

М. А. Лялинов, Н. С. Федоров

**СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ СУЩЕСТВЕННОГО
СПЕКТРА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В УГЛЕ С
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ РОБЕНА–НЕЙМАНА**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является явное построение собственных функций отрицательной части существенного спектра оператора Лапласа в угле с граничными условия Робена и Неймана на его сторонах. Используемая для построения собственных функций дискретного спектра в [5] техника Зоммерфельда–Малюжинца адаптирована для случая существенного спектра. Получено интегральное представление собственных функций существенного спектра, в отличие от дискретного, собственные функции существенного спектра выражаются через элементарные функции лишь для некоторых рациональных углов раствора.

С физической точки зрения рассматриваемая задача может быть интерпретирована как задача о малых колебаниях жидкости вблизи наклонного берега (см. [3]). Полученные решения вдали от вершины угла (берега водоема) ограничены на поверхности жидкости и экспоненциально убывают при отдалении от нее, что позволяет интерпретировать их как поверхностные волны, бегущие к вершине, либо от нее.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем называть клином с раствором Φ область

$$\Omega = \{(r, \phi) : 0 < \phi < \Phi, r > 0\},$$

где (r, ϕ) – полярные координаты точки на плоскости, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Обозначим границы клина через $l_0 = \{(r, 0) : r \geq 0\}$ и $l_\Phi = \{(r, \Phi) : r \geq 0\}$, l_0 будем называть нижней границей, а l_Φ верхней.

Ключевые слова: собственные функции, существенный спектр, техника Зоммерфельда–Малюжинца, функционально-разностные уравнения.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, РНФ 22-11-00070.

Исследуется отрицательный спектр оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , с граничным условием Неймана на нижней границе l_0 и граничным условием Робена (импедансным краевым условием) на верхней границе l_Φ

$$\begin{cases} -\Delta u(r, \phi) = -k^2 u(r, \phi) \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \nu u \Big|_{l_\Phi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{l_0} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$ – производная по нормали, направленная во внешность области Ω , k – положительный параметр.

В гидродинамической интерпретации задачи функция u описывает потенциал течения идеальной несжимаемой жидкости, l_Φ соответствует свободной поверхности водоема, а l_0 его дну. Граничное условие $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{l_0} = 0$ отражает тот факт, что жидкость может течь только параллельно дну, а $\frac{\partial u}{\partial n} - \nu u \Big|_{l_\Phi} = 0$ показывает, что при подъеме уровня жидкости затрачивается энергия на работу против силы тяжести (см. раздел 5.1 в [3]).

Задаче (1) отвечает самосопряженный оператор A_ν , определенный своей полуторалинейной формой

$$(A_\nu u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx dy - \nu \int_{l_\Phi} u \bar{v} ds.$$

Аналогичный данному оператор был построен и исследован в [4]. В частности в [4] были получены асимптотики собственных значений дискретного спектра и было доказано, что существенный спектр $\sigma_e = [-\nu^2, +\infty)$ не зависит от угла раствора клина Φ . Дискретный спектр практически полностью изучен. При $\Phi \geq \pi/2$ он пуст, а при $\pi/2 < \Phi < 0$ конечен, подробнее см. в [1, 5] и [6].

§3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗОММЕРФЕЛЬДА И УРАВНЕНИЯ МАЛЮЖИНЦА

Интегральным представлением Зоммерфельда называют интеграл вида

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{kr \cos \alpha} f(\alpha + \phi) d\alpha, \quad (2)$$

где $k > 0$, $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, Γ_+ и Γ_- симметричны относительно нуля (см. рис 1), $\Gamma_+ = (i\infty + \pi, id + \pi) \cup (id + \pi, id - \pi) \cup (i\infty - \pi, id - \pi)$, $d > 0$, предполагается, что функция f мероморфна и расстояние от ее полюсов до вещественной оси меньше $d > 0$. Функцию $f(z)$ называют

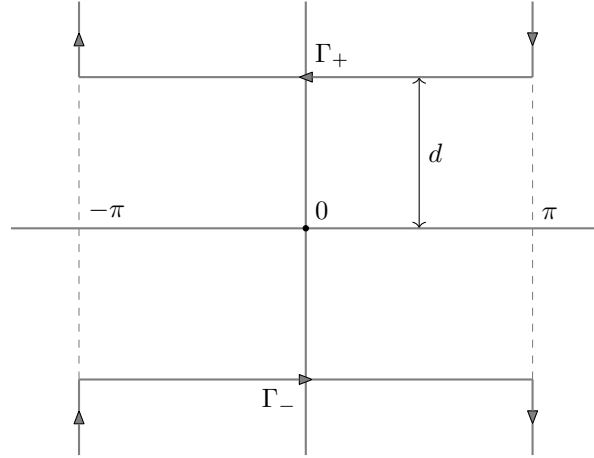


Рис. 1. Контуры Γ_+ и Γ_- .

