сразу же заметим, что $I^2 = 0$ в силу уравнения (2.3) для функции V, в частности, можно не обращать внимания на особенности производных этой функции в точке P^0. Кроме того, по понятной причине $I^3 = 0$. Поскольку $\mathcal{U}'_m$ – решение задачи (2.13) с параметром из (2.17), а $\mathcal{U}^0_m$ – соответствующая собственная функция, находим, что

$$\begin{aligned}
&I^1(x) = -\mathcal{X}^\ell(x_1)\sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\frac{M\pi^2 m^2}{\ell^3}\mathcal{U}'_m\Big(\frac{x_1}{\ell}\Big) \\
&\Rightarrow \quad \big|(I^1, v^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant c_1 \ell^{-3}\|\mathcal{U}'_m; L^2(0,\ell)\|\,\|v^\ell; L^2(\Pi_+)\| \leqslant C_1 \ell^{-5/2}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

При учете формулы Тейлора (2.15) и равенства (2.16) видим, что коммутатор

$$[\Delta, \mathcal{X}^\ell] = 2\partial_1 \mathcal{X}^\ell \partial_1 + (\partial^2_1 \mathcal{X}^\ell), \tag{5.13}$$

носители коэффициентов в котором содержатся во множестве $[\ell - 2, \ell - 1] \times [0, 1]$, действует на функцию порядка ℓ^{-3}, т.е. верна оценка

$$\big|(I^4, v^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant \frac{c_4}{\ell^3}.$$

Принимая во внимание разложение (2.6) специального решения V задачи (2.3)–(2.5), находим, что последние сомножители в выражениях $I^5(x)$ и $I^6(x)$ затухают как $O(e^{\pi\sqrt{2}\xi^+_1})$ при $\xi^+_1 = x_1 - \ell \to -\infty$. Таким образом,

$$\bigl|(I^5, v^\ell)_{\Pi_+}\bigr| \leqslant \frac{c_5}{\ell} e^{-\pi\sqrt{2}\ell},$$

$$\bigl|(I^6, v^\ell)_{\Pi_+}\bigr| \leqslant \frac{c_6}{\ell^3} \|v^\ell; L(\Pi_+)\| \biggl(\int\limits_0^\ell e^{2\pi\sqrt{2}(x_1-\ell)}\,dx_1\biggr)^{1/2} \leqslant \frac{C_6}{\ell^3}.$$

В первом неравенстве учтено, что носители коммутатора $[\Delta,\chi]$ (ср. формулу (5.13)) расположены на квадрате $[1,2]\times[0,1]$, а во втором, впрочем как и во всех предыдущих, использовано неравенство (5.11).

Соберем приведенные неравенства и получим, что величина (5.11) не превосходит $C_m\ell^{-3}$: наихудшая мажоранта $O(\ell^{-5/2})$ возникла в оценке (5.12), однако дополнительный множитель $\ell^{-1/2}$ появился благодаря соотношению (5.9) и присутствию величины $\|\mathbf{U}_m^\ell;\mathcal{H}^\ell\|^{-1}$ в правой части (5.11). Следовательно, лемма 5.1 предоставляет собственное число τ_q^ℓ оператора $\mathcal{T}^\ell$, для которого в силу формул (5.2) и (5.5) справедливы формулы

$$\begin{aligned}
&|\tau_q^\ell - t_m^\ell| \leqslant C_m\ell^{-3}\\
&\Rightarrow \left|\lambda_q^\ell - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2 m^2}{\ell^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{\ell}\right)\right| \leqslant \frac{C_m}{\ell^3}\lambda_q^\ell\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2m^2}{\ell^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{\ell}\right)\right) \qquad (5.14)\\
&\Rightarrow \lambda_q^\ell \leqslant 2\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2m^2}{\ell^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{\ell}\right)\right) \text{ при } \frac{C_m}{\ell^3}\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2m^2}{\ell^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{\ell}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Окончательно выводим, что при ограничениях $\ell\geqslant 1$ и последним в списке (5.14) собственное число λ_q^ℓ задачи (1.1), (1.2), (2.19) удовлетворяет соотношению

$$\left|\lambda_q^\ell - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2m^2}{\ell^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{\ell}\right)\right| \leqslant \frac{C_m\pi^4}{2\ell^3}\bigl(1+m^2(1+4M)\bigr)^2. \qquad (5.15)$$

5.3. Доказательство теоремы 2.1. Формулы (5.14) и (5.15) позволяют найти величины $\ell_m^\#$ и $c_m^\#$ из теоремы 2.1, при которых выполнена искомая оценка (2.18) с одним, но существенным изъяном: вместо собственного числа λ_m^ℓ в ней фигурирует собственное число λ_q^ℓ из списка (1.6) с каким-то неизвестным номером q. Как обычно, для проверки равенства $q=m$ требуется теорема "о сходимости", устанавливающая, что в дискретном спектре σ_d^ℓ нет "чужих" собственных чисел. Подготовимся к проверке этого утверждения и возьмем собственную пару

$\{\lambda_p^\ell, u_p^\ell\}$, для которой

$$\lambda_p^\ell \leqslant \frac{\pi^2}{4} + \frac{C_p}{\ell^2}, \quad \|u_p^\ell; L^2(\Pi_+)\| = 1. \tag{5.16}$$

Первое соотношение означает, что найдется монотонная неограниченная последовательность $\{\ell^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$, вдоль которой верна сходимость

$$\ell^2\Big(\lambda_p^{\ell^{(j)}} - \frac{\pi^2}{4}\Big) \ \to \ \Lambda_p^\infty \text{ при } j \to +\infty. \tag{5.17}$$

Далее индекс j не пишем, а формулу $j \to +\infty$ заменяем формулой $\ell \to +\infty$.

Убедимся в том, что предел $\Lambda^{(p)}$ – собственное число обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\partial_y^2 \mathcal{U}(y) = \Lambda \mathcal{U}(y), \ y \in (0,1), \tag{5.18}$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{U}(1) = 0, \quad \mathcal{U}(0) = 0 \text{ или } -\partial_y \mathcal{U}(0) = 0. \tag{5.19}$$

Условие в точке $y = 0$ назначается в соответствии с искусственным краевым условием Дирихле или Неймана (2.19).

Введем функцию взвешенного среднего

$$(0,1) \ni y \ \mapsto \ \mathcal{U}_{(p)}^\ell(y) = \sqrt{2\ell}\int\limits_0^1 u_p^\ell(\ell y, x_2) \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\, dx_2, \tag{5.20}$$

Ясно, что для нее выполнены краевые условия (5.19) в точке $y = 0$ благодаря соотношениям (2.19) для u_p^ℓ. При этом остаток

$$u_{p\perp}^\ell(x) = u_p^\ell(x) - \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\mathcal{U}_{(p)}^\ell\Big(\frac{x_1}{\ell}\Big) =: u_p^\ell(x) - u_{p\flat}^\ell(x) \tag{5.21}$$

удовлетворяет тем же краевым условиям на основаниях и торце Υ_0 прямоугольника $\Pi_+(\ell) = \{x \in \Pi : x_1 \in (0,\ell)\}$, что и собственная функция u_p^ℓ, а также условиям ортогональности

$$\int\limits_0^1 u_{p\perp}^\ell(x_1, x_2) \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\, dx_2 = 0, \qquad x_1 \in (0,\ell). \tag{5.22}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \|u_p^\ell; L^2(\Pi(\ell))\|^2 = \|\mathcal{U}_{(p)}^\ell; L^2(0,1)\|^2 + \|u_{p\perp}^\ell; L^2(\Pi(\ell))\|^2, \\ \|\partial_1 u_p^\ell; L^2(\Pi(\ell))\|^2 = \ell^{-2}\|\partial_y \mathcal{U}_{(p)}^\ell; L^2(0,1)\|^2 + \|\partial_1 u_{p\perp}^\ell; L^2(\Pi(\ell))\|^2 \end{gathered} \tag{5.23}$$

и справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_0^1 \left|\partial_2 u_{p\perp}^\ell(x)\right|^2 dx_2 \geqslant \frac{9}{4}\pi^2 \int_0^1 \left|u_{p\perp}^\ell(x)\right|^2 dx_2 \text{ при } x_1 \in (0,\ell). \tag{5.24}$$

Укажем еще неравенства Фридрихса, принимающие во внимание только условия Дирихле,

$$\begin{gathered}\int_0^1 \left|\partial_2 u_p^\ell(x)\right|^2 dx_2 \geqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \left|u_p^\ell(x)\right|^2 dx_2 \quad \text{при } x_1 \in (0,\ell)\\ \int_0^1 \left|\partial_2 u_p^\ell(x)\right|^2 dx_2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 \left|u_p^\ell(x)\right|^2 dx_2 \quad \text{при } x_1 \in (\ell,+\infty).\end{gathered} \tag{5.25}$$

Найдем предел функции (5.20) при $\ell \to +\infty$, для чего укажем несколько оценок для исходной собственной функции.

