Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

А. Лунев, М. Маламуд

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ДИРАКА

§1. Введение

В настоящей статье мы продолжаем наше исследование [15, 16] спектральных свойств несамосопряженных граничных задач для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка:

$$y' + Q(x)y = i\lambda B(x)y, \qquad y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_n), \qquad x \in [0, \ell]. \tag{1.1}$$

Отправляясь от матриц $C, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющих условию максимальности ранга матрицы $(C\ D)$, присоединим к системе (1.1) граничные условия

$$U(y) := Cy(0) + Dy(\ell) = 0, \quad \text{где} \quad \mathrm{rank}(C\ D) = n. \tag{1.2}$$

Здесь, в (1.1), B – самосопряженная диагональная суммируемая матрица-функция,

$$B = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = B^*, \quad \beta_k = \overline{\beta_k} \in L^1[0, \ell], \ \ k \in \{1, \dots, n\}, \tag{1.3}$$

а Q – произвольная суммируемая потенциальная матрица,

$$Q = (Q_{jk})_{j,k=1}^n, \qquad Q_{jk} \in L^1[0, \ell], \qquad j, k \in \{1, \dots, n\}. \tag{1.4}$$

Системы (1.1) представляют значительный интерес в некоторых теоретических и прикладных вопросах. Например, при

$$n = 2m, \qquad B(\cdot) = \mathrm{diag}(-I_m, I_m), \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

система (1.1) эквивалентна системе Дирака (см. [12], [24, раздел 1.2]). Отметим также, что уравнение (1.1) с произвольной (не обязательно самосопряженной) постоянной матрицей $B(\cdot) = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) \in$

Ключевые слова: Системы обыкновенных дифференциальных уравнения, регулярные граничные условия, функции типа синуса, асимптотика собственных значений.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение 075-15-2021-602.

$\mathbb{C}^{n\times n}$ естественно возникает при интегрировании методом Лакса задачи N волн, известной из нелинейной оптики [28, Глава III.4]. Изучение динамического генератора модели балки Тимошенко-Эренфеста сводится к исследованию граничной задачи (1.1)–(1.2) с 4×4-матрицей $B(\cdot)$ специального вида $B(x) = \mathrm{diag}(-\nu_1(x), \nu_1(x), -\nu_2(x), \nu_2(x))$ (см. [15, 16]).

Спектральная задача (1.1)–(1.2) впервые исследована Биркгофом и Лангером [2]. А именно, они распространили некоторые предыдущие результаты Биркгофа [1] и Тамаркина [34, 35] о несамосопряженной граничной задаче для ОДУ n-го порядка на случай граничной задачи (1.1)–(1.2): ими были введены понятия *регулярных и усиленно регулярных граничных условий* (1.2) и исследовано асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций задачи (1.1)–(1.2). Кроме того, они доказали *результат о поточечной сходимости* спектральных разложений для этой граничной задачи с регулярными граничными условиями.

Метод исследования граничной задачи (1.1)–(1.2) в [2] использует, так называемый, характеристический определитель этой задачи. Для его определения введем фундаментальное $n\times n$-матричное решение $\Phi_Q(\cdot,\lambda)$ уравнения (1.1), выделяемое условием $\Phi_Q(0,\lambda) = I_n$ при $\lambda\in\mathbb{C}$. При $Q\equiv 0$ фундаментальное решение принимает вид

$$\Phi_0(x,\lambda) = \mathrm{diag}\left(e^{i\lambda\rho_1(x)},\ldots,e^{i\lambda\rho_n(x)}\right), \quad \text{где} \quad \rho_k(x) := \int_0^x \beta_k(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Мостом между спектральной теорией задачи (1.1)–(1.2) и теорией целых функций является следующий классический факт: спектр $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ граничной задачи (1.1)–(1.2) совпадает с множеством нулей (с учетом кратности) *характеристического определителя*

$$\Delta_Q(\lambda) := \det(C + D\Phi_Q(\ell,\lambda)), \qquad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{1.7}$$

В нашей предыдущей работе [16] изучена задача (1.1)–(1.2) для 2×2-системы (1.1) при $B(\cdot)\equiv \mathrm{diag}(b_1,b_2) = \mathrm{const}$ и $b_1 < 0 < b_2$. При этом ключевую роль в этом исследовании играло следующее представление характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot)$:

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{b_1}^{b_2} g(u)e^{i\lambda u}\,du, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad \text{где} \quad g\in L^1[b_1,b_2]. \tag{1.8}$$

Здесь $\Delta_0(\cdot)$ – характеристический определитель, соответствующий "невозмущенной задаче" с $Q \equiv 0$. В [16] это представление использовалось нами для установления асимптотики спектра и свойства базисности Рисса системы корневых векторов. Одновременно и другим методом, не использующим формулы (1.8), эти результаты были получены А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [31] в случае $b_1 = -b_2$. Ранее свойство базисности Рисса исследовалось в ряде работ при различных ограничения на $Q(\cdot)$ и матрицы C, D, и также без использования представления (1.8). Отметим здесь лишь самые важные работы в этом направлении, – работы П. Джакова и Б. Митягина [4, 5], в которых свойство базисности Рисса получено для L^2-потенциальной матрицы $Q(\cdot)$ (см. также цитируемую в них литературу).

В последние годы представление (1.8) нашло ряд применений. Так, А. Макин [19, 20] применил его для решения следующей обратной задачи: целая функция является характеристическим определителем вырожденной граничной задачи ($\Delta_0(\cdot) \equiv 0$) для 2×2-системы Дирака в точности тогда, когда эта функция принадлежит классу Пэли-Винера. В работе [21] А. Макин использовал представление (1.8) для установления (при некоторых явных алгебраических предположениях на потенциальную матрицу) свойства базисности Рисса для любых регулярных (но не усиленно регулярных) граничных условий для 2×2-системы Дирака. В недавней работе авторов [18] это представление применено для установления липшицевой зависимости спектральных данных от потенциальной матрицы $Q \in L^p([0,\ell];\mathbb{C}^{2\times 2})$, $p \in [1,2]$ (см. также обзор [30] А. М. Савчука и И. В. Садовничей, в котором эта проблематика исследовалась в рамках другого подхода).

Переходя к $n \times n$-случаю, остановимся кратко на характеристическом определителе $\Delta_0(\cdot)$ "невозмущенной задачи" ($Q \equiv 0$). Из (1.6)–(1.7) легко вытекает, что

$$\Delta_0(\lambda) = \det\left(C + D\,\mathrm{diag}(e^{ib_1\lambda}, \ldots, e^{ib_n\lambda})\right), \quad \text{где} \quad b_k := \int_0^\ell \beta_k(x)\,dx. \tag{1.9}$$

Предположим для простоты, что числа $b_1, \ldots, b_n$ ненулевые и канонически упорядочены следующим образом:

$$b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_{n_-} < 0 < b_{n_-+1} \leqslant \ldots \leqslant b_n, \tag{1.10}$$

где $n_- \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Положим также

$$b_- := b_1 + \ldots + b_{n_-} \leqslant 0 \qquad \text{и} \qquad b_+ := b_{n_-+1} + \ldots + b_n \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Заметим, что $b_- := 0$, если $n_- = 0$, и $b_+ := 0$, если $n_- = n$. После этих приготовлений, легко вывести, что характеристический определитель $\Delta_0(\cdot)$ **из** (1.9) **является полиномом Дирихле** с индикаторной диаграммой, содержащейся в отрезке $[ib_-, ib_+]$ мнимой оси. А именно,

$$\Delta_0(\lambda) = \gamma_- \cdot e^{i\lambda b_-} + \gamma_+ \cdot e^{i\lambda b_+} + \gamma_2 \cdot e^{i\lambda\sigma_2} + \ldots + \gamma_{N-1} \cdot e^{i\lambda\sigma_{N-1}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.12}$$

где $b_- < \sigma_k < b_+$ (см. лемму 2.8 для деталей). Кроме того, индикаторная диаграмма определителя $\Delta_0(\cdot)$ совпадает с $[ib_-, ib_+]$ в точности тогда, когда $\gamma_- \cdot \gamma_+ \neq 0$. Этот факт мотивирует следующее определение: **граничные условия** (1.2) **называют регулярными**, если $\gamma_- \cdot \gamma_+ \neq 0$ (см. также определение 2.4).

В нашем препринте [17] для детерминанта $\Delta_Q(\cdot)$ произвольной граничной задачи (1.1)–(1.2) установлено представление, аналогичное (1.8), при следующих условиях: найдется $\theta \in (0, 1)$ такое, что

$$-\infty < -\theta^{-1} < \beta_1(x) \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n_-}(x) < -\theta < 0, \qquad x \in [0, \ell], \tag{1.13}$$

$$0 < \theta < \beta_{n_-+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant \beta_n(x) < \theta^{-1} < \infty, \qquad x \in [0, \ell], \tag{1.14}$$

и для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\beta_k \equiv \beta_{k+1} \quad \text{или} \quad \beta_k(x) + \theta < \beta_{k+1}(x), \quad x \in [0, \ell]. \tag{1.15}$$

Именно, предполагая условия (1.3)–(1.4), (1.13)–(1.15) выполненными, в [17] показано, что определитель $\Delta_Q(\cdot)$ допускает представление:

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{b_-}^{b_+} g(u) e^{i\lambda u}\, du, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad g \in L^1[b_-, b_+]. \tag{1.16}$$

Здесь числа $b_\pm$ определены равенствами (1.11).

Отправляясь от представления (1.16), в препринте [17] показано, что в случае регулярных граничных условий (1.2), $\Delta_Q(\cdot)$ является функцией типа синуса (см. определение 2.5) с индикаторной диаграммой $[ib_-, ib_+]$ и, – как следствие, с нулями, лежащими в горизонтальной полосе $\Pi_h := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant h\}$ с некоторым $h > 0$. В свою очередь, этот важный факт использован для установления точной асимптотики собственных значений граничной задачи (1.1)–(1.2) и свойства базисности Рисса для системы корневых векторов.

В этой статье мы обобщаем представление (1.16), ослабляя условия "упорядочения" (1.13)–(1.15). Это ведет к расширению отрезка интегрирования в правой части (1.16) и, как следствие, – к некоторым новым эффектам. Для их описания положим

$$\widetilde{b}_- := \min_{1\leqslant m<n} \int_0^\ell \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\}\, dx, \tag{1.17}$$

$$\widetilde{b}_+ := \max_{1\leqslant m<n} \int_0^\ell \max\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\}\, dx. \tag{1.18}$$

Теперь один из основных результатов нашей работы выглядит так (см. также теорему 4.2).

Теорема 1.1. *Пусть суммируемые матричные функции* $B(\cdot)$ *и* $Q(\cdot)$ *определены соотношениями* (1.3)–(1.4)*, и для п. в.* $x \in [0, \ell]$ *и любых* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *справедлива импликация:*

$$\beta_j(x) = \beta_k(x) \qquad \Longrightarrow \qquad Q_{jk}(x) = 0. \tag{1.19}$$

Тогда характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$ *допускает следующее представление:*

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u) e^{i\lambda u}\, du, \quad g \in L^1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.20}$$

в котором числа $\widetilde{b}_\pm$ *определены равенствами* (1.17)–(1.18).