трансформантой Зоммерфельда. Достаточным условием сходимости интеграла (2) при $kr > 0$ является оценка $|f(\alpha)| < Ce^{b|\operatorname{Im} \alpha|}$ на контуре Γ для некоторого $b > 0$ при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \infty$.

Подробно изложенная в [2] техника Зоммерфельда-Малюжинца основана на том факте, что сходящийся интеграл Зоммерфельда дает решение уравнения $(\Delta - k^2)u = 0$ для любой мероморфной трансформанты f . Остается подобрать такую трансформанту f , для которой интеграл Зоммерфельда будет удовлетворять граничным условиям, но не будет иметь роста при $kr \rightarrow \infty$. Следующая лемма описывает достаточные требования, при которых интеграл Зоммерфельда дает решение задачи (1).

Лемма 1. Пусть мероморфная функция f имеет полюса только в полосе $|\operatorname{Im} \alpha| < d$ для некоторого положительного d . И пусть интеграл Зоммерфельда (2) сходится. Тогда заданная им функция $u(r, \phi)$ является решением задачи (1), если f удовлетворяет следующим функционально-разностным уравнениям

$$\begin{cases} [k \sin \alpha - \nu]f(\alpha + \Phi) - [-k \sin \alpha - \nu]f(-\alpha + \Phi) = 0 \\ f(\alpha) + f(-\alpha) = 0 \end{cases} .$$

Функциональные уравнения из предыдущей леммы удобно разделить на k и переписать в более симметричном виде

$$\begin{cases} [\sin \alpha - \Lambda]f(\alpha + \Phi) - [-\sin \alpha - \Lambda]f(-\alpha + \Phi) = 0 \\ [\sin \alpha + \Lambda]f(\alpha - \Phi) - [-\sin \alpha + \Lambda]f(-\alpha - \Phi) = 0 \end{cases} , \quad (3)$$

где $\Lambda = \frac{\nu}{k} > 1$, второе уравнение следует из первого в силу нечетности $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

Уравнения (3) являются уравнениями Малюжинца. Общая теория таких уравнения подробно описана в цикле статей [9], более частный случай коэффициентов в виде тригонометрических многочленов, к которому относятся уравнения (3), описан в [2].

§4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАЛЮЖИНЦА

Общая схема нахождения трансформанты Малюжинца для функций непрерывного спектра такова. Среди решений уравнений Малюжинца найдем ограниченное при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$, будет доказано, что него интеграл Зоммерфельда сходится, в том числе, и при $kr = 0$.

4.1. Выбор подходящего решения уравнений Малюжинца.

Обозначим через Σ множество мероморфных решений следующей системы функциональных уравнений относительно неизвестной функции σ

$$\begin{cases} \sigma(\alpha + \Phi) - \sigma(-\alpha + \Phi) = 0 \\ \sigma(\alpha - \Phi) - \sigma(-\alpha - \Phi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(\alpha + \Phi) = \sigma(-\alpha + \Phi) \\ \sigma(\alpha - \Phi) = \sigma(-\alpha - \Phi). \end{cases} \quad (4)$$

В [9] отмечено, что Σ является полем относительно поточечного умножения. Кроме этого, Σ является также левым идеалом в кольце мероморфных функций относительно композиции. Действительно, пусть уравнения (4) были выполнены для некоторой функции $\sigma \in \Sigma$, применим к правой и левой части некоторую мероморфную функцию h . Уравнения не нарушатся, композиция $h \circ \sigma$ мероморфных функций мероморфна. Целым частным решением уравнений (4) является $\sin(\mu \cdot) \in \Sigma$, где $\mu = \frac{\pi}{2\Phi}$.