Сначала заметим, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Pi_+(\ell)} \left|\partial_2 u_p^\ell(x)\right|^2 dx - \int\limits_{\Pi_+(\ell)} \left|\partial_2 u_{p\perp}^\ell(x)\right|^2 dx\\ &= \int\limits_{\Pi_+(\ell)} \left|\partial_2 u_{p\flat}^\ell(x)\right|^2 dx + 2\int\limits_{\Pi_+(\ell)} \partial_2 u_{p\flat}^\ell(x)\partial_2 u_{p\perp}^\ell(x)\, dx\\ &= \frac{\pi^2}{2\ell}\int\limits_{\Pi_+(\ell)} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)\left|\mathcal{U}_p^\ell\left(\frac{x_1}{\ell}\right)\right|^2 dx\\ &+ \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\int\limits_{\Pi_+(\ell)} \cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)\mathcal{U}_p^\ell\left(\frac{x_1}{\ell}\right)\partial_2 u_{p\perp}^\ell(x)\, dx\\ &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 |\mathcal{U}_p^\ell(y)|^2\, dx - \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\int_0^\ell \mathcal{U}_p^\ell\left(\frac{x_1}{\ell}\right)\left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)u_{p\perp}^\ell(x_1,x_2)\, dx_2\right) dx_1.\end{aligned}$$

В силу условия ортогональности (5.22) последний интеграл равен нулю.

Интегральное тождество (1.4) с ингредиентами $u^\ell = \psi^\ell = u_p^\ell$ и $\lambda^\ell = \lambda_p^\ell$, соотношения (5.16), (5.21), (5.23) и неравенства (2.10), (5.24) показывают, что при большом ℓ верны соотношения

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\pi^2}{4}+\frac{C_p}{\ell^2}\Big)\|u_p^\ell;L^2(\Pi_+)\|^2\geqslant\lambda_p^\ell\|u_p^\ell;L^2(\Pi_+)\|^2\\
&=2\ell\int_0^\ell\int_0^1\sin^2\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Big|\frac{\partial\mathcal{U}_p^\ell}{\partial x_1}\Big(\frac{x_2}{\ell}\Big)\Big|^2dx+\underbrace{\int_0^\ell\int_0^1\Big|\frac{\partial u_{p\perp}^\ell}{\partial x_1}(x)\Big|^2dx}\\
&+\ell\frac{\pi^2}{4}\int_0^\ell\int_0^1\cos^2\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Big|\mathcal{U}_p^\ell\Big(\frac{x_2}{\ell}\Big)\Big|^2dx+\int_0^\ell\int_0^1\Big|\frac{\partial u_{p\perp}^\ell}{\partial x_2}(x)\Big|^2dx\\
&+\underbrace{\int_\ell^{+\infty}\int_0^1\Big|\frac{\partial u_p^\ell}{\partial x_1}(x)\Big|^2dx}+\int_\ell^{+\infty}\int_0^1\Big|\frac{\partial u_p^\ell}{\partial x_2}(x)\Big|^2dx\\
&\geqslant\frac{1}{\ell^2}\,\|\partial_y\mathcal{U}_p^\ell;L^2(0,1)\|^2+\frac14\pi^2\|u_{p\flat}^\ell;L^2(\Pi_+(\ell))\|^2\\
&+\frac94\pi^2\|u_{p\perp}^\ell;L^2(\Pi_+(\ell))\|^2+\pi^2\|u_p^\ell;L^2(\Pi_+\setminus\Pi_+(\ell))\|^2\\
&\Rightarrow\quad\frac{1}{\ell^2}\|\partial_y\mathcal{U}_p^\ell;L^2(0,1)\|^2+2\pi^2\|u_{p\perp}^\ell;L^2(\Pi_+(\ell))\|^2\\
&+\frac34\pi^2\|u_p^\ell;L^2(\Pi_+\setminus\Pi_+(\ell))\|^2\leqslant\frac{C_p}{\ell^2}\|u_p^\ell;L^2(\Pi_+)\|^2=\frac{C_p}{\ell^2}.
\end{aligned}\tag{5.26}$$

Пояснение: положительные интегралы, выделенные фигурной скобкой снизу, удалены, интегралы, содержащие синус и косинус, вычислены согласно формулам (5.20) и (5.21), а для остальных применены неравенства (5.24) и (5.25). Теперь из последней оценки в (5.26) при учете нормировки собственной функции выводим, что

$$\begin{aligned}
&1=\|\mathcal{U}_p^\ell;L^2(0,1)\|^2+\|u_{p\perp}^\ell;L^2(\Pi_+(\ell))\|^2+\|u_p^\ell;L^2(\Pi_+\setminus\Pi_+(\ell))\|^2\\
&\quad\Rightarrow\quad\big|1-\|\mathcal{U}_p^\ell;L^2(0,1)\|^2\big|\leqslant\frac{c_p}{\ell^2}.
\end{aligned}\tag{5.27}$$

Последние оценки в списках (5.26) и (5.27) показывают, что в последовательности $\{\ell^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ найдется подпоследовательность, вдоль которой

$$\mathcal{U}_p^\ell\ \to\ \mathcal{U}_p^\infty \text{ слабо в } H^1(0,1) \text{ и сильно в } L^2(0,1).\tag{5.28}$$

При этом простое следовое неравенство [1]

$$2\ell|\mathcal{U}_p^\ell(1)|^2 = \Big|\int\limits_0^1 \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\, u_p^\ell(\ell,x_2)\,dx_2\Big|^2 \leqslant \int\limits_0^1 \big|u_p^\ell(\ell,x_2)\big|^2\,dx_2$$
$$\leqslant c\|u_p^\ell; H^1((\ell,\ell+1)\times(0,1))\|^2 \leqslant C$$

гарантирует, что $\mathcal{U}_p^\ell(1)\to 0$.

Теперь в интегральное тождество (1.4) подставим пробную функцию

$$x\mapsto \psi^\ell(x) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}x_2\Big)\Psi\Big(\frac{x_1}{\ell}\Big),$$

где $\Psi\in C^\infty_{cD}[0,1)$ и лишний нижний индекс означает, что $\Psi(0)=0$ в случае D. В итоге простые выкладки приводят к формуле

$$\int\limits_0^1 \partial_y\mathcal{U}_p^\ell(y)\partial_y\Psi(y)\,dy = \ell^2\Big(\lambda_p^\ell - \frac{\pi^2}{4}\Big)\int\limits_0^1 \mathcal{U}_p^\ell(y)\Psi(y)\,dy. \tag{5.29}$$

Сходимости (5.17) и (5.28) позволяют осуществить предельный переход при $\ell\to+\infty$ в формуле (5.29) и придти к интегральному тождеству

$$\int\limits_0^1 \partial_y\mathcal{U}_p^\infty(y)\partial_y\Psi(y)\,dy = \Lambda_p^\infty\int\limits_0^1 \mathcal{U}_p^\infty(y)\Psi(y)\,dy, \quad \Psi\in C^\infty_{cD}[0,1),$$

а в силу последнего соотношения (5.27) – и к равенству $1=\|\mathcal{U}_p^\infty; L^2(0,1)\|$. В итоге видим, что пределы (5.17) и (5.28) в самом деле образуют спектральную пару задачи (5.18), (5.19). Напомним еще, что продолжение предельных функций переменной y по нечетности в случае D и по четности в случае N порождает собственную пару (2.14) задачи (2.13).

Теорема 5.1. *Если* $\{\lambda_p^\ell, u_p^\ell\}$ *– собственная пара задачи* (1.1), (1.2), *удовлетворяющая требованиям* (5.16), *то сходимости* (5.17) *и* (5.28) *дают собственную пару* $\{\Lambda_p^\infty,\mathcal{U}_p^\infty\}$ *предельной задачи* (5.18), (5.19).

Полученной информации достаточно для того, чтобы завершить проверку теоремы 2.1 по следующим двум причинам. Во-первых, в силу сильной сходимости (5.28) функции $2^{-1/2}\mathcal{U}_1^\infty,\dots, 2^{-1/2}\mathcal{U}_m^\infty$ ортонормированы в $L^2(-1,1)$, так как собственные функции $u_1^\ell,\dots,u_m^\ell$ задачи (1.1), (1.2) ортонормированы в $L^2(\Pi)$. Во-вторых, все собственные числа предельной задачи на отрезке $(-1,1)$ простые и в $c_j\ell^{-1}$-окрестности каждого из них $\Lambda_j = \pi^2 j^2/4$ построено видоизмененное собственное число $\ell^2(\lambda^\ell_{q(j)} - \pi^2/4)$ (см. п. 1, §5). Закончить рассуждения просто.

5.4. Оправдание асимптотики при расширении окна Неймана. Примем обозначения из §4 и заметим, что “почти тождественный” диффеоморфизм $\varkappa^\varepsilon = (\varkappa^\varepsilon_1, \varkappa^\varepsilon_2) : \Pi_+ \to \Pi_+$,

$$\varkappa^\varepsilon_1(x) = x_1 - \chi_0(r_+)\varepsilon, \quad \varkappa^\varepsilon_2(x) = x_2,$$

переводит точку $P^{\ell+\varepsilon}_+$ в точку P^ℓ_+ и придает возмущение оператору Лапласа, квадратично зависящее от малого параметра $\varepsilon \geqslant 0$ и сосредоточенное на компактном множестве $\operatorname{supp}|\nabla\chi_0|$. Таким образом, согласно общим результатам [50, гл. 6] теории возмущений линейных операторов простые собственные числа задач (1.1), (1.2), (2.19) аналитически зависят от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$. Таким образом, требуется только проверить полученные в §4 выражения для коэффициентов (4.16), (4.28) и (4.36) в поправочных членах разложений (4.1), (4.18) и (4.29) соответственно. Наиболее простой (по мнению автора) подход состоит в применении леммы 5.1 и построении “почти собственной” пары оператора $A^{\ell+\varepsilon}$ на основе формального асимптотического анализа из §4. Подробно рассмотрим случай из п. 1, §4, в котором конструкции содержат все необходимые элементы, но не оказываются излишне громоздкими, как в случае из п. 2, §4. Разумеется, случай $\lambda_\dagger \in \sigma^\ell_p$, разобранный в п. 3, §4, более прост из-за экспоненциального затухания захваченной волны.