Прокомментируем условие (1.19). Легко видеть, что оно эквивалентно такому:

$$\operatorname{supp} Q_{jk} \subset \operatorname{supp}(\beta_k - \beta_j), \qquad j, k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.21}$$

где вложение носителей понимается в смысле "почти всюду". В силу этой интерпретации в дальнейшем будем называть (1.19) условием "вложения носителей".

Сравнение представлений (1.20) и (1.16) порождает естественный вопрос об условиях справедливости вложения $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. В этом случае представление (1.20) совпадает с (1.16). Этот факт в случае регулярных граничных условий (1.2) гарантирует, что $\Delta_Q(\cdot)$ наследует от $\Delta_0(\cdot)$ свойство быть функцией типа синуса с индикаторной диаграммой $[ib_-, ib_+]$ (см. лемму 5.7). В частности, в этом случае нули $\Delta_Q(\cdot)$ также лежат в некоторой горизонтальной полосе Π_h.

В предложении 4.9 приводится явный критерий справедливости вложения $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. В частности, при $n = 4$ и $n_- = 2$ этот критерий выглядит следующим образом (см. пример 4.11):

$$\beta_{12}^-(x) \leqslant \beta_{34}^+(x), \quad x \in [0, \ell], \quad \text{и} \quad \int_0^\ell \beta_{12}^-(x)\,dx \leqslant 0 \leqslant \int_0^\ell \beta_{34}^+(x)\,dx, \tag{1.22}$$

где

$$\beta_{12}^-(\cdot) := \max\{\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot)\} \quad \text{и} \quad \beta_{34}^+(\cdot) := \min\{\beta_3(\cdot), \beta_4(\cdot)\}. \tag{1.23}$$

Мы также показываем в лемме 4.5, что вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$ всегда выполняется при следующем, так называемом, условии "фиксированного знака", играющем важную роль в приложениях:

$$\beta_k(\cdot) < 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_-, \qquad \beta_k(\cdot) > 0, \quad n_- < k \leqslant n. \tag{1.24}$$

Условие (1.24), однако, далеко от необходимого для справедливости вложения $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. Это очевидно из критерия (1.22) для $n = 4$ и $n_- = 2$.

Во всех описанных случаях, для которых выполнено вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$, из представления (1.20) вытекает следующая точная асимптотическая формула:

$$\lambda_m = \lambda_m^0 + o(1) \qquad \text{при} \qquad |m| \to \infty, \tag{1.25}$$

связывающая собственные значения $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ граничной задачи (1.1)–(1.2) *с регулярными граничными условиями* и собственными значениями $\{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}}$ невозмущенной граничной задачи (см. теорему 5.8).

Отметим, что для 2×2-уравнения Дирака формула (1.25) впервые получена независимо и различными методами в [14, 16] и [31]. Отметим также недавние работы А. Гомилко и L. Rzepnicki [7] и L. Rzepnicki [29], в которых уточняются асимптотические формулы отклонений $\lambda_m - \lambda_m^0$ для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на отрезке и задачи Дирихле для 2×2-системы Дирака, соответственно. Отметим еще, что при более ограничительных условиях на матрицу $B(\cdot)$ асимптотическая формула (1.25) была недавно анонсирована А.А. Шкаликовым в заметке [33], вышедшей одновременно с нашим препринтом [17].

Если вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$ не имеет места, ситуация коренным образом меняется. Именно, даже если граничные условия (1.2) регулярны, характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$, вообще говоря, уже не является функцией типа синуса, а мнимые части его нулей могут стать неограниченными. Однако мы показываем, что $\Delta_Q(\cdot)$ всегда является функцией класса A_b – класса целых функций не более чем экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси (см. предложение 5.5 и следствие 5.6). Разумеется, A_b является подклассом класса A (см. определения 5.1, 5.2 и теорему 5.4). В частности, нули $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ функции $\Delta_Q(\cdot)$ по прежнему "близки" к действительной оси. Именно, для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ все нули определителя $\Delta_Q(\cdot)$, кроме подпоследовательности нулевой плотности, лежат в секторах $|\arg z| < \varepsilon$ и $|\pi - \arg z| < \varepsilon$.

Предложение 6.2 более точно описывает типичную ситуацию, когда вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$ не выполнено. Предположим, что граничные условия (1.2) регулярны, а индикаторная диаграмма интегрального слагаемого в правой части (1.20) есть отрезок $[i\sigma_-, i\sigma_+]$, строго содержащий отрезок $[ib_-, ib_+]$, т. е. выполнены неравенства

$$\widetilde{b}_- \leqslant \sigma_- < b_- < b_+ < \sigma_+ \leqslant \widetilde{b}_+. \tag{1.26}$$

Мы показываем, что при этих предположениях последовательность нулей $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ определителя $\Delta_Q(\cdot)$ распадается на две ветви, $\Lambda = \Lambda_{\mathrm{good}} \cup \Lambda_{\mathrm{bad}}$, с совершенно разным поведением. А именно, "хорошая" ветвь $\Lambda_{\mathrm{good}} = \{\lambda'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ по-прежнему имеет асимптотику (1.25), в то время как, нули "плохой" ветви $\Lambda_{\mathrm{bad}} = \{\lambda''_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ имеют следующую ненулевую плотность:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{card}\{m \in \mathbb{Z} : |\lambda''_m| \leqslant r\}}{r} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\pi} - \frac{b_+ - b_-}{\pi} > 0, \tag{1.27}$$

а их мнимые части стремятся к бесконечности, в частности, в каждой горизонтальной полосе их число конечно.

Более того, мы доказываем, что мнимые части нулей определителя $\Delta_Q(\cdot)$ неограничены в точности тогда, когда носитель функции $g(\cdot)$ из представления (1.20) не содержится в отрезке $[b_-, b_+]$. Мы также демонстрируем эффект, описанный в (1.26)–(1.27), на конкретном 2×2-примере (см. следствие 6.5).

§2. Общие свойства систем типа Дирака

Напомним сначала важное представление фундаментального матричного решения уравнения (1.1), содержащее преобразование Фурье некоторого матричного ядра, полученного в [17]. С этой целью положим

$$\rho_k(x) := \int_0^x \beta_k(t)dt \qquad \text{и} \qquad b_k := \rho_k(\ell) \in \mathbb{R}, \qquad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.1)$$

и рассмотрим фундаментальные матрицы $\Phi(\cdot, \lambda)$ и $\Phi_0(\cdot, \lambda)$ как решения следующих матричных версий уравнения (1.1) со следующими начальными условиями при $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\Phi'(x, \lambda) = (i\lambda B(x) - Q(x))\Phi(x, \lambda), \qquad x \in [0, \ell], \qquad \Phi(0, \lambda) = I_n, \quad (2.2)$$

$$\Phi_0'(x, \lambda) = i\lambda B(x)\Phi_0(x, \lambda), \qquad x \in [0, \ell], \qquad \Phi_0(0, \lambda) = I_n. \quad (2.3)$$

Ясно, что

$$\Phi_0(x, \lambda) = \operatorname{diag}\bigl(e^{i\lambda\rho_1(x)}, \dots, e^{i\lambda\rho_n(x)}\bigr), \qquad x \in [0, \ell], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Далее, положим

$$\beta_-(x) := \min\{\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)\}, \quad \rho_-(x) := \int_0^x \beta_-(t)\, dt, \ \ x \in [0, \ell], \quad (2.5)$$

$$\beta_+(x) := \max\{\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)\}, \quad \rho_+(x) := \int_0^x \beta_+(t)\, dt, \ \ x \in [0, \ell], \quad (2.6)$$

$$\Omega := \Omega(\rho_-, \rho_+) := \{(x, u) : x \in [0, \ell], \ u \in [\rho_-(x), \rho_+(x)]\}. \quad (2.7)$$

Следуя [22, 16, 18], обозначим через $\mathfrak{X}(\Omega)$ линейное пространство, составленное из (эквивалентных классов) измеримых (относительно $\mathbb{R}^2$-меры Лебега) функций, заданных на множестве Ω и удовлетворяющих соотношению

$$\|f\|_{\mathfrak{X}(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,\ell]} \int_{\sigma_-(x)}^{\sigma_+(x)} |f(x, u)| du = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,\ell]} \|f(x, \cdot)\|_{L^1[\sigma_-(x), \sigma_+(x)]} < \infty. \quad (2.8)$$

Легко показать, что пространство $\mathfrak{X}(\Omega)$, снабженное нормой (2.8), образует несепарабельное Банахово пространство (при $\rho_- \not\equiv \rho_+$). Обозначим через $\mathfrak{X}^0(\Omega)$ подпространство $\mathfrak{X}(\Omega)$, полученное замыканием $C(\Omega)$ в $\mathfrak{X}(\Omega)$.

Также обозначим

$$q(x) := \max\left\{\sum_{p=1}^{n} |Q_{jp}(x)| : j \in \{1, \ldots, n\}\right\}, \quad \|q\|_{L_1} \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} \|Q_{jk}\|_{L_1}. \tag{2.9}$$

Ясно, что $q(x) = \|Q(x)\|_{\mathbb{C}^n_\infty \to \mathbb{C}^n_\infty}$ при $x \in [0, \ell]$.

Здесь и в дальнейшем в статье для $g \in L^1[a,b]$ обозначим $\|g\|_{L^1} := \|g\|_{L^1[a,b]} = \int\limits_a^b |g(t)|\,dt$. Для

$$G = (g_{jk})_{j,k=1}^n \in L^1([a,b]; \mathbb{C}^{n\times n}) = L^1[a,b] \otimes \mathbb{C}^{n\times n}$$

по определению полагаем

$$\|G\|_{L^1} := \max\{\|g_{jk}\|_{L^1} : j, k \in \{1, \ldots, n\}\} < \infty.$$

С учетом обозначений (2.5)–(2.9) ключевое представление фундаментального матричного решения $\Phi(x, \lambda)$ выглядит следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть матричные функции* $B(\cdot)$ *и* $Q(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (1.3)–(1.4) *и* (1.19). *Тогда существует такое измеримое матричное ядро* $K(\cdot,\cdot) = K_Q(\cdot,\cdot) = \bigl(K_{jk}(\cdot,\cdot)\bigr)_{j,k=1}^n$, *что выполняется следующее ключевое представление:*

$$\Phi_Q(x, \lambda) = \Phi_0(x, \lambda) + \int\limits_{\rho_-(x)}^{\rho_+(x)} K_Q(x, u) e^{i\lambda u} du, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in [0, \ell], \tag{2.10}$$

где для $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеем*

$$K_{jk} \in \mathfrak{X}^0(\Omega) \qquad \text{и} \qquad \|K_{jk}\|_{\mathfrak{X}(\Omega)} \leqslant \|Q\|_{L^1} \cdot \exp\bigl(\|q\|_{L^1}\bigr). \tag{2.11}$$

Доказательство можно найти в [17, раздел 4].