В [9] также показано, что общее мероморфное решение уравнений Малюжинца можно представить в виде произведения $f(\alpha) = \sigma(\alpha)f_0(\alpha)$

некоторого частного решения f_0 решения системы (3) и $\sigma \in \Sigma$. При рассмотрении дискретного спектра в [5] было выбрано и f_0 в виде произведения четырех функций Малюжинца Ψ_Φ и $\sigma(\alpha) = 1/\sin(\alpha\mu)$,

$$\begin{aligned} f_0(\alpha) &= \psi_\Phi^{-4}(\Phi)\psi_\Phi(\alpha + \Phi + \pi/2 + \tau)\psi_\Phi(\alpha + \Phi - \pi/2 - \tau) \\ &\quad \psi_\Phi(\alpha - \Phi + \pi/2 + \tau)\psi_\Phi(\alpha - \Phi - \pi/2 - \tau) \\ &= \psi_{\Phi/2}(\alpha + \pi/2 + \tau)\psi_{\Phi/2}(\alpha - \pi/2 - \tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tau \in \mathbb{C} : \sin \tau = \Lambda$, а функция Малюжинца Ψ_Φ – мероморфное решение уравнения Малюжинца,

$$\frac{\Psi_\Phi(\alpha + 2\Phi)}{\Psi_\Phi(\alpha - 2\Phi)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

которое четно в полосе $|\operatorname{Re} \alpha| < 2\Phi + \frac{\pi}{2}$,

$$\Psi_\Phi(\alpha) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(\alpha t) - 1}{t \operatorname{ch}(\pi t/2) \operatorname{sh}(2\Phi t)} dt$$

и имеет асимптотику $\Psi_\Phi(\alpha) = O(\exp(\mp i \frac{\pi \alpha}{8\Phi}))$ при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm\infty$.

В случае непрерывного спектра функция f_0 будет по-прежнему являться частным решением (3), но придется взять другую мероморфную функцию σ . Подберем такую σ , что функция $f(\alpha) = f_0(\alpha)\sigma(\alpha)$ удовлетворяла трем условиям.

- (1) Функция $f(\alpha) = -f(-\alpha)$ нечетна.
- (2) $f(\alpha) = O(1)$, $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \infty$
- (3) Функция $u(r, \phi)$ ограничена при $kr \rightarrow \infty$

Так как функция Малюжинца Ψ_Φ четна, то и функция f_0 четна. Первое условие равносильно нечетности функции σ .

Второе условие можно переписать в виде оценки на асимптотику $\sigma(\alpha)$ при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm\infty$. Асимптотика функции f_0 получается из известной асимптотики функции Малюжинца Ψ_Φ

$$f_0(\alpha) = O(e^{\mp i \frac{\pi \alpha}{8\Phi}}) = O(e^{\mp i \mu \alpha}), \quad \operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm\infty.$$

Таким образом, функция σ должна иметь убывание не медленнее $O(e^{\mp i \mu \alpha})$, при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm\infty$.

Как будет показано в разделе 5, полюсам трансформанты f соответствуют слагаемые в асимптотике $u(r, \phi)$ при $kr \rightarrow \infty$. Если трансформанта f имеет полюс в точке α_0 , $-\pi/2 - \Phi \leq \operatorname{Re} \alpha_0 \leq \pi/2 + \Phi$,

то u имеет в асимптотике слагаемое порядка $e^{kr \cos(\alpha_0 - \phi)}$. Чтобы избежать роста u при $kr \rightarrow \infty$ потребуем голоморфности $f(\alpha)$ в полосе $\Pi(-\pi/2 - \Phi, \pi/2 + \Phi) = \{\alpha \in \mathbb{C} : -\pi/2 - \Phi < \operatorname{Re} \alpha < \pi/2 + \Phi\}$ ¹.

Теперь можно сформулировать условия на функцию $\sigma \in \Sigma$.

- (1) Функция $\sigma(\alpha) = -\sigma(-\alpha)$ нечетна.
- (2) Справедлива оценка $|\sigma(\alpha)| \leq \operatorname{const} |\exp(\pm i\mu\alpha)|$ при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm i\infty$.
- (3) Функция f голоморфна в полосе $\Pi(0, \pi/2 + \Phi)$, что в силу нечетности f равносильное ее голоморфности в полосе $\Pi(-\pi/2 - \Phi, \pi/2 + \Phi)$.

Полюса функции f формируются из полюсов ее двух сомножителей f_0 и σ . Начнем с рассмотрения функции f_0 , которая является произведением двух функций Малюжинца. Функция Малюжинца $\Psi_{\Phi/2}$ имеет нули в точках