“Почти собственная” пара $\{t^\ell_\varepsilon, \mathcal{V}^\ell_\varepsilon\}$ с ингредиентами

$$t^\ell_\varepsilon = (\pi^2 - \varepsilon^2\theta^2)^{-1}, \quad \mathcal{V}^\ell_\varepsilon = \|\mathbf{U}^\ell_\varepsilon; \mathcal{H}^{\ell+\varepsilon}\|^{-1}\mathbf{U}^\ell_\varepsilon$$

включает множитель (4.16) и функцию

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^\ell_\varepsilon(x) &= X^\ell_\varepsilon(x_1)\chi^\varepsilon_0(r_+)\left(u^0_T(x) + \varepsilon u'_T(x)\right) + \chi^\ell(x_1)\sin(\pi x_2)e^{-\varepsilon\theta x_1}\\ &+ \varepsilon^{1/2}\chi_0(r_+)K^0_T\rho_1^{1/2}\sin\frac{\varphi_1}{2} - X^\ell_\varepsilon(x_1)\chi^\ell(x_1)\sin(\pi x_2)(1-\varepsilon\theta x_1)\\ &- \chi^\varepsilon_0(r_+)\chi_0(r_+)K^0_T\Big(r_+^{1/2}\sin\frac{\varphi_+}{2} - \frac{1}{2}r_+^{-1/2}\sin\frac{\varphi_+}{2}\Big).\end{aligned} \tag{5.30}$$

Конструкция (5.30) похожа на предыдущую (5.8), но учитывает явление пограничного слоя около точки $P^{\ell+\varepsilon}_+$: члены разложений (4.3), (4.4) и (4.9) умножены на срезающие функции с перехлестывающимися носителями, а дублирование слагаемых, подвергшихся сращиванию в п. 1, §4, устранено парой вычитаемых. Здесь помимо срезок (3.3) и (2.30) использованы такие гладкие срезающие функции:

$$\begin{aligned}
&\chi^\ell(x_1) = \chi(x_1 - \ell), \quad \chi^\ell(x_1) = 1 \text{ при } \ x_1 \geqslant \ell + 2,\\
&\chi^\ell(x_1) = 0 \text{ при } x_1 \leqslant \ell + 1;\\
&\chi_0^\varepsilon(r_+) = 1 \text{ при } r_+ < 2\varepsilon, \quad \chi_0^\varepsilon(r_+) = 0 \text{ при } r_+ > 3\varepsilon;\\
&X_\varepsilon^\ell(x_1) = 1 \text{ при } x_1 < \ell + \varepsilon^{-1}, \ \ X_\varepsilon^\ell(x_1) = 0 \text{ при } x_1 > 1 + \ell + \varepsilon^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Благодаря наличию срезок, сглаживающих сингулярности около конца $(\ell+\varepsilon, 0)$ отрезка $\Gamma^{\ell+\varepsilon}$ и устраняющих рост асимптотических членов на бесконечности, выполнены необходимые краевые условия, а значит, $\mathbf{U}_\varepsilon^\ell \in \mathcal{H}^{\ell+\varepsilon}$, так как волна $\sin(\pi x_2)e^{-\varepsilon\theta x_1}$ исчезает на бесконечности.

Дальнейшие действия по применению леммы 5.1 полностью следуют схеме из п. 2, §5, а именно, обрабатывается величина из формулы (5.4)

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon^\ell = \|\mathbf{U}_\varepsilon^\ell; \mathcal{H}^{\ell+\varepsilon}\|^{-1} \sup \left|\left\langle \mathcal{T}^{\ell+\varepsilon}\mathbf{U}_\varepsilon^\ell - t_\varepsilon^\ell \mathbf{U}_\varepsilon^\ell, v_\varepsilon^\ell \right\rangle\right|&\\
= t_\varepsilon^\ell \|\mathbf{U}_\varepsilon^\ell; \mathcal{H}^{\ell+\varepsilon}\|^{-1} \sup \left|(I_\varepsilon^\ell, v_\varepsilon^\ell)_{\Pi_+}\right|,&
\end{aligned} \tag{5.32}$$

где супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^{\ell+\varepsilon}$, т.е. $\|\nabla v_\varepsilon^\ell; L^2(\Pi_+)\|^2 \leqslant 1$, а значит, верны соотношения

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon^\ell; L^2(\Pi_+)\|^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\|\nabla v_\varepsilon^\ell; L^2(\Pi_+)\|^2,&\\
\int\limits_{\mathbb{B}_{1/2}^+(P_+^{\ell+\varepsilon})} \frac{1}{(r_+^\varepsilon)^2}|v_\varepsilon^\ell(x)|^2\, dx \leqslant C.&
\end{aligned} \tag{5.33}$$

При этом $r_+^\varepsilon = |x - P_+^{\ell+\varepsilon}|$. Первая оценка (5.33) обеспечена одномерными неравенствами (2.9) и (2.10), а вторая – неравенством Фридрихса на дуге $(0,\pi) \ni \varphi_1$

$$\frac{1}{(r_+^\varepsilon)^2}\int\limits_0^\pi |v_\varepsilon^\ell(x)|^2 d\varphi_1 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi \frac{1}{(r_+^\varepsilon)^2}\Big|\frac{\partial v_\varepsilon^\ell}{\partial\varphi_1}(x)\Big|^2 d\varphi_1 \leqslant \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi |\nabla v_\varepsilon^\ell(x)|^2 d\varphi_1,$$

справедливым благодаря условию Дирихле на луче $\{x : x_1 > \ell+\varepsilon, x_2 = 1\}$, т.е. при $\varphi_1 = 0$. После несложных, но длинных преобразований первый сомножитель из скалярного произведения в $L^2(\Pi_+)$ из правой части соотношения (5.32) приобретает вид

$$\begin{aligned}
I^\ell_\varepsilon &= \Delta \mathbf{U}^\ell_\varepsilon + (\pi^2 - \varepsilon^2\theta^2)\mathbf{U}^\ell_\varepsilon = X^\ell_\varepsilon \chi^\varepsilon_0 (\Delta + \pi^2 - \varepsilon^2\theta^2)(u^0_T + \varepsilon u'_T) \\
&+ \chi^\ell(\Delta + \pi^2 - \varepsilon^2\theta^2)\sin(\pi x_2) e^{-\varepsilon\theta x_1} + \varepsilon^{1/2} K^0_T \chi_0 \Delta\Big(\rho_1^{1/2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\Big) \\
&+ \big[\Delta, X^\ell_\varepsilon\big]\big(u^0_T + \varepsilon u'_T - (1-\varepsilon\theta x_1)\sin(\pi x_2)\big) \\
&+ \big[\Delta, \chi^\varepsilon_0\big]\Big(u^0_T + \varepsilon u'_T - K^0_T\Big(r_+^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} r_+^{-1/2}\Big)\sin\frac{\varphi_+}{2}\Big) \\
&+ K^0_T\big[\Delta, \chi_0\big]\Big(\varepsilon^{1/2}\rho_1^{1/2}\sin\frac{\varphi_1}{2} - \Big(r_+^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} r_+^{-1/2}\Big)\sin\frac{\varphi_+}{2}\Big) \\
&+ K^0_T\chi_0(\pi^2 - \varepsilon^2\theta^2)\Big(\varepsilon^{1/2}\rho_1^{1/2} - \chi^\varepsilon_0\Big(r_+^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} r_+^{-1/2}\Big)\sin\frac{\varphi_+}{2}\Big) \\
&+ \big[\Delta, \chi^\ell\big]\sin(\pi x_2)\big(e^{-\varepsilon\theta x_1} - 1 + \varepsilon\theta x_1\big) \\
&- X^\ell_\varepsilon \chi^\ell \varepsilon^2\theta^2 \sin(\pi x_2)(1 - \varepsilon\theta x_1) =: \sum_{q=1}^{9} I^q.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Ясно, что $I^2 = I^3 = 0$. Поскольку u^0_T и u'_T – решения задач (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ и (4.11), (4.12), $(2.19)_T$, соответственно ограниченное и линейно растущее при $x_1 \to +\infty$, имеем

$$\begin{aligned}
&\|X^\ell_\varepsilon u^0_T; L^2(\Pi_+)\| \leqslant c^0\varepsilon^{-1/2}, \quad \|X^\ell_\varepsilon u'_T; L^2(\Pi_+)\| \leqslant c'\varepsilon^{-3/2}, \\
&I^1 = X^\ell_\varepsilon\chi^\varepsilon_0\varepsilon^2\theta^2(u^0_T + \varepsilon u'_T) \quad \Rightarrow \quad \big|(I^1, v^\ell_\varepsilon)_{\Pi_+}\big| \leqslant c\varepsilon^{3/2}.
\end{aligned}$$