Замечание 2.2. Важно отметить, что, в силу включения $K_{jk} \in \mathfrak{X}^0(\Omega)$, представление (2.10) справедливо *для всех* $x \in [0, \ell]$ (вместо для п. в. $x \in [0, \ell]$). В самом деле, из [16, лемма 2.2] вытекает, что для всех $x \in [0, \ell]$ оператор следа $\mathrm{tr}_x : F \to F(x, \cdot)$, изначально заданный на $C(\Omega)$, допускает непрерывное продолжение как отображение из $\mathfrak{X}^0(\Omega)$

на $L^1[\sigma_-(x), \sigma_+(x)]$. В частности, можно положить $x = \ell$ в (2.10), что будет важно в разделе 4.

Переходя к граничной задаче (1.1)–(1.2), напомним сначала понятие собственного значения: число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением граничной задачи (1.1)–(1.2), если существует ненулевая вектор-функция $y \in \mathrm{AC}([0,\ell];\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющая (1.1)–(1.2). Алгебраическая кратность собственного значения определяется стандартным образом через цепочку присоединенных векторов (см., например, [27, §I.2.3] для ОДУ n-го порядка и [23, теорема 1.2, шаг (i)] для систем ОДУ.

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим его простейшую форму при $Q \equiv 0$,

$$y' = i\lambda B(x)y, \qquad y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_n), \quad x \in [0, \ell], \tag{2.12}$$

с теми же граничными условиями (1.2). Далее, ввиду обозначений (2.1)–(2.4), введем характеристические определители задач (1.1)–(1.2) и (2.12), (1.2), полагая

$$\Delta(\lambda) := \Delta_Q(\lambda) := \det(C + D\Phi_Q(\ell, \lambda)), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.13}$$

$$\Delta_0(\lambda) := \det(C + D\Phi_0(\ell, \lambda)), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.14}$$

соответственно. Из (2.4) очевидно, что

$$\Delta_0(\lambda) = \det(C + De^{i\lambda B_0}), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad B_0 := \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n). \tag{2.15}$$

Роль характеристического определителя $\Delta(\cdot)$ в спектральной теории граничной задачи (1.1)–(1.2) становится ясной из следующего простого утверждения “фольклорного” типа.

Лемма 2.3. *Пусть матричные функции $B(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3)–(1.4)*. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением граничной задачи* (1.1)–(1.2) *тогда и только тогда, когда $\Delta_Q(\lambda) = 0$. Кроме того, алгебраическая кратность $m_a(\lambda)$ значения λ совпадает с кратностью λ как корня характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot)$.*

Далее, предполагая, что числа $b_1, \dots, b_n$, заданные равенствами (2.1), отличны от нуля, напомним определение регулярных граничных условий следуя [2, 17]. С этой целью обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество диагональных идемпотентных $n \times n$-матриц:

$$\mathcal{P}_n := \{P = \mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n) : \ p_k \in \{0, 1\}, \ k \in \{1, \dots, n\}\}. \tag{2.16}$$

Для любого $P \in \mathcal{P}_n$ положим

$$J_P := J_P(C,D) := \det(T_P(C,D)), \qquad T_P(C,D) := C(I_n - P) + DP. \tag{2.17}$$

Наконец, положим

$$P_\pm := \mathrm{diag}(p_1^\pm, \ldots, p_n^\pm),$$
$$\text{где} \quad p_k^+ = \begin{cases} 1, & b_k > 0, \\ 0, & b_k < 0, \end{cases}, \quad p_k^- = \begin{cases} 0, & b_k > 0, \\ 1, & b_k < 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

для $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ясно, что $P_+ + P_- = I_n$ и P_+ (соответственно P_-) – проектор на положительную (соответственно отрицательную) часть спектра сигнатурной матрицы $S = \mathrm{sign}(B_0)$, где $B_0 := \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ (см. (2.15)).

Определения 2.4. *Пусть числа $b_1, \ldots, b_n$ ненулевые. Граничные условия* (1.2) *для уравнения* (1.1) *называются* ***регулярными****, если*

$$\begin{aligned} J_{P_+}(C,D) &= \det(CP_- + DP_+) \neq 0, \\ J_{P_-}(C,D) &= \det(CP_+ + DP_-) \neq 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Далее, напомним определение функции типа синуса.

Определения 2.5 ([9, 8, 11])**.** *Целая функция $F(\cdot)$ экспоненциального типа называется* ***функцией типа синуса****, если выполнены все следующие условия:*

(i) *функция $F(\cdot)$ отлична от нуля вне некоторой полосы $\Pi_h := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant h\}$;*

(ii) *найдутся $C_1, C_2 > 0$ и $h_0 > h$ такие, что*

$$0 < C_1 \leqslant |F(x + ih_0)| \leqslant C_2 < \infty, \qquad x \in \mathbb{R}; \tag{2.20}$$

(iii) *индикатор $h_F(\cdot)$ функции $F(\cdot)$,*

$$h_F(\varphi) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|}{r}, \qquad \varphi \in (-\pi, \pi] \tag{2.21}$$

удовлетворяет условию $h_F(-\pi/2) + h_F(\pi/2) > 0$.

Замечание 2.6. Условие $h_F(-\pi/2) + h_F(\pi/2) > 0$ накладывается для исключения экспоненциальных функций $e^{i\sigma z+\alpha}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. В последнем случае у функции $F(\cdot)$ нет нулей.

Перечислим некоторые свойства функций типа синуса, необходимые в дальнейшем. С этой целью напомним, что $\mathbb{D}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ – открытый диск радиуса $r > 0$ с центром $z_0 \in \mathbb{C}$.

Лемма 2.7 ([9, 8, 11])**.** *Пусть $F(\cdot)$ – функция типа синуса, удовлетворяющая условиям $h_F(\pi/2) = \sigma_+$ и $h_F(-\pi/2) = -\sigma_-$ для некоторых $\sigma_- < \sigma_+$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Функция $F(\cdot)$ имеет бесконечное множество нулей $\Lambda := \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ с учетом кратности.*

(ii) *Последовательность Λ лежит в некоторой полосе Π_h.*

(iii) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что справедлива следующая оценка:*

$$|F(z)| > C_\varepsilon \cdot (e^{\operatorname{Im} z\cdot\sigma_-} + e^{\operatorname{Im} z\cdot\sigma_+}), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}_\varepsilon(\lambda_m). \tag{2.22}$$

(iv) *Следующая равномерная оценка сверху выполнена при некотором $C_0 > 0$,*

$$|F(z)| < C_0 \cdot (e^{\operatorname{Im} z\cdot\sigma_-} + e^{\operatorname{Im} z\cdot\sigma_+}), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.23}$$

Далее приведем следующую явную формулу для характеристического определителя $\Delta_0(\cdot)$, которую можно получить путем прямых вычислений. Напомним, что числа $b_1, \ldots, b_n$, заданные соотношениями (2.1), отличны от нуля и удовлетворяют каноническому упорядочению (1.10) при некотором $n_- \in \{0, 1, \ldots, n\}$, а числа $b_- \leqslant 0 \leqslant b_+$ заданы равенствами (1.11).

Лемма 2.8. *Характеристический определитель $\Delta_0(\cdot)$ допускает следующее представление при $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\Delta_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k e^{i\lambda\sigma_k} = J_{P_-}(C,D)e^{i\lambda b_-} + J_{P_+}(C,D)e^{i\lambda b_+} + \sum_{k=2}^{N-1} \gamma_k e^{i\lambda\sigma_k}, \tag{2.24}$$

в котором $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ – все различные значения из множества $\{b_P : P \in \mathcal{P}_n\}$,

$$b_- =: \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{N-1} < \sigma_N := b_+, \qquad n < N \leqslant 2^n, \tag{2.25}$$

и

$$\gamma_k := \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n \\ b_P = \sigma_k}} J_P(C,D), \quad k \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.26}$$

$$\gamma_1 = J_{P_-}(C,D), \qquad \gamma_N = J_{P_+}(C,D). \tag{2.27}$$

Замечание 2.9. Если некоторые из чисел $b_1, \ldots, b_n$ равны нулю, то формула (2.24) становится более громоздкой. Именно, пусть

$$b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_{n_-} < 0 = b_{n_-+1} = \ldots = b_{n_-+n_0} = 0 < b_{n_-+n_0+1} \leqslant \ldots \leqslant b_n \tag{2.28}$$

для некоторых $n_-, n_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогда значения γ_1 и γ_N в первом равенстве в (2.24) будут

$$\gamma_1 = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ b_P = b_1 + \ldots + b_{n_-}}} J_P(C, D), \quad \gamma_N = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ b_P = b_{n_-+n_0+1} + \ldots + b_n}} J_P(C, D). \tag{2.29}$$

Очевидно, что здесь каждая сумма содержит в точности 2^{n_0} членов. Из этого, в свою очередь, вытекает более сложное определение регулярности граничных условий: $\gamma_1 \gamma_N \neq 0$. Все результаты этой статьи остаются справедливыми в этом более общем случае, но формулировки становятся более громоздкими.

В качестве прямого следствия формулы (2.24) мы покажем, что характеристический определитель $\Delta_0(\cdot)$ есть функция типа синуса в случае регулярных граничных условий (1.2).

Следствие 2.10. *Пусть граничные условия* (1.2) *регулярны, т. е. выполнены условия* (2.19). *Тогда характеристический определитель* $\Delta_0(\cdot)$ *является функцией типа синуса с*

$$h_{\Delta_0}(\pi/2) = -b_- \qquad \textit{и} \qquad h_{\Delta_0}(-\pi/2) = b_+. \tag{2.30}$$

В частности, $\Delta_0(\cdot)$ *имеет бесконечно много нулей* $\Lambda_0 := \{\lambda_m^0\}_{m \in \mathbb{Z}}$ *(с учетом кратности), и последовательность* Λ_0 *лежит в полосе* Π_h *для некоторого* $h > 0$.

Замечание 2.11. Из (2.24) очевидно, что характеристический определитель $\Delta_0(\cdot)$ остается функцией типа синуса и для нерегулярных граничных условий, если хотя бы два коэффициента $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ в (2.24) ненулевые.