$$\alpha_{jm}^{\pm} = \pm(\pi/2(4j - 3) + \Phi(2m - 1))$$

и полюса в точках

$$\beta_{jm}^{\pm} = \pm(\pi/2(4j - 1) + \Phi(2m - 1)),$$

где $j, m \in \mathbb{N}$ натуральные (см. [2]). Тогда определенная выражением (5) функция f_0 имеет нули в точках $\alpha_{jm}^{\pm} \pm \pi/2 \pm \tau$ и $\alpha_{jm}^{\pm} \mp \pi/2 \mp \tau$, а полюса в точках $\beta_{jm}^{\pm} \pm \pi/2 \pm \tau$ и $\beta_{jm}^{\pm} \mp \pi/2 \mp \tau$. До сих пор τ было определено неоднозначно $\sin \tau = \Lambda > 0$, выберем его равным $\tau = \pi/2 - i \ln(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 1})$, где логарифм $h = \ln(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 1}) \in \mathbb{R}$ вещественен, многозначность корня пока фиксировать не будем. С помощью $h = \operatorname{arcsch} \Lambda$ следующим образом выражаются нули

$$\begin{cases} \alpha_{jm}^{\pm} \pm \frac{\pi}{2} \pm \tau = \pm(\frac{\pi}{2}(4j - 1) + \Phi(2m - 1) - ih) \\ \alpha_{jm}^{\pm} \mp \frac{\pi}{2} \mp \tau = \pm(\frac{\pi}{2}(4j - 5) + \Phi(2m - 1) + ih) \end{cases}$$

и полюса

$$\begin{cases} \pm\phi'_{jm} = \beta_{jm}^{\pm} \pm \frac{\pi}{2} \pm \tau = \pm(\frac{\pi}{2}(4j + 1) + \Phi(2m - 1) - ih) \\ \pm\phi_{jm} = \beta_{jm}^{\pm} \mp \frac{\pi}{2} \mp \tau = \pm(\frac{\pi}{2}(4j - 3) + \Phi(2m - 1) + ih) \end{cases} \quad (6)$$

функции f_0 . Из явного выражения полюсов функции f_0 видно, что ветвь многозначной функции $\tau(\Lambda)$ выбрана так, что в полосе $\Pi(-\pi/2 - \Phi, \pi/2 + \Phi)$ попадает минимальное количество полюсов, в ее замыкании

¹Здесь и далее чрез $\Pi(a, b)$ будем обозначать вертикальную полосу $\{\alpha \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} \alpha < b\}$

лежат только два полюса $\pm\alpha_{11} \mp \pi/2 \mp \tau = \pm(\pi/2 + \Phi + ih)$ (см. рис. 2).

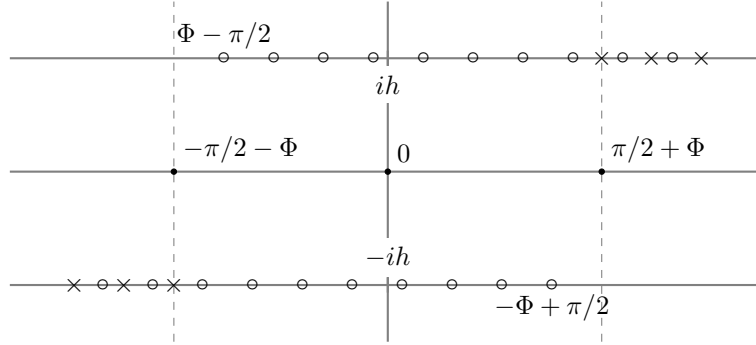


Рис. 2. \circ – нули функции f_0 , \times – ее полюса.

Для того, чтобы компенсировать рост функции f_0 подберем функцию $\sigma(\alpha)$, достаточно быстро убывающую при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$. Рассмотрим рациональную функцию $R(z) = \frac{2z}{z^2 - \sin^2 \mu \alpha_0}$, где $\alpha_0 = \pi/2 - \Phi + ih$, и функцию σ , равную композиции этой функции R и $\sin(\mu \cdot)$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) = R(\sin(\mu\alpha)) &= \frac{2 \sin \mu\alpha}{\sin^2 \mu\alpha - \sin^2 \mu\alpha_0} \\ &= \frac{1}{\sin \mu\alpha + \sin \mu\alpha_0} - \frac{1}{\sin \mu\alpha - \sin \mu\alpha_0} \quad (7) \end{aligned}$$

Проверим, что такая функция σ нам подходит.

- (0) Функция σ лежит в классе Σ , так как является композицией рациональной функции R и $\sin(\mu \cdot) \in \Sigma$.
- (1) Функция σ нечетна, так как является композицией двух нечетных функций R и $\sin(\mu \cdot)$.
- (2) Рациональная функция убывает $R(z) = O(z^{-1})$ на бесконечности $|z| \rightarrow \infty$, значит $|\sigma(\alpha)| = |R(\sin \mu\alpha)| = O(|\sin^{-1}(\mu\alpha)|) = O(|\exp(\pm i\mu\alpha)|)$ при $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm i\infty$, то есть σ удовлетворяет второму условию.
- (3) Функция σ имеет полюса внутри полосы $\Pi(-\pi/2 - \Phi, \pi/2 + \Phi)$ лишь в тех точках, где f_0 имеет нули. Сама же f_0 полюсов во внутренности полосы $\Pi(-\pi/2 - \Phi, \pi/2 + \Phi)$ не имеет вовсе.