Приведенные оценки L^2-норм функций u^0_T и u'_T обусловлены их поведением (2.25) и (4.14) при $x_1 \to +\infty$. Кроме того, u'_T можно зафиксировать так, что $a'_T = 0$ в представлении (4.14). Следовательно, сомножитель в выражении I^4, на который действует коммутатор $[\Delta, X^\ell_\varepsilon]$, исчезает на бесконечности как $e^{-\pi\sqrt{3}x_1}$. Поскольку коэффициенты коммутатора располагаются на квадрате $[\ell+\varepsilon^{-1}, 1+\ell+\varepsilon^{-1}]\times[0,1]$, приходим к оценке

$$\big|(I^4, v^\ell_\varepsilon)_{\Pi_+}\big| \leqslant ce^{-\pi\sqrt{3}/(\ell+\varepsilon^{-1})}.$$

Для того чтобы обработать выражение I^5, заметим, что в силу формул (3.12), (3.13), (4.13) и (5.31) на множестве $\Theta^\varepsilon = \operatorname{supp}|\nabla\chi^\varepsilon_0| \subset \{x \in$

$\overline{\Pi_+}: 2\varepsilon \leqslant r_+ \leqslant 3\varepsilon\}$ верны формулы

$$I^5 = K_T^0(l_1^\varepsilon\partial_1 + l_2^\varepsilon\partial_2 + l_0^\varepsilon)S^\varepsilon,$$
$$l_j^\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{-1}),\ j = 1,2, \quad l_0^\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{-2}),$$
$$S^\varepsilon(x) = O(r_+^{1/2}(\varepsilon + r_+)),\ \nabla S^\varepsilon(x) = O(r_+^{-1/2}(\varepsilon + r_+)).$$

Таким образом, при учете второго неравенства (5.33) находим, что

$$\big|(I^4, v_\varepsilon^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant c\bigg(\int\limits_{\Theta^\varepsilon}\Big(\varepsilon^{-1}r_+^{-1/2}(\varepsilon + r_+) + \varepsilon^{-2}r_+^{1/2}(\varepsilon + r_+)\Big)^2 (r_+^\varepsilon)^2\,dx\bigg)^{1/2}$$
$$\times\bigg(\int\limits_{\Theta^\varepsilon}\frac{1}{(r_+^\varepsilon)^2}|v_\varepsilon^\ell(x)|^2\,dx\bigg)^{1/2} \leqslant c\varepsilon^{3/2}.$$

Носители коэффициентов коммутатора $[\Delta, \chi_0]$ удалены от точки $P_+^{\ell+\varepsilon}$, т.е. соотношения (4.10) и $r_+ = \varepsilon\rho$ дают оценку

$$\big|(I^6, v_\varepsilon^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant c\varepsilon^2.$$

Те же соотношения и второе неравенство (5.33) после перехода к полярным координатам показывают, что

$$\big|(I^7, v_\varepsilon^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant c\bigg(\varepsilon\int\limits_0^{3\varepsilon}\rho_1(r_+^\varepsilon)^2 r_+\,dr_+ + \varepsilon\int\limits_{2\varepsilon}^{1/2}\rho^{-3}(r_+^\varepsilon)^2 r_+\,dr_+\bigg)^{1/2}$$
$$\times\bigg(\int\limits_{\Theta^\varepsilon}(r_+^\varepsilon)^{-2}|v_\varepsilon^\ell(x)|^2\,dx\bigg)^{1/2} \leqslant c\varepsilon^2.$$

Поскольку носители коэффициентов коммутатора $[\Delta, \chi_+^\ell]$ расположены на множестве $[\ell+1, \ell+2]\times[0,1]$ (см. определение (5.7)) простая оценка последнего слагаемого в списке (5.34) основана на формуле Тейлора для экспоненциальной функции:

$$\big|(I^8, v_\varepsilon^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant c\varepsilon^2.$$

Наконец, элементарные вычисления приволят к неравенствам

$$\big|(I^9, v_\varepsilon^\ell)_{\Pi_+}\big| \leqslant c\varepsilon^2\|(1+\varepsilon x_1)X_\varepsilon^\ell\chi^\ell; L^2(\Pi_+)\| \leqslant c\varepsilon^{3/2}.$$

Перегруппировав члены в правой части (5.30), обнаруживаем, что при $x_1 > \ell + 2$ функция $\mathbf{U}_\varepsilon^\ell$ отличается от медленно затухающей волны $\sin(\pi x_2)e^{-\varepsilon\theta x_1}$ лишь слагаемым $O(e^{-\pi\sqrt{3}x_1})$. Следовательно, при малом ε имеем

$$\|\mathbf{U}_\varepsilon^\ell; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geqslant \|\nabla \mathbf{U}_\varepsilon^\ell; L^2(\Pi \setminus \Pi(2+\ell))\|^2$$
$$\geqslant \int\limits_{\Pi\setminus\Pi(2+\ell)} \Big(\big(\pi^2\cos^2(\pi x_2) + \varepsilon^2\theta^2\sin^2(\pi x_2)\big)e^{-2\varepsilon\theta x_1} - Ce^{-2\pi\sqrt{3}x_1}\Big)\,dx \geqslant \frac{\pi^2}{8\theta\varepsilon}.$$

Соберем полученные оценки. В итоге обнаружим, что величина (5.33) не превосходит $c^\ell\varepsilon^2$, а значит, сначала лемма 5.1 предоставляет собственное число $\tau_T^\varepsilon \in [t_\varepsilon^\ell + c^\ell\varepsilon^2, t_\varepsilon^\ell - c^\ell\varepsilon^2]$ оператора $A_T^{\ell+\varepsilon}$, а аналогичная (5.14) выкладка показывает, что $\lambda_T^\varepsilon = (\tau_T^\varepsilon)^{-1}$ – собственное число задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$, подчиненное оценке (4.17). Теорема 4.1 доказана в полном объеме и, как уже упоминалось, теоремы 4.2 и 4.3 устанавливаются по той же схеме.

§6. Обоснование асимптотики критических размеров окна Неймана

6.1. Постановка условий излучения в полосе. При двойном индексе $\overrightarrow{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$ определим весовое пространство Соболева $W^1_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi)$ (пространство Кондратьева [49]) и весовое пространство Лебега $L^2_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi)$ как пополнения линейного множества $C_c^\infty(\overline{\Pi})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по весовым нормам

$$\begin{aligned}&\|v; W^1_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi)\| = (\|\nabla v; L^2_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi)\|^2 + \|v; L^2_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi)\|^2)^{1/2} \quad \text{и}\\ &\|f; L^2_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi)\| = \big(\|e^{\beta_1\xi_1} f; L^2(\Pi_+)\|^2 + \|e^{-\beta_0\xi_1} f; L^2(\Pi_-)\|\big)^{1/2}\end{aligned} \tag{6.1}$$

соответственно. Они состоят из функций $f \in L^2_{loc}(\overline{\Pi})$ и $v \in H^1_{loc}(\overline{\Pi})$, для которых конечны соответствующие нормы (6.1). При $\beta_j > 0$ элементы пространств затухают на бесконечности, но при $\beta_j < 0$ им разрешен некоторый рост, причем скорости затухания/роста регулируются весовыми индексами β_j, $j = 0, 1$. Наконец, при $\beta_j = 0$ выражения (6.1) – обычные (не весовые) соболевская и лебегова нормы.

При пороговом значении спектрального параметра интегральное тождество

$$(\nabla v, \nabla\psi)_\Pi - \pi^2(v,\psi)_\Pi = f(\psi), \quad \psi \in W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi), \tag{6.2}$$

обслуживает задачу (2.3)–(2.5) с $\mu = \pi^2$ и ставится на подпространстве

$$W^1_{\overrightarrow{\beta},0}(\Pi) = \{v \in W^1_{\overrightarrow{\beta}}(\Pi) \, : \, v = 0 \text{ на } \ \partial\Pi \setminus (\mathbb{R}_- \times \{1\}\}.$$

Кроме того, $f \in W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)^*$ – (анти)линейный непрерывный функционал на пространстве $W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)$.

Задаче (6.2) отвечает непрерывное отображение

$$\mathcal{O}_{\overrightarrow{\beta}} : W^1_{\overrightarrow{\beta},0}(\Pi) \ \to \ W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)^*,$$

которое согласно общим результатам[7] [30, гл. 5, §2], [57, §2] и следствию 3.1 является фредгольмовым оператором[8] при $\beta_j \in (0, \beta_j^\ddagger)$, к тому же мономорфизмом (см. доказательство предложения 6.1). Здесь и далее

$$\beta_j \in (0, \beta_j^\ddagger), \ j = 0, 1, \quad \text{и} \quad \beta_1^\ddagger = \pi\sqrt{3}, \quad \beta_0^\ddagger = \pi\frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{6.3}$$

Очередное утверждение об однозначной разрешимости задачи (2.3)–(2.5) – результат постановки энергетических условий излучения (см. [30, гл. 5, §3, §6]): в разложение решения на бесконечности включаются уходящие в рукавах Π_- и Π_+ волны v_- и w_+, заданные формулами (2.26) и (2.20) соответственно.