§3. Обобщение формулы Лиувилля

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ фиксировано. Из классической формулы Лиувилля, примененной к фундаментальному матричному решению $\Phi(\cdot, \lambda)$ уравнения (2.2) при начальном условии $\Phi(0, \lambda) = I_n$, вытекает

$$\frac{d}{dx} \det \Phi(x, \lambda) = \operatorname{tr}(i\lambda B(x) - Q(x)) \cdot \det \Phi(x, \lambda), \qquad x \in [0, \ell], \tag{3.1}$$

что, в свою очередь, влечет

$$\det \Phi(x,\lambda) = \exp\left(i\lambda \int\limits_0^x \operatorname{tr} B(t)\,dt - \int\limits_0^x \operatorname{tr} Q(t)\,dt \right), \quad x \in [0,\ell]. \tag{3.2}$$

Если матричная функция $Q(\cdot)$ имеет нулевую диагональ, то формула (3.2) упрощается,

$$\det \Phi(x,\lambda) = \exp\left(i\lambda \int\limits_0^x \operatorname{tr} B(t)\,dt \right) = \exp(i\lambda\cdot(\rho_1(x)+\ldots+\rho_n(x))). \tag{3.3}$$

Далее мы приведем обобщение этой классической формулы Лиувилля для внешних степеней $\bigwedge^m \Phi(\cdot,\lambda)$. Пусть $m \in \{1,\ldots,n\}$, и рассмотрим следующее множество:

$$\mathfrak{I}_m := \mathfrak{I}_m^n := \{\mathfrak{j} := (j_1,\ldots,j_m) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\}, \tag{3.4}$$

т. е. $\mathfrak{I}_m^n$ – множество всех возрастающих последовательностей (также называемых наборами) с ровно m элементами от 1 до n. В дальнейшем обозначим также

$$\operatorname{sgn}(\mathfrak{j}) := (-1)^{j_1+\ldots+j_m}, \qquad \mathfrak{j} = (j_1,\ldots,j_m) \in \mathfrak{I}_m. \tag{3.5}$$

Далее, для любой $n\times n$-матрицы $\mathcal{A} = (\mathfrak{a}_{p,q})_{p,q=1}^n$, элементов $\mathfrak{j} = (j_1,\ldots,j_m)$ и $\mathfrak{k} = (k_1,\ldots,k_m)$ из $\mathfrak{I}_m$, $m \in \{1,\ldots,n\}$ положим

$$\mathcal{A}[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] := \det(\mathfrak{a}_{j_p,k_q})_{p,q=1}^m = \det\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{j_1,k_1} & \ldots & \mathfrak{a}_{j_1,k_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{a}_{j_m,k_1} & \ldots & \mathfrak{a}_{j_m,k_m} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m, \tag{3.6}$$

т. е. $\mathcal{A}[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]$ – минор матрицы $\mathcal{A}$, порожденной строками с индексами $j_1 < \ldots < j_m$ и столбцами с индексами $k_1 < \ldots < k_m$. Далее, положим

$$N := N_m := \operatorname{card} \mathfrak{I}_m = \binom{n}{m}, \qquad \text{и пусть} \quad \mathfrak{I}_m = \{\mathfrak{u}_1,\ldots,\mathfrak{u}_N\} \tag{3.7}$$

– некоторый фиксированный порядок всех элементов из $\mathfrak{I}_m$. Наконец, введем m-ю внешнюю степень $\bigwedge^m \mathcal{A}$ данной матрицы $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ следующим образом:

$$\bigwedge^m \mathcal{A} = \big(\mathcal{A}[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]\big)_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}\in\mathfrak{I}_m} = \big(\mathcal{A}[\mathfrak{u}_j,\mathfrak{u}_k]\big)_{j,k=1}^{N_m}, \qquad m \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.8}$$

Другими словами, $\bigwedge^m \mathcal{A}$ – это $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$-матрица, состоящая из всех $m \times m$-миноров матрицы $\mathcal{A}$. В частности, $\bigwedge^1 \mathcal{A} = \mathcal{A}$ и $\bigwedge^n \mathcal{A} = \big(\det \mathcal{A}\big) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$.

Предложение 3.1. *Пусть*

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in L^1([0,\ell]; \mathbb{C}^{n\times n}), \\ Q &= (Q_{j,k})_{j,k=1}^n \in L^1([0,\ell]; \mathbb{C}^{n\times n}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

и $\Phi(\cdot,\lambda)$ *– фундаментальное матричное решение уравнения* (2.2) *с* $\Phi(0,\lambda) = I_n$. *Для* $m \in \{1,\ldots,n\}$ *и* $x \in [0,\ell]$ *положим*

$$\mathfrak{F}_m(x,\lambda) := \bigwedge^m \Phi(x,\lambda) = (\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}])_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}\in\mathfrak{J}_m} \in \mathbb{C}^{N\times N}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.10}$$

$$\mathfrak{B}_m(x) := \operatorname{diag}\big(\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x)\big)_{\mathfrak{j}\in\mathfrak{J}_m}, \qquad \mathfrak{Q}_m(x) := (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(x))_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}\in\mathfrak{J}_m}, \tag{3.11}$$

где $N = N_m = \binom{n}{m}$ *определено в* (3.7). *Здесь для* $x \in [0,\ell]$ *и наборов* $\mathfrak{j} = \{j_1,\ldots,j_m\} \in \mathfrak{J}_m$ *и* $\mathfrak{k} = \{k_1,\ldots,k_m\} \in \mathfrak{J}_m$ *мы положили*

$$\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) := \beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x), \tag{3.12}$$

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(x) := \begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{m} Q_{j_p,\,j_p}(x), & \text{если } \mathfrak{j} = \mathfrak{k}, \\ (-1)^{p+q} Q_{j_p,\,k_q}(x), & \begin{array}{l}\text{если наборы } \mathfrak{j} \text{ и } \mathfrak{k} \text{ имеют ровно } m-1 \\ \text{общих элементов, и } j_p \notin \mathfrak{k},\ k_q \notin \mathfrak{j} \\ \text{для некоторых } p,q \in \{1,\ldots,m\},\end{array} \\ 0, & \begin{array}{l}\text{если наборы } \mathfrak{j} \text{ и } \mathfrak{k} \text{ имеют не более,} \\ \text{чем } m-2 \text{ общих элементов.}\end{array} \end{cases} \tag{3.13}$$

Тогда матричная функция $\mathfrak{F}_m(\cdot,\lambda)$ *удовлетворяет следующей системе ОДУ первого порядка:*

$$\frac{d}{dx}\mathfrak{F}_m(x,\lambda) = (i\lambda\mathfrak{B}_m(x) - \mathfrak{Q}_m(x))\,\mathfrak{F}_m(x,\lambda), \quad x \in [0,\ell], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.14}$$

и начальному условию $\mathfrak{F}_m(0,\lambda) = I_{N_m}$ *при* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\mathfrak{j} = (j_1,\ldots,j_m) \in \mathfrak{J}_m, \qquad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n, \quad \text{и} \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{k} = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathfrak{J}_m, \qquad 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant n, \tag{3.16}$$

фиксированы на протяжении всего доказательства. Сначала заметим, что

$$\Phi(0,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] = I_n[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] = \delta_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}. \tag{3.17}$$

В силу определения (3.10) матрицы $\mathfrak{F}_m(\cdot,\lambda)$, из этого следует, что $\mathfrak{F}_m(0,\lambda) = I_N = I_{N_m}$. Положим

$$\Phi(x,\lambda) =: (\varphi_{jk}(x,\lambda))_{j,k=1}^n, \qquad x\in[0,\ell]. \tag{3.18}$$

С помощью стандартной формулы для производной определителя имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]\big) &= \frac{d}{dx}\det\begin{pmatrix}\varphi_{j_1,k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_{j_1,k_m}(x,\lambda)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{j_m,k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_{j_m,k_m}(x,\lambda)\end{pmatrix}\\ &= \sum_{p=1}^m \det\begin{pmatrix}\varphi_{j_1,k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_{j_1,k_m}(x,\lambda)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_{j_{p-1},k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_{j_{p-1},k_m}(x,\lambda)\\ \varphi'_{j_p,k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi'_{j_p,k_m}(x,\lambda)\\ \varphi_{j_{p+1},k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_{j_{p+1},k_m}(x,\lambda)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_{j_m,k_1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_{j_m,k_m}(x,\lambda)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Из уравнения (2.2) вытекают следующие соотношения между строками минора $\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]$:

$$\begin{aligned}&\big(\varphi'_{j_p,k_1}(x,\lambda) \quad \dots \quad \varphi'_{j_p,k_m}(x,\lambda)\big)\\ &\qquad = i\lambda\beta_{j_p}(x)\cdot\big(\varphi_{j_p,k_1}(x,\lambda) \quad \dots \quad \varphi_{j_p,k_m}(x,\lambda)\big)\\ &\qquad\quad - \sum_{q=1}^n Q_{j_p,q}(x)\cdot\big(\varphi_{q,k_1}(x,\lambda) \quad \dots \quad \varphi_{q,k_m}(x,\lambda)\big),\end{aligned} \tag{3.20}$$

при $x\in[0,\ell]$ и $p\in\{1,\dots,m\}$.

Для $p\in\{1,\dots,m\}$ и $q\in\{1,\dots,n\}$ обозначим через $\mathfrak{j}(j_p\to q)$ последовательность, полученную из $\mathfrak{j}$ заменой p-го элемента j_p на q, т. е.

$$\mathfrak{j}(j_p\to q) := (j_1,\dots,j_{p-1},q,j_{p+1},\dots,j_m). \tag{3.21}$$

Заметим, что $\mathfrak{j}(j_p\to q)$ не обязательно является элементом $\mathfrak{J}_m$, но обозначение $A[\mathfrak{j}(j_p\to q),\mathfrak{k}]$ по-прежнему корректно. Заметим также, что если $q = j_r$ для некоторого $r\neq p$, то минор $A[\mathfrak{j}(j_p\to q),\mathfrak{k}]$ имеет одинаковые строки и с необходимостью равен нулю. Ясно также, что $\mathfrak{j}(j_p \to q) = \mathfrak{j}$ для $q = j_p$.

С учетом обозначения (3.6) для $A[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$, обозначения (3.21) для $\mathfrak{j}(j_p \to q)$ и определения (3.12) функций $\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(\cdot)$, подставляя (3.20) в (3.19), придем к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\big(\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]\big) &= \sum_{p=1}^{m} i\lambda\beta_{j_p}(x)\cdot\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] \\ &\quad - \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} Q_{j_p,q}(x)\cdot\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j}(j_p\to q),\mathfrak{k}] \\ &= \left(i\lambda\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x) - \sum_{p=1}^{m} Q_{j_p,j_p}(x)\right)\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] \\ &\qquad - \sum_{p=1}^{m}\sum_{\substack{q=1\\ q\notin\mathfrak{j}}}^{n} Q_{j_p,q}(x)\cdot\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j}(j_p\to q),\mathfrak{k}] \end{aligned} \tag{3.22}$$

для $x \in [0,\ell]$. Здесь мы опираемся на вышеописанное наблюдение о минорах с повторяющимися индексами,

$$\Phi(\cdot,\lambda)[\mathfrak{j}(j_p\to q),\mathfrak{k}] \equiv 0 \quad \text{при} \quad q \in \{j_1,\dots,j_{p-1},j_{p+1},\dots,j_m\}. \tag{3.23}$$

Далее, отметим, что для $p \in \{1,\dots,m\}$ и $q \in \{1,\dots,n\}\setminus\mathfrak{j}$ можно переставить элементы последовательности $\mathfrak{j}(j_p \to q)$, задаваемой (3.21), в порядке строгого возрастания. Обозначим результирующую упорядоченную последовательность через $\widetilde{\mathfrak{j}}(j_p \to q) \in \mathfrak{J}_m$. Из стандартного правила перестановки строк минора следует, что

$$\Phi(\cdot,\lambda)[\mathfrak{j}(j_p\to q),\mathfrak{k}] = \sigma(\mathfrak{j},p,q)\cdot\Phi(\cdot,\lambda)[\widetilde{\mathfrak{j}}(j_p\to q),\mathfrak{k}], \tag{3.24}$$

где $\sigma(\mathfrak{j},p,q) = \pm1$ – сигнатура перестановки после упорядочивания последовательности $\mathfrak{j}(j_p \to q)$. Подставляя (3.24) в (3.22), получим при $x \in [0,\ell]$,

$$\frac{d}{dx}\big(\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]\big) = i\lambda\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x)\cdot\Phi(x,\lambda))[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] - \sum_{\mathfrak{l}\in\mathfrak{J}_m}\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{l}}(x)\cdot\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{l},\mathfrak{k}] \tag{3.25}$$

с $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{l}} \in L^1[0,\ell]$, $\mathfrak{l} \in \mathfrak{J}_m$, заданными соотношениями (3.13). В свою очередь, (3.25) эквивалентно (3.14), что завершает доказательство. □

Замечание 3.2. (i) Если $m = n$, то m-я внешняя степень – это 1×1 матрица, состоящая из определителя $\Phi(x,\lambda)$, т.е. $\bigwedge^n \Phi(x,\lambda) =$

$(\det \Phi(x,\lambda))$. Значит, система (3.14) переходит в (3.1). Это показывает, что предложение 3.1 содержит формулу Лиувилля в качестве частного случая.