4.2. Сходимость интеграла Зоммерфельда и его поведение вблизи вершины клина. Сходимость (2) при $kr > 0$ является абсолютной, функция f имеет конечные пределы при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$, а $e^{kr \cos \alpha}$ убывает сверхэкспоненциально. Покажем, что при $kr = 0$ имеет место сходимость в смысле главного значения, построим асимптотику $u(r, \phi)$ при $kr \rightarrow 0$.

Лемма 2. *Интеграл (2) сходится в смысле главного значения при $kr = 0$ и имеет асимптотику*

$$u(r, \phi) = O\left(\frac{(kr)^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}\right), \quad kr \rightarrow 0,$$

где $\mu = \frac{\pi}{2\Phi}$.

Доказательство. При $kr \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл (2) дают участки контура Γ расположенные далеко от вещественной оси. Функция $f(\alpha)$ нечетна и имеет конечные пределы при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$, оказывается, что она может быть представлена в виде линейной комбинации экспоненциально убывающей при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$ функции и $\text{sign}(\text{Im } \alpha)$. Конечный предел при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$ функция $f(\alpha)$ имеет по построению, покажем что стремление к нему происходит экспоненциальным образом. В [10] приведена следующая асимптотическая формула для функции Малюжинца:

$$\Psi_\Phi(\alpha) = \exp\left(\frac{B}{4\Phi} \ln \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2B}\right) + I_0 + I_1(\alpha)\right),$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\text{ch}(\zeta\pi/2) \text{sh}(2\Phi\zeta)} - \frac{B}{2\Phi \text{sh}(B\zeta)} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \text{const},$$

$$I_1(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m} \left(\frac{e^{im\pi/(2\Phi) \text{sign}(\text{Im } \alpha)\alpha}}{\cos(\pi^2 m/4\Phi)} + \frac{e^{i(2m-1) \text{sign}(\text{Im } \alpha)\alpha}}{(1 - 1/(2m)) \sin(2\Phi(2m-1))} \right) \\ = O(e^{i\mu \text{sign}(\text{Im } \alpha)\alpha}),$$

где $B = \pi/2 + 2\Phi$. Видно, что сама функция Малюжинца стремится к асимптотике $\text{const} \cdot \exp\left(\mp i \frac{\pi\alpha}{8\Phi}\right)$ экспоненциальным образом равномерно по $\text{Re } \alpha$. Действительно, I_0 константа, в $I_1(\alpha)$ вещественная часть α влияет только на фазу главного члена асимптотики, но не на его модуль, а $\cos(\frac{\pi\alpha}{2B})$ равномерно по $\text{Re } \alpha$ ограничен в силу непрерывности

и периодичности по $\operatorname{Re} \alpha$. Запишем асимптотику нечетной функции f для определенности при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sigma(\alpha) \Psi_{\Phi/2}(\alpha + \pi/2 + \tau) \Psi_{\Phi/2}(\alpha - \pi/2 - \tau) \\ &= R(\sin(\mu\alpha)) e^{-i\mu\alpha} (\operatorname{const} + O(e^{2i\mu\alpha})). \end{aligned}$$

Произведение $R(\sin(\mu\alpha)) e^{i\mu\alpha}$ является рациональной функцией $e^{-i\mu\alpha}$, степени числителя и знаменателя которой совпадают, а значит в ее разложении на простейшие будет отсутствовать положительные степени $e^{-i\mu\alpha}$. Обозначив через A предел функции f при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow +\infty$, получаем

$$f(\alpha) = A + O(e^{i\mu\alpha}), \quad \operatorname{Im} \alpha \rightarrow +\infty, \quad |\operatorname{Re} \alpha| < \operatorname{const}.$$

Нечетность f позволяет распространить равенство и на случай отрицательных мнимых частей α

$$f(\alpha) - A \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \alpha) = O(e^{i\mu \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \alpha) \alpha}), \quad \operatorname{Im} \alpha \rightarrow \infty, \quad |\operatorname{Re} \alpha| < \operatorname{const}.$$