Предложение 6.1. *Пусть выполнены ограничения* (6.3) *и, кроме того,* $f \in W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)^*$. *Задача* (2.3)–(2.5) *с параметром* $\mu = \pi^2$ *имеет (единственное) решение* $v \in W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)$, *представимое в виде*

$$v(\xi) = \chi_-(\xi_1) a_- v_-(\xi) + \chi_+(\xi_1) a_+ w_+(\xi) + \widetilde{v}(\xi) \tag{6.4}$$

со срезками (2.31) *и удовлетворяющее интегральному тождеству* (6.2) *с пробными функциями* $\psi \in W^1_{\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)$. *Для коэффициентов* $a_\pm \in \mathbb{C}$ *и затухающего остатка* $\widetilde{v} \in W^1_{\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)$ *верна оценка*

$$|a_-| + |a_+| + \|\widetilde{v}; W^1_{\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)\| \leqslant c_{\overrightarrow{\beta}} \|f; W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi)^*\|, \tag{6.5}$$

---

[7]Эти результаты относятся к классическим постановкам краевых задач, но переход к обобщенным постановкам, например, к интегральному тождеству (6.2), не требует никаких изменений в приведенных рассуждениях и выкладках (ср. работу [56] применительно к задаче Дирихле для оператора Гельмгольца).

[8]Ограничения на весовые индексы $\beta > 0$ определяются наличием у задачи решений $e^{\pi\sqrt{5}x_1/2}\sin(\pi x_2/2)$ и $e^{-\pi\sqrt{3}x_1}\sin(2\pi x_2)$ в рукавах Π_- и Π_+ соответственно.

в которой множитель $c_{\overrightarrow{\beta}}$ *не зависит от правой части* f, *но неограниченно возрастает при* $\beta_j \to +0$ *или* $\beta_j \to \beta_j^{\ddagger}$, *причем* $j = 0$ *или* $j = 1$.

Доказательство. Согласно стандартному подходу (см. книгу [30, гл. 1], статью [56] и многие другие публикации), опирающемуся на формулы (2.21) и (2.27) для симплектической формы (2.22) и планомерно использованному в п. 2, §2, достаточно убедиться в том, что у однородной ($f = 0$) задачи (6.2) нет захваченных волн $v \in W^1_{(0,0),0}(\Pi) \subset H^1(\Pi)$, допускающих представление (6.4) с коэффициентами $a_\pm = 0$ и потому затухающих на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Всякое такое решение бесконечно дифференцируемо всюду в $\overline{\Pi}$, кроме начала координат $\mathcal{O}$, в котором его производные приобретают корневые сингулярности.

Сначала рассмотрим сужение v_+ захваченной волны v на полуполосу Π_+. Положим

$$v_+(x) = v_+^0(x_1)\sin(\pi x_2) + v_+^\perp(x), \tag{6.6}$$

где

$$v_+^0(x_1) = 2\int_0^1 \sin(\pi x_2) v_+(x)\,dx_2,\ \int_0^1 \sin(\pi x_2) v_+^\perp(x_1, x_2)\,dx_2 = 0,\ x_1 > 0. \tag{6.7}$$

По причине последнего условия ортогональности справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_0^1 \left|v_+^\perp(x)\right|^2 dx_2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left|\frac{\partial v_+^\perp}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right|^2 dx_2,\ x_1 > 0. \tag{6.8}$$

Умножим уравнение (2.3) с $\mu = \pi^2$ на $\sin(\pi x_3)$ и при каждом $x_1 > 0$ проинтегрируем по $x_2 \in (0, 1)$. В силу условий Дирихле на боковых сторонах полуполосы Π_+ находим, что

$$0 = \int_0^1 \sin(\pi x_2)(\Delta + \pi^2) v(x)\,dx_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_+^0}{\partial x_1}(x_1) + \pi^2 v_+^0(x_1)\right).$$

Следовательно,

$$v_+^0(x_1) = \sum_{\pm} c_\pm e^{\pm i\pi x_1}$$

и $c_\pm = 0$ ввиду затухания функции (6.6) при $x_1 \to +\infty$, т.е.

$$v_+(x) = v_+^\perp(x). \tag{6.9}$$

На полуполосе Π_- аналогичные (6.6) и (6.7) соотношения для сужения v_- функции v выглядят так:

$$\begin{aligned} &v_-(x) = v_-^0(x_1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) + v_-^\perp(x),\\ &v_-^0(x_1) = 2\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) v_-(x)dx_2,\\ &\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) v_+^\perp(x_1,x_2)dx_2 = 0,\ x_1 < 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

После интегрирования по $x_2 \in (0,1)$ уравнения (2.3), умноженного на $\sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)$, и при учете краевых условий (2.5), (2.4) на боковых сторонах полуполосы Π_- получаем, что

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)(\Delta+\pi^2)v(x)dx_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_-^0}{\partial x_1}(x_1) + \frac{3}{4}\pi^2 v_-^0(x_1)\right)\\ \Rightarrow \quad v_-^0(x_1) = \sum_\pm c_\pm e^{\pm i\sqrt{3}\pi x_1/2} \quad \Rightarrow \quad c_\pm = 0. \end{aligned}$$

Последний вывод обеспечен затуханием функции v_- при $x_1 \to -\infty$. Поскольку $v_- = v_-^\perp$, условие ортогональности (6.10) обеспечивает неравенство

$$\int\limits_0^1 |v_-(x)|^2\, dx_2 \leqslant \frac{4}{9\pi^2}\int\limits_0^1 \left|\frac{\partial v_-}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right|^2 dx_2,\ x_1 < 0,$$

которое вместе с соотношениями (6.9), (6.8) показывает, что

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_\Pi |\nabla v(x)|^2\, dx - \pi^2 \int\limits_\Pi |v(x)|^2\, dx\\ \geqslant \min\left\{4\pi^2 - \pi^2, \frac{9}{4}\pi^2 - \pi^2\right\}\int\limits_\Pi |v(x)|^2\, dx \geqslant \frac{5}{4}\pi^2 \int\limits_\Pi |v(x)|^2\, dx, \end{aligned}$$

а значит, $v = 0$. Предложение доказано. □

6.2. Оценки решений задачи в полуполосе, равномерные относительно параметра ℓ. В этом и следующих пунктах удобно записывать задачу (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ в "сдвинутых" координатах ξ (см. формулу (2.2)), т.е. считать ее поставленной в полуполосе

$$\Pi_+^\ell = (-\ell, +\infty) \times (0,1).$$

Несмотря на наличие только одного выхода на бесконечность сохраним весовые нормы (6.1) для функциональных пространств $L^2_{\vec\beta}(\Pi_+^\ell)$ и $W^1_{\vec\beta}(\Pi_+^\ell)$, но включим в подпространство $W^1_{\vec\beta,N}(\Pi_+^\ell)$ краевые условия Дирихле на линиях $(-\ell,+\infty)\times\{0\}$ и $\mathbb{R}_+\times\{1\}$, а в подпространство $W^1_{\vec\beta,D}(\Pi_+^\ell)$ – еще и на торце $\Upsilon_{-\ell} = \{-\ell\}\times(0,1)$

Неоднородная, с правыми частями в уравнении и краевых условиях, задача (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ в весовых классах формулируется как интегральное тождество

$$(\nabla u_T^\ell, \nabla\psi_T^\ell)_{\Pi_+^\ell} - \lambda(u_T^\ell, \psi_T^\ell)_\Pi = f_T^\ell(\psi_T^\ell), \qquad \psi_T^\ell \in W^1_{-\vec\beta,T}(\Pi_+^\ell), \tag{6.11}$$

с некоторым "хорошим" функционалом в правой части. Его решение ищется в виде

$$u_T^\ell(\xi) = \chi_-(\xi_1)a_-^\ell v_T(\xi_1+\ell,\xi_2) + \chi_+(\xi_1)a_+^\ell w_+(\xi) + \widetilde{u}_T^\ell(\xi), \tag{6.12}$$

где v_T и w_+ – волны (2.33) и (2.20). Подчеркнем, что пробные функции в тождестве (6.12) считаются исчезающими при $\xi_1\to+\infty$ с экспоненциальной скоростью, и поэтому решению u_T^ℓ разрешено не затухать на бесконечности: правая часть (6.12) включает линейную волну из списка (2.20) и ограниченную волну (2.33).

Пространство $\mathbf{W}^1_{\vec\beta,T}(\Pi_+^\ell)$ составим из функций вида (6.12) и снабдим его нормой

$$\|u_T^\ell; \mathbf{W}^1_{\vec\beta,T}(\Pi_+^\ell)\| = \inf\left(|a_-^\ell|^2 + |a_+^\ell|^2 + \|\widetilde{u}_T^\ell; W^1_{\vec\beta,T}(\Pi_+^\ell)\|\right)^{1/2}, \tag{6.13}$$

где инфимум вычисляется по всем представлениям (6.12). Как в книге [30], статьях [57,58] и др. публикациях, называем[9] $\mathbf{W}^1_{\vec\beta,T}(\Pi_+^\ell)$ "весовым пространством с отделенной асимптотикой" – гильбертова структура этого пространства далее востребована не будет. Интегральное

[9] Аналогичное пространство вводится [30, гл. 5] и для функций (6.12), подчиненных энергетическим условиям излучения (6.4).

тождество (6.11) порождает непрерывное отображение

$$\mathbf{O}^{\ell}_{\overrightarrow{\beta}} : \mathbf{W}^1_{\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^{\ell}_T) \ \to \ W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^{\ell}_+)^*, \tag{6.14}$$

причем его норма ограничена не зависящей от больших величин ℓ постоянной.

Основной результат этого параграфа будет доказан в п. 4, §6.