(ii) При доказательстве предложения 3.1 мы следовали предложению 4.7 из нашего препринта [17]. Но позже мы нашли обширную литературу по теме ОДУ для внешних степеней (см., например, обзор J.S. Muldowney [26] и ссылки в нем). В частности, см. теорему 1 в работе B. Schwarz [32] с альтернативной формулировкой и доказательством предложения 3.1.

Применяя теорему 2.1 к системе (3.14), придем к следующему представлению для миноров фундаментальной матрицы $\Phi(\cdot,\lambda)$. Для его формулировки, по аналогии с (2.5)–(2.7), положим для $x \in [0,\ell]$ и $m \in \{1,\dots,n-1\}$:

$$\rho_{\mathfrak{j}}(x) := \int\limits_0^x \mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(t)\,dt = \rho_{j_1}(x) + \ldots + \rho_{j_m}(x), \quad \mathfrak{j} = (j_1,\dots,j_m) \in \mathfrak{I}_m. \tag{3.26}$$

$$\rho_m^-(x) := \int\limits_0^x \beta_m^-(t)\,dt, \qquad \beta_m^-(x) := \min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{I}_m\}, \tag{3.27}$$

$$\rho_m^+(x) := \int\limits_0^x \beta_m^+(t)\,dt, \qquad \beta_m^+(x) := \max\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{I}_m\}, \tag{3.28}$$

$$\Omega_m := \Omega(\rho_m^-,\rho_m^+) := \{(x,u): \ x\in[0,\ell], \ \ u \in [\rho_m^-(x),\rho_m^+(x)]\}. \tag{3.29}$$

Пространства $\mathfrak{X}(\Omega_m)$ и $\mathfrak{X}^0(\Omega_m)$ определим аналогично (2.8).

Следствие 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Пусть* $m \in \{1,\dots,n-1\}$ *и* $\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m$. *Тогда существует измеримое ядро* $K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(\cdot,\cdot) : \Omega_m \to \mathbb{C}$ *такое, что*

$$\Phi(x,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] = \delta_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \cdot e^{i\lambda\rho_{\mathfrak{j}}(x)} + \int\limits_{\rho_m^-(x)}^{\rho_m^+(x)} K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(x,u)e^{i\lambda u}du, \quad x\in[0,\ell], \ \ \lambda\in\mathbb{C}, \tag{3.30}$$

$$K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \in \mathfrak{X}^0(\Omega_m) \ \ и \ \ \|K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}\|_{\mathfrak{X}(\Omega_m)} \leqslant \|Q\|_{L^1} \cdot \exp\left(\sum_{j,k=1}^n \|Q_{j,k}\|_{L^1}\right), \tag{3.31}$$

где функции $\rho_{\mathfrak{j}}(\cdot)$, $\rho_m^{\pm}(\cdot)$ *и множество* Ω_m *определены соотношениями* (3.26)–(3.29). *Здесь* $\delta_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} := 1$, *если* $\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$ *и* $\delta_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} := 0$, *если* $\mathfrak{j} \neq \mathfrak{k}$.

Доказательство. Проверим, что из условия (1.19) вытекает аналогичное условие для матричных функций $\mathfrak{B}_m(\cdot)$ и $\mathfrak{Q}_m(\cdot)$, заданное соотношением (3.11), т. е.

$$\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x)=\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}(x) \implies \mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(x)=0 \text{ для всех } \mathfrak{j},\mathfrak{k}\in\mathfrak{J}_m \text{ и п. в. } x\in[0,\ell]. \tag{3.32}$$

Пусть $\mathfrak{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathfrak{J}_m$ и $\mathfrak{k} \in (k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{J}_m$ фиксированы. Допустим, что $\mathfrak{k} = \mathfrak{j}$. Тогда из условия (1.19) вытекает, что $Q_{j_p, j_p}(\cdot) = 0$ для $p \in \{1, \ldots, m\}$. Значит, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{j}}(\cdot) = 0$ ввиду первого случая в (3.13). Далее, предположим, что наборы $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ содержат в точности $m-1$ общих элементов. В этом случае $j_p \notin \mathfrak{k}$ и $k_q \notin \mathfrak{j}$ для некоторых $p, q \in \{1, \ldots, m\}$, в то время как оставшиеся элементы не меняются, т. е.

$$(j_1, \ldots, j_{p-1}, j_{p+1}, \ldots, j_m) = (k_1, \ldots, k_{q-1}, k_{q+1}, \ldots, k_m). \tag{3.33}$$

Следовательно, из определения (3.12) и второго случая в (3.13) ясно, что

$$\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} - \mathfrak{b}_{\mathfrak{j}} \equiv \beta_{k_q} - \beta_{j_p}, \qquad \mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \equiv (-1)^{p+q} Q_{j_p,\, k_q}. \tag{3.34}$$

Объединяя равенства (3.34) с условием (1.19), легко получаем условие (3.32). Наконец, предположим, что наборы $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ имеют не более, чем $m-2$ общих элементов. Тогда из формулы (3.13) вытекает, что с необходимостью $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \equiv 0$, что завершает доказательство соотношения (3.32).

Так как выполнено условие (3.32), то теорема 2.1 применима к системе (3.14) и обеспечивает существование ядра $K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \in \mathfrak{X}(\Omega_m)$, которое дает представление (3.30)–(3.31). Кроме того, справедлива следующая оценка нормы:

$$\|K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}\|_{\mathfrak{X}(\Omega_m)} \leqslant \|\mathfrak{Q}_m\|_{L^1} \cdot \exp\Big(\Big\|\max_{\mathfrak{j}'\in\mathfrak{J}_m} \sum_{\mathfrak{k}'\in\mathfrak{J}_m} |\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j}',\mathfrak{k}'}(\cdot)|\Big\|_{L^1}\Big). \tag{3.35}$$

Так как $Q_{1,1}(\cdot) = \ldots = Q_{n,n}(\cdot) = 0$, из (3.13) следует, что $\|\mathfrak{Q}_m\|_{L^1} = \|Q\|_{L^1}$, в то время как для $\mathfrak{j}' = (j'_1, \ldots, j'_m) \in \mathfrak{J}_m$ имеем

$$\sum_{\mathfrak{k}'\in\mathfrak{J}_m} |\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j}',\mathfrak{k}'}(\cdot)| = \sum_{p=1}^{m} \sum_{\substack{k=1\\ k\notin\mathfrak{j}'}}^{n} |Q_{j'_p,\, k}(\cdot)| \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} |Q_{j,k}(\cdot)|. \tag{3.36}$$

Подставляя (3.36) в (3.35), придем к (3.31). □

Замечание 3.4. Пусть $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Из последней части доказательства следствия 3.3 (см. (3.34)) ясно, что

$$\big\{(|Q_{j,k}|, \beta_k - \beta_j)\big\}_{j \neq k} = \big\{(|\mathfrak{Q}_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}|, \mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} - \mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}) : \mathfrak{j}, \mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m, \mathfrak{j} \neq \mathfrak{k}\big\}, \qquad (3.37)$$

т. е. множество пар функций $(|Q_{j,k}|, \beta_k - \beta_j)$ для $j \neq k$ (после удаления повторов) сохраняется под действием “m-внешнего степенного преобразования”, построенного в доказательстве предложения 3.1. Это означает, что каждое условие, включающее такие пары, выполнено одновременно для всех $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Предложение 3.1 демонстрирует эту эквивалентность на примере условий (1.19) и (3.32).

§4. Ключевое тождество для характеристического определителя

Здесь мы докажем ключевое представление (1.20), связывающее характеристические определители $\Delta_Q(\cdot)$ и $\Delta_0(\cdot)$. Сначала приведем классические формулы для определителей сумм и произведений матриц. Для этого напомним обозначение (3.4) для множества $\mathfrak{I}_m$ возрастающих последовательностей (называемых также наборами) длины m, составленных из различных натуральных чисел от 1 до n. Далее, для $\mathfrak{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathfrak{I}_m$, $m \in \{1, \dots, n-1\}$, по определению положим

$$\widehat{\mathfrak{j}} := (\widehat{j}_1, \dots, \widehat{j}_{n-m}) := (1, \dots, n) \setminus (j_1, \dots, j_m) \in \mathfrak{I}_{n-m}, \qquad (4.1)$$

т. е. $\widehat{\mathfrak{j}} \in \mathfrak{I}_{n-m}$ – дополнение к $\mathfrak{j} \in \mathfrak{I}_m$ во множестве $\{1, \dots, n\}$.

Объединяя классическую “фольклорную” формулу для определителя сумм матриц (см., например, [25]) и прямое обобщение классической формулы Коши-Бинэ (см., например, [6, подраздел 1.2.6]), приходим к следующему результату.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Тогда*

$$\det(\mathcal{C} + \mathcal{D}\mathcal{F}) = \det(\mathcal{C}) + \det(\mathcal{D})\det(\mathcal{F}) + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k},\mathfrak{l} \in \mathfrak{I}_m} \operatorname{sgn}(\mathfrak{l}) \operatorname{sgn}(\mathfrak{k}) \cdot \mathcal{C}[\widehat{\mathfrak{l}}, \widehat{\mathfrak{k}}] \cdot \mathcal{D}[\mathfrak{l}, \mathfrak{j}] \cdot \mathcal{F}[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]. \qquad (4.2)$$

Здесь $\mathcal{A}[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$ обозначает соответствующий минор $n \times n$-матрицы $\mathcal{A}$ (см. (3.6)).