Контур Γ симметричен относительно нуля, тогда имеем

$$u(r, \phi) = -2iA (I_0(kr) + O(I_\mu(kr))), \quad kr \rightarrow 0.$$

Асимптотика вычислена при помощи интегрального представления модифицированной функции Бесселя первого рода

$$I_\mu(z) = e^{-\frac{\pi}{2}i\mu} J_\mu(iz), \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} I_\mu(kr) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} e^{kr \cos \alpha + i\alpha\mu} d\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\mu + k + 1)} \left(\frac{kr}{2}\right)^{\mu+2k} \\ &= O\left(\frac{(kr)^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}\right) \end{aligned}$$

при $|\arg kr| \leq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} \mu > 0$. \square

§5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ВДАЛИ ОТ ВЕРШИНЫ УГЛА

Для построения асимптотики функции u для больших расстояний от вершины клина $kr \rightarrow \infty$ воспользуемся методом перевала. Так как в показателе экспоненты стоит косинус, перевальными точками являются πm , где $m \in \mathbb{Z}$ целое число. Контур Γ можно деформировать (см. рис. 3) в контур наискорейшего спуска $\Gamma_{+\pi} \cup \Gamma_{-\pi}$, проходящий через перевальные точки π и $-\pi$, где $\Gamma_{\pm\pi} = i\mathbb{R} \pm \pi$. В процессе деформации будут захвачены полюса функции f серии $\pm\phi_m =$

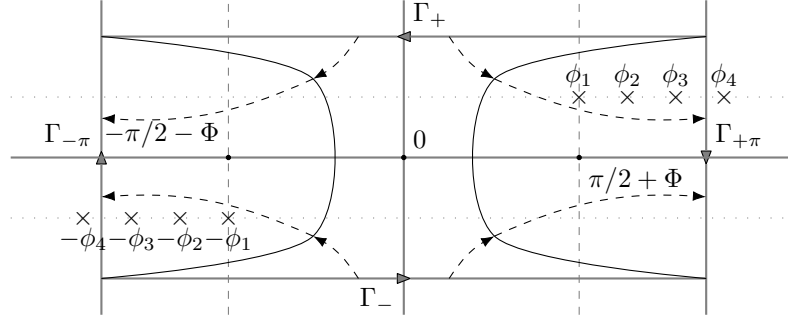


Рис. 3. Преобразование контуров Γ_{\pm} в контуры наибыстрейшего спуска $\Gamma_{\pm\pi} = i\mathbb{R} \pm \pi$. Пунктирными стрелками показано направление деформации контуров, а символом \times полюса функции f серии $\pm\phi_m$, первые $n_{\pm}(\phi)$ из которых будут захвачены в ходе трансформации.

$$\pm(\frac{\pi}{2}(4j-3) + \Phi(2m-1) + ih)|_{j=1} = \pm(\frac{\pi}{2} + \Phi(2m-1) + ih).$$

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+} f(\alpha + \phi) e^{kr \cos \alpha} d\alpha \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma_{-\pi} \cup \Gamma_{\pi}} f(\alpha + \phi) e^{kr \cos \alpha} d\alpha}_I \\ &+ \underbrace{\sum_{m=1}^{n_+(\phi)} \operatorname{res}_{+\phi_m - \phi} f(\alpha + \phi) e^{kr \cos \alpha} + \sum_{m=1}^{n_-(\phi)} \operatorname{res}_{-\phi_m - \phi} f(\alpha + \phi) e^{kr \cos \alpha}}_R, \quad (8) \end{aligned}$$

где $n_+(\phi)$ и $n_-(\phi)$ номера полюсов $\pm\phi_m$ наиболее удаленных от мнимой оси таких, что $-\pi \leq \operatorname{Re} \pm\phi_m - \phi \leq \pi$, то есть $\operatorname{Re} \phi_{n_+(\phi)} = \max\{\phi_m : \operatorname{Re} \phi_m + \phi \leq +\pi\}$, $\operatorname{Re} \phi_{n_-(\phi)} = \min\{\phi_m : \operatorname{Re} \phi_m + \phi \geq -\pi\}$. Если полюс попадает на контур $\Gamma_{\pm\pi}$, то интеграл I понимается в смысле главного значения, а в сумму R соответствующий вычет входит с коэффициентом $1/2$.