Теорема 6.1. *Пусть* $\beta_j \in (0, \beta^{\ddagger}_j)$, $j = 0, 1$, *и* $f \in W^1_{-\overrightarrow{\beta},0}(\Pi^{\ell}_+)^*$. *Тогда задача* (6.11) *с пороговым спектральным параметром* $\lambda = \pi^2$ *имеет единственное решение* $u^{\ell}_T \in \mathbf{W}^1_{\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^{\ell}_+)$ *и верна оценка*

$$\|u^{\ell}_T; \mathbf{W}^1_{\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^{\ell}_T)\| \leqslant \mathbf{c}_{\overrightarrow{\beta}} \|f; W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^{\ell}_+)^*\|, \tag{6.15}$$

в которой множитель $\mathbf{c}_{\overrightarrow{\beta}}$ *не зависит от функционала* f, *но неограниченно возрастает при* $\beta_j \to +0$ *или* $\beta_j \to \beta_{\dagger}$, *где* $j = 0$ *или* $j = 1$.

Иными словами, отображение (6.14) – изиморфизм при больших ℓ.

Следствие 6.1. *При больших размерах* ℓ *окна Неймана порог* $\lambda_{\dagger} = \pi^2$ *не является собственным числом задачи* (1.1), (1.2), *т.е. все пороговые резонансы правильные.*

6.3. Растущие решения задачи в полуполосе. Далее понадобятся решения задачи в полуполосе $\Pi_+ \ni x$ с краевыми условиями Дирихле и Неймана на боковых сторонах $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ и $\mathbb{R}_+ \times \{1\}$ соответственно, а также условиями $(2.19)_D$ или $(2.19)_N$ на ее торце. Эта задача получается формальным переходом к $\ell = +\infty$ в исходной задаче (1.1), (1.2), $(2.19)_T$, т.е распространением условия Неймана на всю боковую сторону $\{x : x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 = 1\}$ полуполосы. Кроме того, (отрицательный) весовой индекс $-\beta_0$ в норме

$$\|u^0; W^1_{-\beta_0,T}(\Pi_+)\| = \big(\|e^{-\beta_0 x_1}\nabla u^0; L^2(\Pi_+)\|^2 + \|e^{-\beta_0 x_1} u^0; L^2(\Pi_+)\|^2\big)^{1/2}, \tag{6.16}$$

пространства $W^1_{-\beta_0,T}(\Pi_+)$, на котором осуществляется обобщенная постановка указанной задачи

$$(\nabla u^0_T, \nabla \psi^0_T)_{\Pi_+} - \pi^2 (u^0_T, \psi^0_T)_{\Pi_+} = f^0_T(\psi^0_T), \quad \psi^0_T \in W^1_{\beta_0,T}(\Pi_+), \tag{6.17}$$

унаследован от весового множителя в первой весовой норме (6.1) после обратной замены координат (2.2). При этом пробная функция $\psi^0_N \in W^1_{\beta_0,T}(\Pi_+)$ обращается в нуль на нижней боковой стороне $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, а функция $\psi^0_D \in W^1_{\beta_0,T}(\Pi_+)$ – еще и на торце Υ_0. Кроме того, в силу неравенства $\beta_0 > 0$ она затухает при $x_1 \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью, а решению разрешен рост на бесконечности. В частности, функции (2.33) суть решения однородной ($f_T^0 = 0$) задачи (6.17).

Очередное утверждение, разумеется, вытекает из общих результатов [30, гл. 5, §6], [57, теорема 3.1], но по причине простой геометрии может быть проверено и элементарными средствами, например, методом Фурье.

Предложение 6.2. *Пусть* $f_T^0 \in W^1_{\beta_0,T}(\Pi_+)^*$*, а весовой индекс* β_0 *взят из формулы* (6.3)*. Задача* (6.17) *имеет решение* $u_T^0 \in W^1_{-\beta_0,T}(\Pi_+)$*, определенное с точностью до слагаемого* $c_T v_T$*, содержащего ограниченную волну* (2.33)*, но будучи подчинено условию ортогональности*

$$(u_T^0, v_T)_{\Pi_+(1)} = 0, \tag{6.18}$$

где $\Pi_+(1) = (0,1)^2$ *– квадрат, примыкающий к торцу полуполосы, становится единственным и удовлетворяет оценке*

$$\|u_T^0; W^1_{-\beta_0,T}(\Pi_+)\| \leqslant c_{\beta_0} \|f^0; W^1_{\beta_0,T}(\Pi_+)^*\|, \tag{6.19}$$

в которой множитель c_{β_0} *не зависит от функционала* f^0*, но неограниченно возрастает при* $\beta_0 \to +0$ *или* $\beta_0 \to \beta_0^\ddagger$.

6.4. Доказательство теоремы 6.1. Построим "почти обратный" оператор для (6.13), т.е. такое отображение

$$\mathbf{R}^\ell_\beta \colon W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^* \;\to\; \mathbf{W}^1_{\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_T),$$

что выполнено соотношение

$$\|\mathbf{O}^\ell_{\overrightarrow{\beta}} \mathbf{R}^\ell_{\overrightarrow{\beta}} - \mathsf{Id} \colon W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^* \to W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^*\| \leqslant \mathbf{C}\ell^{-\varepsilon} \quad \text{при } \epsilon > 0,\ \ell > \ell_\bullet. \tag{6.20}$$

Тогда отображение $\mathbf{O}^\ell_{\overrightarrow{\beta}} \mathbf{R}^\ell_{\overrightarrow{\beta}}$, близкое к тождественному Id, обратимо, а значит, $\mathbf{R}^\ell_{\overrightarrow{\beta}}(\mathbf{O}^\ell_{\overrightarrow{\beta}} \mathbf{R}^\ell_{\overrightarrow{\beta}})^{-1}$ – истинный обратный для оператора $\mathbf{O}^\ell_{\overrightarrow{\beta}}$.

Зафиксируем индексы $\beta_j \in (0, \beta_j^\ddagger)$ и число $\epsilon > 0$ так, чтобы $\beta_j \pm 2\epsilon \in (0, \beta_j^\ddagger)$ при $j = 0, 1$. Функционал $f^\ell \in W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^*$ представим в виде суммы $f^\ell_1 + \widehat{f}^\ell_0$, где

$$\begin{aligned} f^\ell_1(\psi^1) &= f^\ell(\chi^\ell_{1/2}(\psi^1), \quad \psi^1 \in W^1_{(-\beta_0-2\epsilon,-\beta_1),0}(\Pi), \\ f^\ell_0(\psi^0) &= f\big((1-\widehat{\chi}^\ell_{1/2})\widehat{\psi}^0\big), \quad \psi^0 \in W^1_{\beta_0-2\epsilon,T}(\Pi). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Здесь применена операция сдвига координат, т.е., например, функция $\widehat{\psi}^0$ задана в полуполосе Π_+ равенством $\widehat{\psi}^0(\xi_1,\xi_2)=\psi^0(\xi_1+\ell,\xi_2)$. Кроме того, срезка $\chi^\ell_{1/2}$ определена по эталонной срезке (2.2),

$$\begin{gathered}\chi^\ell_\theta(\xi_1)=\chi(\xi_1+\theta\ell),\ \theta\in[0,1],\\ \chi^\ell_\theta(\xi_1)=1 \text{ при } \xi_1>2-\theta\ell,\ \chi^\ell_\theta(\xi_1)=0 \text{ при } \xi_1<1-\theta\ell.\end{gathered}\tag{6.22}$$

Поскольку $e^{-2\varepsilon\xi_1}\leqslant ce^{\epsilon\ell}$ на множестве $\operatorname{supp} f^\ell_1\subset\{\xi\in\overline{\Pi}:\xi_1\geqslant 1-\ell/2\}$, увеличение весового индекса $\beta_0\mapsto\beta_0+2\epsilon$ приводит к следующему неравенству с большим множителем $e^{\epsilon\ell}$ в правой части:

$$\|f^\ell_1;W^1_{(-\beta_0-2\epsilon,-\beta_1),0}(\Pi)^*\|\leqslant ce^{\epsilon\ell}\|f^\ell;W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^*\|,\tag{6.23}$$

Точно так же уменьшение весового индекса $\beta_0\mapsto\beta_0-2\epsilon$, произошедшее во второй строке (6.21), и обратная замена координат (2.2) обеспечивают оценку

$$\|f^\ell_0;W^1_{\beta_0-2\epsilon,0}(\Pi)\|\leqslant ce^{-\beta_0\ell+\epsilon\ell}\|f^\ell;W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^*\|.\tag{6.24}$$

Множитель $e^{-\beta_0\ell}$ не играет существенной роли, так как сократится при замене $x\mapsto\xi$.

Предложения 6.1 и 6.2 предоставляют решение (6.12) задачи (6.11) из класса $W^1_{(\beta_0+2\epsilon,\beta_1),0}(\Pi)$ и подчиненное условию ортогональности (6.18) решение $u^0_T\in W^1_{-\beta_0+2\epsilon,T}(\Pi_+)$ задачи (6.19) – у названных задач правые части имеют вид (6.21). При этом в силу неравенств (6.23), (6.24) и оценок (6.5), (6.19) получаем, что выражения

$$\begin{gathered}e^{-\epsilon\ell}\Big(|a_-|+|a_+|+\|\widetilde{v};W^1_{(\beta_0+2\epsilon,\beta_1),0}(\Pi)\|\Big)\\ \text{и}\ \ e^{\beta_0\ell-\epsilon\ell}\|u^0_T;W^1_{-\beta_0+2\epsilon,T}(\Pi_+)\|\end{gathered}\tag{6.25}$$

приобретают общую мажоранту $C\|f^\ell;W^1_{-\overrightarrow{\beta},T}(\Pi^\ell_+)^*\|$, в которой множитель C не зависит от исходного функционала f^ℓ и дополнительного параметра $\epsilon\in[0,\epsilon_0)$; здесь ϵ_0 – малое положительное число. Важно также то, что во всех формулах значение $\epsilon=0$ допустимо.