Далее положим

$$\widetilde{b}_- := \min\{\rho_1^-(\ell), \dots, \rho_{n-1}^-(\ell)\}, \quad \widetilde{b}_+ := \max\{\rho_1^+(\ell), \dots, \rho_{n-1}^+(\ell)\}, \quad (4.3)$$

где функции $\rho_m^{\pm}(\cdot)$ заданы соотношениями (3.27)–(3.28). Из (3.27)–(3.28) и (4.3) очевидно, что

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_- &= \min_{1\leqslant m<n} \int_0^\ell \min\{\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}\, dx, \\ \widetilde{b}_+ &= \max_{1\leqslant m<n} \int_0^\ell \max\{\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}\, dx. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Пусть матричные функции* $B(\cdot)$ *и* $Q(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (1.3)–(1.4) *и* (1.19). *Пусть также* $\Delta_Q(\lambda)$ *и* $\Delta_0(\lambda)$ *– характеристические определители, заданные равенствами* (2.13) *и* (2.14) *соответственно. Тогда найдется функция* $g \in L^1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+]$ (*здесь числа* $\widetilde{b}_\pm$ *определены равенством* (4.4)) *такая, что справедливо следующее тождество:*

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u) e^{i\lambda u}\, du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.5}$$

где

$$\|g\|_{L^1} \leqslant \gamma(C, D) \cdot \|Q\|_{L^1} \cdot \exp\left(\sum_{j,k=1}^n \|Q_{jk}\|_{L^1}\right) \tag{4.6}$$

с некоторой константой $\gamma(C, D) > 0$, *зависящей только от* n, C *и* D *и не зависящей от матричных функций* $B(\cdot)$ *и* $Q(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ фиксировано. Применяя формулу (4.2) к $\Delta_Q(\lambda) = \det(C + D\Phi(\ell, \lambda))$, получим

$$\Delta_Q(\lambda) = \det(C) + \det(D) \cdot \det \Phi(\ell, \lambda) + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m} \gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C, D) \cdot \Phi(\ell, \lambda)[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}], \tag{4.7}$$

где для $m \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C, D) := \sum_{\mathfrak{l} \in \mathfrak{J}_m} \operatorname{sgn}(\mathfrak{l}) \operatorname{sgn}(\mathfrak{k}) \cdot C\big[\widehat{\mathfrak{l}}, \widehat{\mathfrak{k}}\big] \cdot D[\mathfrak{l}, \mathfrak{j}], \qquad \mathfrak{j}, \mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m, \tag{4.8}$$

и $\widehat{\mathfrak{j}} \in \mathfrak{J}_{n-m}$ – дополнение к $\mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m$ во множестве $\{1, \ldots, n\}$ (см. (4.1)). Так как $Q(\cdot)$ имеет нулевую диагональ, то из классической формулы

Лиувилля (3.3) вытекает, что

$$\det \Phi(\ell,\lambda) = \det \Phi_0(\ell,\lambda). \tag{4.9}$$

Для преобразования суммы в (4.7) применим формулу (3.30) для $\Phi(\ell,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}]$. Зафиксируем $m \in \{1,\ldots,n-1\}$ и заметим, что из диагональной структуры (2.4) матричной функции $\Phi_0(\cdot,\lambda)$ вытекает, что

$$\Phi_0(\ell,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] = \delta_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \exp\left(i\lambda\rho_{\mathfrak{j}}(\ell)\right), \qquad \mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m, \tag{4.10}$$

где $\rho_{\mathfrak{j}}(\ell) = \rho_{j_1}(\ell) + \ldots + \rho_{j_m}(\ell)$ для $\mathfrak{j} = (j_1,\ldots,j_m) \in \mathfrak{J}_m$ задано в (3.26). В соответствии с (3.31), включение $K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \in \mathfrak{X}^0(\Omega_m)$ выполнено при $\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m$. Значит, в силу следствия 2.2, след $K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(\ell,\cdot)$ корректно определен и суммируем. Таким образом, полагая $x = \ell$ в (3.30), с учетом формулы (4.10) получим

$$\Phi(\ell,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] = \Phi_0(\ell,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] + \int\limits_{\rho_m^-(\ell)}^{\rho_m^+(\ell)} K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(\ell,u) e^{i\lambda u}\,du, \quad \mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m. \tag{4.11}$$

Из (4.3) очевидно, что $\widetilde{b}_- \leqslant \rho_m^-(\ell) \leqslant \rho_m^+(\ell) \leqslant \widetilde{b}_+$. Следовательно, полагая

$$g_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(u) := \begin{cases} K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(\ell,u), & u \in [\rho_m^-(\ell), \rho_m^+(\ell)], \\ 0, & u \in [\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \setminus [\rho_m^-(\ell), \rho_m^+(\ell)], \end{cases} \quad \mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m, \tag{4.12}$$

можно переписать формулу (4.11) в виде

$$\Phi(\ell,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] = \Phi_0(\ell,\lambda)[\mathfrak{j},\mathfrak{k}] + \int\limits_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(u) e^{i\lambda u}\,du, \quad \mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m, \tag{4.13}$$

где $g_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}} \in L^1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+]$, поскольку след $K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(\ell,\cdot)$ корректно определен и суммируем. Таким образом, полагая

$$g(u) := \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{J}_m} \gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C,D) \cdot g_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(u), \quad u \in [\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+], \tag{4.14}$$

подставляя (4.9) и (4.13) в (4.7) и воспользовавшись (4.7) при $Q \equiv 0$, имеем

$$\Delta_Q(\lambda) = \det(C) + \det(D) \cdot \det \Phi_0(\ell, \lambda) + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m} \gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C, D) \cdot \Phi_0(\ell, \lambda)[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m} \gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C, D) \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(u) e^{i\lambda u} du = \Delta_0(\lambda) + \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u) e^{i\lambda u} du. \quad (4.15)$$

Формула (4.15) доказывает формулу (4.5).

Интегрируя формулу (4.14) с учетом определения пространства $\mathfrak{X}^0(\Omega_m)$ и множества Ω_m (см. (3.29)), получим

$$\int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} |g(u)| \, du \leqslant \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m} |\gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C, D)| \cdot \int_{\rho_m^-(\ell)}^{\rho_m^+(\ell)} |g_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(u)| \, du$$

$$\leqslant \gamma(C, D) \cdot \max\bigl\{\|K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}\|_{\mathfrak{X}(\Omega_m)} : \ \mathfrak{j}, \mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m, \ 1 \leqslant m \leqslant n-1\bigr\}, \quad (4.16)$$

где

$$\gamma(C, D) := \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{k} \in \mathfrak{I}_m} |\gamma_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(C, D)|. \quad (4.17)$$

Объединяя оценки для норм ядер $K_{\mathfrak{j},\mathfrak{k}}(\cdot, \cdot)$ из (3.31) с оценкой (4.16), получим требуемую оценку (4.6) на $\|g\|_{L_1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+]}$. □

Замечание 4.3. Заметим, что наиболее естественным подходом для доказательства формулы (4.28) является прямая подстановка формулы (2.10) для $\Phi_Q(\ell, \lambda)$ в определение (2.13) $\Delta_Q(\lambda)$ и разложение соответствующего определителя. В свою очередь, каждое произведение преобразований Фурье, появляющееся в этом процессе, можно трансформировать в преобразование Фурье, используя свойства свертки. К сожалению, это приводит к интегрированию в более широких пределах в формуле (4.28): $\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{n\rho_-(\ell)}^{n\rho_+(\ell)} g(u) e^{i\lambda u} \, du$. Даже в случае постоянной матрицы $B(\cdot) = \mathrm{const}$ с $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_{n_-} < 0 < b_{n_-+1} \leqslant \ldots \leqslant b_n$ это приводит к более широкому чем $[b_1 + \ldots + b_{n_-}, b_{n_-+1} + \ldots + b_n]$ отрезку интегрирования $[nb_1, nb_n]$, и не удовлетворительно для приложений.

В свою очередь, подчеркнем, что каждый элемент матричной функции $\mathfrak{B}_m(\cdot)$, заданной (3.12), является суммой некоторых элементов первоначальной матричной функции $B(\cdot)$ *с различными индексами*. Именно поэтому приведенное выше доказательство, использующее внешние степени, успешно приводит к тождеству (4.28).

Замечание 4.4. Из представлений (2.24) и (4.5) легко вытекает, что

$$\Delta(\lambda) = \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} e^{i\lambda u} d\sigma(u), \qquad \Delta_0(\lambda) = \int_{b_-}^{b_+} e^{i\lambda u} d\sigma_0(u), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.18}$$

где

$$\sigma_- := \min\{b_-, \widetilde{b}_-\}, \qquad \sigma_+ := \max\{b_+, \widetilde{b}_+\}, \tag{4.19}$$

$$\sigma(u) = \sigma_0(u) + \int_{\sigma_-}^{u} g(s)ds, \qquad u \in [\sigma_-, \sigma_+], \tag{4.20}$$

и $\sigma_0(\cdot)$ – ступенчатая функция, имеющая не более N скачков в точках $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, заданных в (2.25). Если граничные условия регулярны, из формулы (2.24) следует, что

$$\sigma(b_- + 0) - \sigma(b_-) = \sigma_0(b_- + 0) - \sigma_0(b_-) = J_{P_-}(C, D) \neq 0, \tag{4.21}$$

$$\sigma(b_+) - \sigma(b_+ - 0) = \sigma_0(b_+) - \sigma_0(b_+ - 0) = J_{P_+}(C, D) \neq 0. \tag{4.22}$$

Если также $\sigma_- = b_-$ и $\sigma_+ = b_+$, то из разрывности функции $\sigma(\cdot)$ в точках b_- и b_+ вытекает, что определитель $\Delta_Q(\cdot)$ – функция типа синуса (см. ниже лемму 5.7). Но если $\sigma_+ - \sigma_- > b_+ - b_-$, то, вообще говоря, $\Delta_Q(\cdot)$ не наследует это свойство от $\Delta_0(\cdot)$.

Замечание 4.4 побуждает найти явные условия на матрицу $B(\cdot)$, гарантирующие вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. В следующем результате мы приведем один естественный простой случай, когда это вложение выполнено.

Лемма 4.5. *Пусть $\beta_k = \overline{\beta_k} \in L^1[0, \ell]$ при $k \in \{1, \dots, n\}$. Пусть для чисел $b_k = \int_0^\ell \beta_k(x)\, dx$ справедливо каноническое упорядоянение* (1.10) *при некотором $n_- \in \{0, 1, \dots, n\}$.*

(i) *Тогда справедливо следующее тождество:*

$$\widetilde{b}_- + \widetilde{b}_+ = b_- + b_+ = b_1 + \ldots + b_n, \tag{4.23}$$

где числа $\widetilde{b}_\pm$ *и* $b_\pm$ *определены в* (4.4) *и* (1.11) *соответственно.*

(ii) *Пусть выполнены следующие условия при п. в.* $x \in [0, \ell]$*:*

$$\beta_k(x) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_-, \qquad \beta_k(x) \geqslant 0, \quad n_- < k \leqslant n. \tag{4.24}$$

Тогда выполнено вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$*, т. е.* $b_- \leqslant \widetilde{b}_- \leqslant \widetilde{b}_+ \leqslant b_+$.

Доказательство. (i) Путем прямых вычислений с учетом определений (2.1) и (4.4) получим, что

$$\begin{aligned} b_1 + \ldots + b_n - \widetilde{b}_- \\ &= \max_{1 \leqslant m < n} \int_0^\ell \big(\beta_1(x) + \ldots + \beta_n(x) - \min\{\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}\big)\, dx \\ &= \max_{1 \leqslant m < n} \int_0^\ell \max\{\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_{n-m}\}\, dx = \widetilde{b}_+. \end{aligned} \tag{4.25}$$

В свою очередь, тождество $b_- + b_+ = b_1 + \ldots + b_n$ легко вытекает из (1.11), что завершает доказательство равенств (4.23).