Будем преобразовывать выражение (8) последовательно, сначала найдем асимптотику интеграла I методом перевала, а потом упростим

суммы вычетов R ,

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2\pi}{kr(-\cos(+\pi))}} e^{kr \cos(+\pi)} \left(f(+\pi + \phi) + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2\pi}{kr(-\cos(-\pi))}} e^{kr \cos(-\pi)} \left(f(-\pi + \phi) + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{-kr} \left(f(-\pi + \phi) + f(+\pi + \phi) + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right). \end{aligned}$$

Видно, что вклад от слагаемого I затухает экспоненциально, а точнее как $O(e^{-kr}/\sqrt{kr})$. Обозначим теперь через $\pm C_m = \operatorname{res}_{\pm\phi_m} f = \pm \operatorname{res}_{\phi_m} f$ вычеты функции f и упростим суммы вычетов R .

$$\begin{aligned} R &= \sum_{m=1}^{n_+} C_m e^{kr \cos(+\phi_m - \phi)} - \sum_{m=1}^{n_-} C_m e^{kr \cos(-\phi_m - \phi)} \\ &= \sum_{m=1}^{n_+} C_m e^{kr \cos(\pi/2 + \Phi(2m-1) + ih - \phi)} - \sum_{m=1}^{n_-} C_m e^{kr \cos(\pi/2 + \Phi(2m-1) + ih + \phi)} \\ &= \sum_{m=1}^{n_+} C_m e^{-kr \sin(\Phi(2m-1) + ih - \phi)} - \sum_{m=1}^{n_-} C_m e^{-kr \sin(\Phi(2m-1) + ih + \phi)} \end{aligned}$$

Пределы суммирования подобраны так, что вещественная часть аргумента синуса $\Phi(2m-1) \pm \phi$ лежит на отрезке $[0, \pi/2]$, причем ноль достигается только при $\phi = \Phi, m = 1$ в первой сумме. То есть асимптотика состоит из некоторого количества затухающих при $r \rightarrow \infty$ волн и одной поверхностной волны $\exp(-kr \sin(\Phi - \phi + ih))$, амплитуда которой ограничена вдоль l_Φ . Найдем ее волновое число $k_s(\phi)$

$$\begin{aligned} ik_s(\phi) &= -k \sin(\Phi - \phi + ih) = k \cos(\tau + \Phi - \phi) \\ &= ik \sqrt{\Lambda^2 - 1} \cos(\Phi - \phi) - k\Lambda \sin(\Phi - \phi). \end{aligned}$$

При $\phi = \Phi$ убывания старшей экспоненты при $kr \rightarrow \infty$ нет, так как $k_s(\Phi) = k\sqrt{\Lambda^2 - 1} = \sqrt{\nu^2/4 - k^2}$ чисто вещественное.

Для описания m -го члена асимптотики введем семейство декартовых координат (x_m^\pm, y_m^\pm) повернутых на угол $\pm\Phi(2m-1)$.

$$\begin{pmatrix} x_m^\pm \\ y_m^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi(2m-1)) & \pm \sin(\Phi(2m-1)) \\ \mp \sin(\Phi(2m-1)) & \cos(\Phi(2m-1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

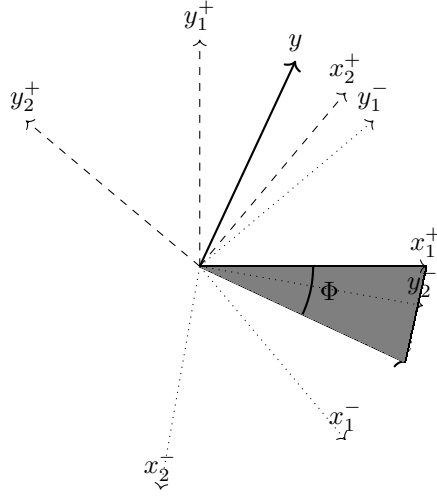


Рис. 4. Семейства повернутых систем координат (x_m^\pm, y_m^\pm) , серым закрашена область Ω .

где $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

В новых координатах легко увидеть, что m -е слагаемое в суммах, входящих в R , представляет из себя бегущую вдоль x_m^\pm волну, амплитуда которой экспоненциально зависит от y_m^\pm . В области Ω это означает экспоненциальное убывание, так как $y_m^\pm < 0$ при $m < n_\pm$ для всех точек из Ω . В координатах (x_m^\pm, y_m^\pm) показатель экспоненты и старшие члены асимптотики R имеют вид

$$\begin{aligned} & r \cos(\pi/2 + ih + \Phi(2m - 1) \pm \phi) \\ &= i\sqrt{\Lambda^2 - 1}r \cos(\phi \mp \Phi(2m - 1)) \pm \Lambda r \sin(\phi \mp \Phi(2m - 1)) \\ &= i\sqrt{\Lambda^2 - 1}x_m^\mp \pm y_m^\mp, \end{aligned}$$

$$R = \sum_{m=1}^{n_+} C_m e^{ik\sqrt{\Lambda^2-1}x_m^+ + \Lambda ky_m^+} - \sum_{m=1}^{n_-} C_m e^{ik\sqrt{\Lambda^2-1}x_m^- - \Lambda ky_m^-}.$$