Положим

$$\begin{aligned}&(\mathbf{R}^\ell_{\overrightarrow{\beta}}f^\ell)(\xi)=\chi_-(\xi_1)a_-v_-(\xi)+\chi_+(\xi_1)a_+w_+(\xi)+\chi^\ell_1(\xi_1)\widetilde{v}(\xi)\\ &+B\big(\chi_-(\xi_1)\big(v_+(\xi)+S^-_-v_-(\xi)\big)+\chi_+(\xi_1)S^+_-w_+(\xi)+\chi^\ell_1(\xi_1)\widetilde{V}_-(\xi)\big)\\ &+e^{\beta_0\ell}\chi_-(\xi_1)u^0_T(\xi_1+\ell,\xi_2).\end{aligned}\tag{6.26}$$

Здесь срезающие функции взяты из списков (2.31) и (6.22), $\theta = 1$, V_- – дифракционное решение (2.29) задачи (2.3)–(2.5) на пороге $\mu = \pi^2$, а $S_-^{\pm}$ – элементы пороговой матрицы рассеяния (см. п. 2, §2). Кроме того, множитель B нужен для соблюдения искусственных краевых условий Дирихле (минус) или Неймана (плюс) на торце $\Upsilon_{-\ell} = \{\xi : \xi_1 == \ell, \xi_2 \in (0,1)\}$ полуполосы Π_+^ℓ. Последнее слагаемое в (6.26) удовлетворяет этим условиям, а слагаемые с множителями χ_+ и χ_1^ℓ обращаются в нуль около отрезка $\Upsilon_{-\ell}$. Формулы (2.26) для осциллирующих волн $v_\pm$ показывают, что

$$\begin{aligned} &Bv_+(\xi) + (a_- + BS_-^-)v_-(\xi) \\ &\qquad = Be^{-i\ell\sqrt{3}/2}v_+(x) + (a_- + BS_-^-)e^{-i\ell\sqrt{3}/2}v_-(x), \end{aligned} \quad (6.27)$$

а значит, выполнение искусственных краевых условий при $x_1 = 0$ происходит в случае

$$Be^{-i\ell\sqrt{3}/2} \mp (a_- + BS_-^-)e^{i\ell\sqrt{3}/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\pm a_-}{e^{-i\ell\sqrt{3}} \mp S_-^-}. \quad (6.28)$$

Подчеркнем, что знаменатель не обращается в нуль согласно лемме 2.2, так как $|S_-^-| < 1$, Иными словами, в силу оценки первого выражения (6.25) приходим к соотношению

$$|B| \leqslant c|a_-| \leqslant C\|f^\ell; W^1_{-\vec{\beta},T}(\Pi_+^\ell)^*\|. \quad (6.29)$$

В силу связи (6.28) выражение (6.27) превращается в

$$Be^{-i\ell\sqrt{3}/2}v_T(\xi_1 + \ell, \xi_2),$$

т.е. линейная комбинация (6.26) принимает вид (6.12), где

$$\begin{aligned} &a_-^\ell = Be^{-i\ell\sqrt{3}/2}, \quad a_+^\ell = a_+ + BS_-^+, \\ &\widetilde{v}^\ell = \widetilde{v} + B\widetilde{V}_- + e^{\beta_0\ell}\chi_- u_T^0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Итак, функция (6.26) попадает в пространство $\mathbf{W}^1_{\vec{\beta},T}(\Pi_T^\ell)$ и справедливо неравенство

$$\|\mathbf{R}^\ell_{\vec{\beta}} f^\ell; \mathbf{W}^1_{\vec{\beta},T}(\Pi_+^\ell)\| \leqslant c\|f^\ell; W^1_{-\vec{\beta},T}(\Pi_+^\ell)^*\|.$$

обеспеченное оценками выражений (6.25) с $\epsilon = 0$ и формулой (6.29), которые позволяют обработать ингредиенты (6.30) представления (6.12) для $\mathbf{R}^\ell_{\vec{\beta}} f^\ell$.

Подчеркнем, что норма (6.13) определена как инфимум, и поэтому для ее оценки сверху достаточно привести одно представление функции $\mathbf{R}^{\ell}_{\vec{\beta}} f^{\ell}$, удовлетворяющее нужному неравенству. Вместе с тем из-за присутствия срезок χ_1^{ℓ} и χ_- в определении (6.26) функция $\mathbf{R}^{\ell}_{\vec{\beta}} f^{\ell}$ оставляет невязки в задаче (6.25), а именно,

$$\mathbf{O}^{\ell}_{\vec{\beta}} \mathbf{R}^{\ell}_{\vec{\beta}} f^{\ell} - f^{\ell} = \mathbf{S}^{\ell}_{\vec{\beta}} f^{\ell} \in W^1_{-\vec{\beta},T}(\Pi^{\ell}_+)^*. \tag{6.31}$$

Оператор $\mathbf{S}^{\ell}_{\vec{\beta}}$ задан равенством

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}^{\ell}_{\vec{\beta}} f^{\ell})(\psi^{\ell}) = ([\nabla, \chi_1^{\ell}](\widetilde{v} + B\widetilde{V}_-), \nabla\psi^{\ell})_{\Pi^{\ell}_+} - (\nabla(\widetilde{v} + B\widetilde{V}_-), [\nabla, \chi_1^{\ell}]\psi^{\ell})_{\Pi^{\ell}_+} \\ + e^{\beta_0 \ell}([\nabla, \chi_-]u^{\ell}_T, \nabla\psi^{\ell})_{\Pi^{\ell}_+} - e^{\beta_0 \ell}(\nabla u^{\ell}_T, [\nabla, \chi_-]\psi^{\ell})_{\Pi^{\ell}_+}.\end{aligned} \tag{6.32}$$

и верна оценка

$$\left|(\mathbf{S}^{\ell}_{\vec{\beta}} f^{\ell})(\psi^{\ell})\right| \leqslant c e^{-\epsilon\ell} \|f^{\ell}; W^1_{-\vec{\beta},T}(\Pi^{\ell}_+)^*\|. \tag{6.33}$$

Малый множитель $e^{-\epsilon\ell} = e^{\epsilon\ell} e^{-2\epsilon\ell}$ сформировался следующим образом: поскольку носители функций (6.21) содержатся во множествах $\{\xi \in \overline{\Pi} : \xi_1 \geqslant -1 + \ell/2\}$ и $\{x \in \overline{\Pi_+} : x_1 \leqslant 1 + \ell/2\}$, т.е. приращения $\pm 2\epsilon$ весового индекса принесло в мажоранту для выражений (6.25) большой множитель $e^{+\epsilon\ell}$, однако это же приращение породило гораздо более малый множитель $e^{-2\epsilon\ell}$, так как носители коэффицентов коммутаторов $[\nabla, \chi_1^{\ell}]$ и $[\nabla, \chi_-]$ из формулы (6.32) содержатся в квадратах $[-\ell + 1, -\ell + 2] \times [0, 1]$ и $[\ell - 2, \ell + 1] \times [0, 1]$, удаленных на расстояние $O(\ell)$ от начала декартовых систем координат ξ и x соответственно.

Соотношения (6.31)–(6.33) влекут за собой оценку (6.20) и доказывают теорему 6.1

6.5. Доказательство теоремы 2.3. Поскольку норма (6.13) включает модуль коэффициента рассеяния a^{ℓ}_+ в решении (6.12), оценивание асимптотического остатка в представлении (2.38) порогового коэффициента отражения s^{ℓ}_T в дифракционном решении ζ^{ℓ}_T задачи (1.1), (1.2), $(2.19)_T$ достаточно просто.

Составим приближение Z^{ℓ}_T к решению (2.23) только при помощи построенного в п. 3, §2 внутреннего (2.34) разложения – внешнее разложение (2.32) не нужно потому, что оно было полностью согласовано со внутренним! Именно, в силу формул (2.35)–(2.37) на прямоугольнике $\Pi_+(\ell)$ получаем соотношение

$$V_+(\xi) + B_T^\ell V_-(\xi) - C_T^\ell v_T(x) = \widetilde{V}_+(\xi) + B_T^\ell \widetilde{V}_-(\xi) =: \widetilde{V}_T^\ell(\xi) \qquad (6.34)$$

Для соблюдения краевых условий $(2.19)_T$ умножим экспоненциально малую на квадрате $(1,2)\times(0,1)$ функцию (6.34) на срезку (2.30) и положим

$$Z_T^\ell(x) = V_+(x_1-\ell, x_2) + B_T^\ell V_-(x_1-\ell, x_2) - (1-\chi(x_1))\widetilde{V}_T^\ell(x_1-\ell, x_2).$$

Разность $R_T^\ell(x) = \zeta_T^\ell(x) - Z_T^\ell(x)$ допускает представление (6.12), в котором $a_+^\ell = s_T^\ell - s_T^0(\ell)$, а вычитаемое взято из формулы (2.38). Функция R_T^ℓ удовлетворяет задаче (6.11), в которой $W^1_{-\vec{\beta},T}(\Pi_+)^*$ – норма функционала $f_T^\ell(\psi_T^\ell) = -([\Delta,\chi]\widetilde{V}_T^\ell, \psi_T^\ell)_{\Pi_+}$ мажорируется величиной $ce^{(\beta_0-\beta_0^\ddagger)\ell})$ и оказывается бесконечно малой согласно ограничению (6.12). В итоге неравенство (6.15) из теоремы 6.1 дает нужную оценку остатка в асимптотике (2.38).