(ii) Пусть $\mathfrak{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathfrak{J}_m$ при некотором $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда из условия (4.24) следует, что

$$\mathfrak{b}_\mathfrak{j}(x) = \sum_{p=1}^m \beta_{j_p}(x) \geqslant \sum_{p=1}^m \min\{\beta_{j_p}(x), 0\} \geqslant \sum_{k=1}^n \min\{\beta_k(x), 0\} = \sum_{k=1}^{n_-} \beta_k(x), \tag{4.26}$$

при п. в. $x \in [0, \ell]$. Объединяя оценку (4.26) с определениями (4.4) и (1.11), придем к соотношению

$$\widetilde{b}_- \geqslant \int_0^\ell \sum_{k=1}^{n_-} \beta_k(x)\, dx = b_1 + \ldots + b_{n_-} = b_-. \tag{4.27}$$

Объединяя тождество (4.27) с оценкой (4.27), получим $b_+ - \widetilde{b}_+ = \widetilde{b}_- - b_- \geqslant 0$, что завершает доказательство этой части. □

Из теоремы 4.2 и леммы 4.5(ii) вытекает следующий результат.

Следствие 4.6. *В условиях теоремы 4.2 пусть выполнено условие* (4.24). *Тогда существует функция* $g \in L^1[b_-, b_+]$, *удовлетворяющая оценке* (4.6) *и такая, что справедливо следующее тождество:*

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{b_-}^{b_+} g(u)e^{i\lambda u}\,du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.28}$$

Здесь константы $b_\pm$ *определены соотношениями* (1.11).

Далее усовершенствуем следствие 4.6 в случае $n_- = 0$.

Следствие 4.7. *Пусть матричные функции* $B(\cdot)$ *и* $Q(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (1.3)–(1.4) *и* (1.19), $\beta_k(\cdot) > 0$ *при* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и* $b_+ := b_1 + \ldots + b_n > 0$. *Тогда характеристический определитель* $\Delta_Q(\cdot)$, *заданный в* (2.13), *допускает следующее усовершенствованное представление:*

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{b_0}^{b_+ - b_0} g(u)e^{i\lambda u}\,du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.29}$$

где

$$b_0 := \int_0^\ell \min\{\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)\}\,dx > 0 \quad \text{и} \quad g \in L^1[b_0, b_+ - b_0]. \tag{4.30}$$

Доказательство. Найдем число $\widetilde{b}_-$, заданное (4.4). Для этого пусть $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $\mathfrak{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathfrak{J}_m$. Так как функции $\beta_1(\cdot), \ldots, \beta_n(\cdot)$ положительны, то

$$\beta_{\mathfrak{j}}(x) = \beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) \geqslant \beta_{j_1}(x), \qquad x \in [0, \ell]. \tag{4.31}$$

Следовательно,

$$\int_0^\ell \min\{\beta_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}\,dx \geqslant \int_0^\ell \min\{\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)\}\,dx = b_0. \tag{4.32}$$

Подставляя эту оценку в (4.4), получим, что $\widetilde{b}_- \geqslant b_0$. С другой стороны,

$$\widetilde{b}_- = \min_{1\leqslant m<n-1} \int_0^\ell \min\{\beta_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}\, dx \leqslant \int_0^\ell \min\{\beta_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_1\}\, dx$$

$$= \int_0^\ell \min\{\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)\}\, dx = b_0. \quad (4.33)$$

Поэтому $\widetilde{b}_- = b_0$. Из тождества (4.23) вытекает, что

$$\widetilde{b}_+ = b_1 + \ldots + b_n - \widetilde{b}_- = b_+ - b_0. \quad (4.34)$$

Теорема 4.2 завершает доказательство. □

Замечание 4.8. Формула (4.29) приводит к интересному феномену в случае, когда все функции $\beta_k(\cdot)$ положительны: система корневых векторов граничной задачи (1.1)–(1.2) (с произвольным суммируемым потенциалом $Q(\cdot)$) полны в соответствующем весовом векторном L^2-пространстве тогда и только тогда, когда граничные условия (1.2) регулярны. Этот результат будет опубликован отдельно.

Завершим этот раздел явным критерием для выполнения желаемого вложения $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$ при условии $n_- \in \{1, \ldots, n-1\}$. В свою очередь, это позволит получить важное представление (4.28) (см. замечание 4.4 для мотивировки).

Предложение 4.9. *Пусть* $\beta_k = \overline{\beta_k} \in L^1[0, \ell]$ *при* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *и*

$$b_k = \int_0^\ell \beta_k(x)\, dx < 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n_-, \quad (4.35)$$

$$b_k = \int_0^\ell \beta_k(x)\, dx > 0, \qquad n_- < k \leqslant n, \quad (4.36)$$

для некоторого $n_- \in \{1, \ldots, n-1\}$. *Пусть числа* $\widetilde{b}_\pm$ *и* $b_\pm$, *заданы в* (4.4) *и* (1.11), *соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Противоположное к желаемому вложение* $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \supset [b_-, b_+]$ *всегда выполнено.*

(ii) *Следующие четыре соотношения эквивалентны:*

$$b_- = \widetilde{b}_- \quad\Longleftrightarrow\quad b_- \leqslant \widetilde{b}_- \quad\Longleftrightarrow\quad b_+ \geqslant \widetilde{b}_+ \quad\Longleftrightarrow\quad b_+ = \widetilde{b}_+. \tag{4.37}$$

(iii) *Равенство* $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] = [b_-, b_+]$ *выполнено тогда и только тогда, когда следующие три условия выполнены одновременно:*

$$\max\{\beta_1(x), \ldots, \beta_{n_-}(x)\} \leqslant \min\{\beta_{n_-+1}(x), \ldots, \beta_n(x)\} \quad \textit{при п. в.} \quad x \in [0, \ell], \tag{4.38}$$

$$\max_{1 \leqslant m < n_-} \int_0^\ell \max\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n_-\}\, dx \leqslant 0, \tag{4.39}$$

$$\min_{1 \leqslant m < n-n_-} \int_0^\ell \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : n_- < j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\}\, dx \geqslant 0. \tag{4.40}$$

Доказательство. (i) Так как $n_- \in \{1, \ldots, n-1\}$, то, объединяя определения (4.4) и (1.11), имеем

$$\widetilde{b}_- \leqslant \int_0^\ell \min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_{n_-}\}\, dx \leqslant \int_0^\ell (\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x))\, dx = b_-. \tag{4.41}$$

Оценка $b_+ \leqslant \widetilde{b}_+$ вытекает из $b_- \geqslant \widetilde{b}_-$ и тождества $\widetilde{b}_- + \widetilde{b}_+ = b_- + b_+$ (см. (4.23) в лемме (4.5)), что завершает доказательство этой части.

(ii) Эта эквивалентность с очевидностью вытекает из тождества $\widetilde{b}_- + \widetilde{b}_+ = b_- + b_+$ и вложения $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \supset [b_-, b_+]$, полученного в (i).

(iii) Необходимость. Пусть $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] = [b_-, b_+]$. Тогда $b_- = \widetilde{b}_-$, и по аналогии с (4.41) имеем

$$0 = \widetilde{b}_- - b_- \leqslant \int_0^\ell \bigl(\min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_{n_-}\} - (\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x))\bigr)\, dx. \tag{4.42}$$

Ясно, что функция под интегралом в правой части (4.42) неположительна. Значит, ее интеграл может быть неотрицателен, только если эта функция – тождественный нуль. Поэтому

$$\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x) \leqslant \beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_{n_-}}(x) \quad \text{при п. в.} \quad x \in [0, \ell] \tag{4.43}$$

для каждого набора $(j_1, \ldots, j_{n_-})$, удовлетворяющего соотношению $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{n_-} \leqslant n$.

Пусть $k \in \{1, \ldots, n_-\}$ и $l \in \{n_- + 1, \ldots, n\}$. Полагая

$$(j_1, \ldots, j_{n_-}) = (1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n_-, l) \tag{4.44}$$

в (4.43), получим

$$\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x) \leqslant \beta_1(x) + \ldots + \beta_{k-1}(x) + \beta_l(x) + \beta_{k+1}(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x) \tag{4.45}$$

при п. в. $x \in [0, \ell]$. Сокращая общие члены в обеих частях, имеем

$$\beta_k(x) \leqslant \beta_l(x) \quad \text{при п. в.} \quad x \in [0, \ell] \quad \text{и} \quad 1 \leqslant k \leqslant n_- < l \leqslant n, \tag{4.46}$$

что доказывает оценку (4.38).

Далее, докажем оценку (4.39). Если $n_- = 1$, то она выполняется автоматически, потому что нет значений m, удовлетворяющих соотношению $1 \leqslant m < n_-$. Пусть $n_- \geqslant 2$ и $1 \leqslant m < n_-$. Покажем, что

$$\min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\} = \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n_-\} \tag{4.47}$$

при п. в. $x \in [0, \ell]$. Пусть $\mathfrak{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathfrak{J}_m$ и

$$1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m_-} \leqslant n_- < j_{m_-+1} < \ldots < j_m \leqslant n \tag{4.48}$$

при некотором $m_- \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Так как $m \leqslant n_-$, мы можем выбрать $m - m_-$ различных чисел $k_{m_-+1}, \ldots, k_m$ из множества $\{1, \ldots, n_-\} \setminus \{j_1, \ldots, j_{m_-}\}$. Из оценки (4.46) вытекает, что

$$b_{k_{m_-+1}}(x) + \ldots + \beta_{k_m}(x) \leqslant \beta_{j_{m_-+1}}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) \quad \text{при п. в.} \quad x \in [0, \ell]. \tag{4.49}$$

Это, в свою очередь, влечет

$$\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_{m_-}}(x) + \beta_{k_{m_-+1}}(x) + \ldots + \beta_{k_m}(x) \leqslant \beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) \tag{4.50}$$

при п. в. $x \in [0, \ell]$. Так как $j_1, \ldots, j_{m_-}, k_{m_-+1}, \ldots, k_m$ – m различных чисел из множества $\{1, \ldots, n_-\}$, то соотношение (4.47) с очевидностью вытекает из (4.50).