Новые координаты позволяют дать новую интерпретацию пределам суммирования n_\pm . В семейство систем координат (x_m^+, y_m^+) нужно добавлять новые элементы со все большими m до тех пор, пока ось x_m^+ лежит между осями (x, y) , а в семейство (x_m^-, y_m^-) до тех пор, пока

y_m лежит между осями (x, y) . Эти условия обеспечивают отсутствие роста амплитуды волн соответствующих слагаемым асимптотического разложения.

Коэффициенты C_m как вычеты функции f , удовлетворяющей уравнениям Малюжинца (3), связаны рекуррентным соотношением

$$C_{m+1} = \frac{\sin(\phi_m + \Phi) + \Lambda}{\sin(\phi_m + \Phi) - \Lambda} C_m = \frac{\sin(\tau - \Phi(2m - 1)) + \Lambda}{\sin(\tau - \Phi(2m - 1)) - \Lambda} C_m,$$

которое приводит альтернативному выражению для коэффициентов C_m

$$C_m = \prod_{l=1}^{m-1} \frac{\sin(\tau - (2l - 1)\Phi) + \Lambda}{\sin(\tau - (2l - 1)\Phi) - \Lambda} C_1.$$

Можно интерпретировать m -ое слагаемое асимптотики как m раз отраженную поверхностную волну, множитель C_m отвечает за ее амплитуду. Полученный вид рекуррентного соотношения естественен. Волна ослабевает при отражении, ее амплитуда каждый раз умножается на коэффициент отражения $\frac{\sin(\tau - (2l - 1)\Phi) + \Lambda}{\sin(\tau - (2l - 1)\Phi) - \Lambda}$.

Обсудим направление распространения полученной поверхностной волны. Выбор ветви корня $\sqrt{\Lambda^2 - 1}$ до сих пор не был фиксирован, мы не предполагали и не использовали его положительность или отрицательность. Обе ветви дадут решение задачи (1) и могут быть интерпретированы как убегающая от вершины клина и набегающая на нее волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Ursell, *Edge Waves on a Sloping Beach*. — Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **214**, No. 1116 (1952), 79–97.
2. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory: The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*. Alpha Science International (2008).
3. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves: A Mathematical Approach*. (2002).
4. M. Khalile, K. Pankrashkin, *Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors*. — Mathematische Nachrichten **291**, No. 5–6 (2018), 928–965.
5. М. А. Лялинов, *Комментарий о собственных функциях и собственных числах оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робэна*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **483** (2019) 116–127.
6. М. А. Лялинов, *Собственные функции отрицательного спектра оператора Шрёдингера в полуплоскости с сингулярным потенциалом на луче и с условием Неймана на границе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 232–258.

7. B. A. Packham, *A note on generalized edge waves on a sloping beach*. — The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **42**, No. 3 (1989), 441–446.
8. M. A. Lyalinov, *Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations*. — Euro. J. Appl Math. **33** (2021) 538–559.
9. А. А. Тужилин, *Теория функциональных уравнений Малюжинца. I. Однородные функциональные уравнения, общие свойства решений, частные случаи*. — Дифференц. уравнения **6**, No. 4 (1970), 692–704.
10. А. В. Осипов, *Вычисление функции Малюжинца в комплексной области*. — Акустический ж. **36**, No. 1 (1990) 116–121.
11. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic Press (2007).

Lyalinov M. A., Fedorov N. S. Eigenfunctions of the essential spectrum of the Laplace operator in an angle with the Robin–Neumann boundary conditions.

This work studies eigenfunction problem of the Laplace operator in the angular domain with the Robin-type boundary condition on the upper side of the angle and the Neumann-type boundary condition on the bottom side of the angle. From the physical point of view, such eigenfunctions describe waves over sloping beach. Negative values of the spectral parameter were considered. We obtained the eigenfunction of the essential spectrum and studied a special case of eigenfunction, which are elementary functions. The Sommerfeld integral representation of an eigenfunction of the negative part of the essential spectrum of the Laplace operator was obtained. Moreover, we calculated it's asymptotic far away from the angle's vertex. It is bounded on the top side of the angle and vanishes exponentially in the angle's interior with its bottom side. So, the eigenfunction of essential spectrum behaves like a surface wave.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 1 ноября 2022 г.