Теорема 6.2. *Существуют такие положительные числа* $\ell_T^\sharp$ *и* $c_T^\sharp$*, что при* $\ell > \ell_T^\sharp$ *для порогового коэффицента отражения* s^ℓ *в решении* (2.23) *задачи* (1.1)*,* (1.2)*,* $(2.19)_T$ *справедлива оценка*

$$|s_T^\ell - s_T^0(\ell)| \leqslant c_T^\natural e^{(\beta_0-\beta_0^\ddagger)\ell},$$

Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы 2.3.

Автор благодарен Д.И. Борисову, указавшему на тесное родство данной работы и значительно более ранних исследований [3, 10].

Список литературы

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, М., Наука, 1973.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Л.:l, изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
3. P. Exner, P. Šeba, M. Tater, D. Vănek, *Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window.* — J. Math. Phys. **37**, No. 10 (1996), 4867–4887.
4. P. Exner, S. A. Vugalter, *Asymptotics estimates for bound states in quantum waveguides coupled laterally through a narrow window.* — Ann. Ins. H. Poincaré Phys. Téor. **65**, No. 1 (1996), 109–123.
5. W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renrer, B. Simon, *Weakly coupled bound states in quantum waveguides.* — Proc. Amer. Math. Soc. **125**, No. 5 (1997), 1487–1495.

6. P. Exner, S. A. Vugalter, *Bound-state asymptotic estimate for window-coupled Dirichlet strips and layers.* — J. Phys. **30**, No. 22 (1997), 7863–7878.
7. D. Borisov, P. Exner, *Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows.* — J. Phys. A. Math. Gen. **37** (2004), 3411–3428.
8. D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl'shin, *Geometric coupling thresholds in a the two-dimensional strip.* — J. Math. Phys. **43**, No. 12 (2008), 6265–6278.
9. D. Borisov, T. Ekholm, H. Kovarik, *Spectrum of the magnetic Schrödinger operator in a waveguide with combined boundary conditions.* — Ann. Henri Poincaré **6**, No. 2 (2005), 327–342.
10. Д. И. Борисов, *Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном.* — Матем. сборник **197**, No. 4 (2006), 3–32.
11. D. Borisov, P. Exner, *Distant perturbation asymptotics in window-coupled waveguides. I. The nonthreshold case.* — J. Math. Phys. **47**, No. 11 (2006), 113502-1–113502-24.
12. D. Borisov, P. Exner, A. Golovina, *Tunneling resonances in systems without a classical trapping.* — J. Math. Phys. **54** (2013) 012102.
13. С. А. Назаров, *Асимптотика собственного числа на непрерывном спектре двух квантовых волноводов, соединенных узкими окнами.* — Матем. заметки **93**, No. 2 (2013), 227–245.
14. Г. П. Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*, Л., Судостроение, 1990.
15. Л. И. Слепян, *Механика трещин*, Л., Судостроение, 1990.
16. В. М. Пестриков, Е. М. Морозов, *Механика разрушения твердых тел*, Курс лекций. СПб, Профессия, 2002.
17. С. А. Назаров, *Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва.* — Механика твердого тела No. 3 (1988), 124–129.
18. С. А. Назаров, О. Р. Полякова, *Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе.* — Труды московского матем. общества **57** (1996), 16–75.
19. С. А. Назаров, *Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы.* — Прикладная матем. и механика **62**, No. 3 (1998), 489–502.
20. S. Molchanov, B. Vainberg, *Scattering solutions in networks of thin fibers; small diameter asymptotics.* — Comm. Math. Phys. **273**, No. 2 (2007), 533–559.
21. D. Grieser, *Spectra of graph neighborhoods and scattering.* — Proc. London Math. Soc. **97**, No. 3 (2008), 718–752.
22. K. Pankrashkin, *Eigenvalue inequalities and absence of threshold resomamnces for waveguide junctions.* — J. of Math. Anal. and Appl. **449**, No. 1 (2017), 907–925.
23. С. А. Назаров, *Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор).* — Акустический журнал **66**, No. 5 (2020), 489–508.
24. С. А. Назаров, *Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов.* — Известия РАН. Серия матем. **84**, No. 6 (2020), 73–130.
25. Ф. Л. Бахарев, С. А. Назаров, *Критерии отсутствия и нличия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов.* — Алгебра и анализ **32**, No. 6 (2020), 1–23.

26. V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.
27. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Новосибирск, Научная книга, 2002.
28. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных значений задачи Стеклова на сочленении областей различных предельных размерностей.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **52**, No. 11 (2013), 2033–2049.
29. С. А. Назаров, *Моделирование сингулярно возмущенной спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач.* — Функциональный анализ и его приложения **49**, No. 1 (2015), 31–48.
30. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
31. С. А. Назаров, *Об асимптотике по параметру решения эллиптической краевой задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре.* — Дифференциальные уравнения и их применения **30** (1981), 27–46.
32. S. A. Nazarov, *The Navier-Stokes problem in thin or long tubes with periodically varying cross-section.* — Z. Angew. Math. Mech. **80**, No. 9 (2000), 591–612.
33. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*, М., Мир, 1967.
34. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, М., Наука, 1989.
35. С. А. Назаров, *Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра.* — Сибирск. матем. журнал **51**, No. 5 (2010), 1086–1101.
36. С. А. Назаров, *Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода.* — Функциональный анализ и его приложения **47**, No. 3 (2013), 37–53.
37. Н. А. Умов, *Уравнения движения энергии в телах*, Одесса, Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
38. J. H. Poynting, *On the transfer of energy in the electromagnetic field.* — Phil. Trans. of the Royal Society of London **175** (1984), 343–361.
39. Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике теории относительности и квантовой механике*, Сб. трудов. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1947.
40. И. И. Ворович, В. А. Бабешко, *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*, М., Наука, 1979.
41. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об условиях излучения для самосопряженных эллиптических задач.* — Доклады АН СССР **311**, No. 3 (1990), 532–536.
42. С. А. Назаров, *Ограниченные решения в Т-образном волноводе и спектральные свойства лестницы Дирихле.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **54**, No. 8 (2014), 1299–1318.
43. Р. Митра, С. Ли, *Аналитические методы теории волноводов*, М., Мир, 1974.
44. C. H. Wilcox, *Scattering Theory for Diffraction Gratings*, Applied Mathematical Sciences Series Vol. 46, Singapure, Springer, 1997.

45. М. Ш. Бирман, Г. Е. Скворцов, *О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей.* — Известия ВУЗ'ов. Матем. No. 5 (1962), 11–21.
46. F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von* $\Delta u + \lambda u = 0$ *in unendlichen Gebiete.* — Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **53**, No. 1 (1943), 57–65.
47. L. Bers, F. John, M. Schehter, *Partial differential equations*, New York, Interscience, 1964.
48. С. А. Назаров, *Волновод с двойным пороговым резонансом на простом пороге.* — Матем. сборникю **211**, No. 8 (2020), 20–67.
49. В.А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества **16** (1967), 219–292.
50. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.
51. A. Aslanyan, L. Parnovski, D. Vassiliev, *Complex resonances in acoustic waveguides.* — Q. J. Mech Appl Math. **53**, No. 3 (2000), 429–447.
52. С. А. Назаров, *О возмущении собственного числа на непрерывном спектре волновода с несимметричным препятствием.* — Доклады РАН **440**, No. 3 (2011), 317–322.
53. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* — Успехи матем. наук **12**, No. 5 (1953), 3–122.
54. Ю. А. Ромашев, С. А. Назаров, *Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами.* — Известия АН АрмССР. Механика. No. 4 (1982), 30–40.
55. С. А. Назаров, *Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений.* — Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва. Т. 5, 112–183.
56. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода.* — Теоретическая и математическая физика **167**, No. 2 (2011), 239–262.
57. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
58. L. Chesnel, S.A. Nazarov, J. Taskinen, *Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography.* — Asymptotic Analysis **118**, No. 1,2 (2020), 81–122.

Nazarov S. A. Asymptotic analysis of the spectrum of a quantum waveguide with a wide Neumann “window” in the light of mechanics of cracks.

Various asymptotic expansions are derived for eigenvalues in the discrete spectrum of the boundary-value problem for the Laplace operator in the unit strip with the Dirichlet condition on its lateral sides everywhere with exception of an interval with length $2\ell > 0$ where the Neumann condition is imposed (a planar quantum waveguide with the “window”).

Since the total multiplicity of the discrete spectrum grows indefinitely as $\ell \to +\infty$, there exists a sequence of the critical lengths $\{\ell_m^*\}$, for which the problem operator enjoys the threshold resonance. This phenomenon is characterized by the existence of a nontrivial bounded solution, that is, either trapped, or almost standing wave, and provides miscellaneous near-threshold spectral anomalies. The quality of the threshold resonances is examined and asymptotic formulas for the values ℓ_m^* are obtained for large numbers m. The analysis is systematically performed by means of methods from fracture mechanics.

Институт проблем машиноведения РАН
В. О. Большой пр. 61, 199178
С-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 20 октября 2022 г.