Объединяя равенство $b_- = \widetilde{b}_-$, определения (4.4) и (1.11) с тождеством (4.47), получим

$$\int_0^\ell (\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x))\,dx = b_- = \widetilde{b}_- \leqslant \int_0^\ell \min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}\,dx$$
$$= \int_0^\ell \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n_-\}\,dx. \quad (4.51)$$

По аналогии с (4.25) можно преобразовать (4.51) следующим образом:

$$0 \geqslant \int_0^\ell \big((\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x)) - \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n_-\}\big)\,dx$$
$$= \int_0^\ell \max\{\beta_{k_1}(x) + \ldots + \beta_{k_{n_- - m}}(x) : 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n_- - m} \leqslant n_-\}dx. \quad (4.52)$$

Так как $1 \leqslant m < n_-$ произвольно, оценка (4.39) немедленно вытекает из (4.52). Оценку (4.40) можно доказать аналогично (4.39) с помощью оценки (4.46), равенства $b_+ = \widetilde{b}_+$ и тождества (4.23). Это завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия (4.38)–(4.40). Ввиду части (ii), для доказательства равенства $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] = [b_-, b_+]$ достаточно доказать неравенство $b_- \leqslant \widetilde{b}_-$, что эквивалентно,

$$\int_0^\ell (\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x))dx \leqslant \int_0^\ell \min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\}dx, \quad 1 \leqslant m < n. \quad (4.53)$$

Пусть сначала $1 \leqslant m < n_-$. Как и выше, отправляясь от оценки (4.38), можно доказать соотношение (4.47). Далее, оценка (4.39) с $n_- - m$

вместо m влечет

$$\int_0^\ell (\beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x))\,dx \leqslant \int_0^\ell \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_m}(x) : 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n_-\}\,dx. \quad (4.54)$$

Из этого неравенства и тождества (4.47) получим оценку (4.53) при $1 \leqslant m < n_-$.

Если $m = n_-$, то, аналогично тому, как было доказано (4.47), можно показать, используя оценку (4.38), что

$$\min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_{n_-}\} = \beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x) \quad \text{при п. в. } x \in [0, \ell], \quad (4.55)$$

откуда следует (4.53) при $m = n_-$.

Наконец, пусть $n_- < m < n$. Снова, используя оценку (4.38), как и выше, мы можем доказать, что

$$\min\{\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}(x) : \mathfrak{j} \in \mathfrak{J}_m\} = \beta_1(x) + \ldots + \beta_{n_-}(x) + \min\{\beta_{j_1}(x) + \ldots + \beta_{j_{m-n_-}}(x) : n_- + 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-n_-} \leqslant n\} \quad (4.56)$$

при п. в. $x \in [0, \ell]$. Интегрируя это тождество от 0 до ℓ и учитывая оценку (4.40), придем к желаемой оценке (4.53) при $n_- < m < n$, что завершает доказательство. $\square$

Замечание 4.10. Если $n_- = 0$, т. е. $b_k = \int_0^\ell \beta_k(x)\,dx > 0$ при $k \in \{1, \ldots, n\}$, то $b_- = 0$. По-видимому, в общем случае упростить условие $\widetilde{b}_- \geqslant 0$ невозможно. Например, если $n = 2$ и $n_- = 0$, т. е. интегралы от функций $\beta_1(\cdot)$ и $\beta_2(\cdot)$ положительны, то ничего нельзя сказать о знаке интеграла минимума $\min\{\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot)\}$.

Пример 4.11. Условия (4.38)–(4.40) несколько громоздки. Покажем их явный вид для некоторых случаев, когда значения n малы. Именно, эти условия в каждом из приведенных ниже случаев принимают следующий вид:

(i) $n = 2$, $n_- = 1$: $\quad \beta_1(x) \leqslant \beta_2(x)$ при $x \in [0, \ell]$;

(ii) $n = 3$, $n_- = 1$:

$$\beta_1(x) \leqslant \min\{\beta_2(x), \beta_3(x)\},\ x \in [0, \ell],\ \text{и} \int_0^\ell \min\{\beta_2(x), \beta_3(x)\} dx \geqslant 0; \tag{4.57}$$

(iii) $n = 4$, $n_- = 2$:

$$\beta_{12}^-(x) \leqslant \beta_{34}^+(x), \quad x \in [0, \ell], \quad \text{и} \quad \int_0^\ell \beta_{12}^-(x)\, dx \leqslant 0 \leqslant \int_0^\ell \beta_{34}^+(x)\, dx, \tag{4.58}$$

где

$$\beta_{12}^-(\cdot) := \max\{\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot)\} \quad \text{и} \quad \beta_{34}^+(\cdot) := \min\{\beta_3(\cdot), \beta_4(\cdot)\}. \tag{4.59}$$

В свою очередь, в каждом из случаев выше, из предложения 4.9 вытекает, что $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] = [b_-, b_+]$. Поэтому представление 4.5 из теоремы 4.2 улучшается до (4.28), т. е. имеет место следующее тождество:

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{b_-}^{b_+} g(u) e^{i\lambda u}\, du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.60}$$

В предположении регулярности граничных условий (1.2), это представление гарантирует, что $\Delta_Q(\cdot)$ – функция типа синуса (см. определение 2.5 выше и теорему 5.8 ниже).

§5. О “хорошем” распределении собственных значений

В этом параграфе мы продолжим исследование характеристического определителя

$$\Delta_Q(\lambda) = \det(C + D\Phi_Q(\ell, \lambda)), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5.1}$$

заданного в (2.13). Именно, мы применим представление (4.5)

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u) e^{i\lambda u}\, du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5.2}$$

и его версии, полученные в предыдущем параграфе, для изучения свойств $\Delta_Q(\cdot)$ как целой функции экспоненциального типа. Здесь числа $\widetilde{b}_\pm$ заданы соотношениями (4.4).

Сначала напомним, следуя [10, Гл. 5], определение целой функции класса A.

Определения 5.1 (Гл. 5 в [10])**.** *Пусть $F(\cdot)$ – целая функция с не более чем счетной последовательностью нулей $\{\lambda_m\}$ (с учетом кратности). Говорят, что функция $F(\cdot)$* ***принадлежит классу*** *A, если*

$$\sum_{\lambda_m \neq 0} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_m} \right| < \infty. \tag{5.3}$$

Введем также следующий важный класс целых функций.

Определения 5.2. *Говорят, что целая функция $F(\cdot)$* ***принадлежит классу*** *A_b и обозначают для краткости $F \in A_b$, если функция $F(\cdot)$ не более чем экспоненциального типа и* ограничена на действительной оси, *т. е. для некоторых $\gamma, \sigma > 0$ имеем*

$$|F(z)| \leqslant \gamma \cdot e^{\sigma|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \qquad \text{и} \qquad |F(x)| < \gamma, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Нам также понадобится определение считающей функции последовательности.

Определения 5.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Считающая функция $\mathcal{N}(r; \Lambda)$ последовательности Λ определяется как*

$$\mathcal{N}(r; \Lambda) := \operatorname{card}\{m \in \mathbb{Z} : |\lambda_m| \leqslant r\}, \qquad r \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Говорят, что последовательность Λ имеет нулевую плотность, если

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mathcal{N}(r; \Lambda)}{r} = 0. \tag{5.6}$$

Следующий классический результат показывает, что класс A_b является подклассом класса A и устанавливает некоторые важные свойства класса A_b.

Теорема 5.4 (Теорема V.4.11 в [10])**.** *Пусть $F \in A_b$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Функция $F(\cdot)$ принадлежит классу A.*

(ii) *Индикаторная диаграмма функции $F(\cdot)$ (определение см., например, в* [10, § I.19]) *– это отрезок $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ мнимой оси, где*

$$\sigma_- := -h_F(\pi/2), \qquad \sigma_+ := h_F(-\pi/2) \qquad \text{и} \qquad \sigma_- \leqslant \sigma_+. \tag{5.7}$$

(iii) *Если $\sigma_- < \sigma_+$, то $F(\cdot)$ имеет счетную последовательность нулей $\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ (с учетом кратности). Для каждого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ все* *нули $F(\cdot)$, кроме подпоследовательности нулевой плотности, лежат в секторах*

$$S_\varepsilon^+ := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \varepsilon\} \quad \text{и} \quad S_\varepsilon^- := \{z \in \mathbb{C} : |\pi - \operatorname{Arg} z| < \varepsilon\}, \quad (5.8)$$

и имеют следующую ненулевую плотность в каждом из секторов

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{N}(r; \Lambda \cap S_\varepsilon^\pm)}{r} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2\pi}. \quad (5.9)$$

Более того, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \delta_r, \qquad \text{где} \qquad \delta_r := \sum_{0<|\lambda_m|<r} \frac{1}{\lambda_m}. \quad (5.10)$$

(iv) *Если $\sigma_- = \sigma_+$, то $F(\cdot)$ – экспоненциальная функция, т. е. $F(z) \equiv e^{-i\sigma z + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. В частности, $F(\cdot)$ не имеет нулей.*

Далее покажем, что в самом общем случае характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$ – это функция класса A_b, что уже дает некоторую полезную информацию о распределении его нулей. В следующем результате мы предполагаем только, что матричные функции $B(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ суммируемы без ограничительного условия “вложения носителей” (1.19).

Предложение 5.5. *Пусть суммируемые матричные функции $B(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ заданы соотношениями* (1.3)–(1.4). *Пусть также характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$, заданный в* (5.1), *отличен от тождественного нуля. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Определитель $\Delta_Q(\cdot)$ принадлежит классу A_b, т. е. $\Delta_Q \in A_b$, и его индикаторная диаграмма – отрезок $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ мнимой оси для некоторых $\sigma_- \leqslant \sigma_+$.*

(ii) *Если $\sigma_- < \sigma_+$, то $\Delta_Q(\cdot)$ имеет счетную последовательность нулей $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ (с учетом кратности), считающая функция которой удовлетворяет асимптотической формуле* (5.9).

Доказательство. (i) Начнем с доказательства того, что $\Phi(x,\cdot) = \Phi_Q(x,\cdot) = (\varphi_{jk}(x,\cdot))_{j,k=1}^n$ является целой матричной функцией не более чем экспоненциального типа для любого $x \in [0,\ell]$. Интегрируя уравнение (2.2), придем к соотношению

$$\Phi(x,\lambda) = I_n + \int_0^x (i\lambda B(t) - Q(t)) \cdot \Phi(t,\lambda)\, dt, \quad x \in [0,1], \ \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.11)$$

Применяя лемму Гронуолла (см., например, [3, 10.5.1.3]) к (5.11), получим

$$\begin{aligned}|\Phi(x,\lambda)| &:= \max_{j,k\in\{1,\dots,n\}} |\varphi_{jk}(x,\lambda)| \\ &\leqslant \exp\left(\int_0^x \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{k=1}^n |i\lambda\delta_{jk}\beta_j(x) - Q_{jk}(x)|\,dt\right) \\ &\leqslant \exp\left(\int_0^x \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \Big(|\beta_j(t)|\cdot|\lambda| + \sum_{k=1}^n |Q_{jk}(t)|\Big)\,dt\right) \\ &\leqslant \exp(\rho(x)\cdot|\lambda| + n\|Q\|_{L^1}), \qquad x\in[0,\ell], \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad (5.12)\end{aligned}$$

где

$$\rho(x) := \int_0^x \max\{|\beta_1(t)|,\dots,|\beta_n(t)|\}\,dt, \qquad x\in[0,\ell]. \qquad (5.13)$$

Характеристический определитель $\Delta_Q(\lambda) = \det(C + D\Phi(\ell,\lambda))$ удовлетворяет оценке, аналогичной (5.12), в силу основных свойств определителей. Это доказывает первую оценку в (5.4), т. е., что $\Delta_Q(\cdot)$ – целая функция не более чем экспоненциального типа.

Далее, покажем, что $\Phi(x,\cdot)$ ограничена на действительной оси для любого $x\in[0,\ell]$. Полагая $\Psi := \Phi_0^{-1}\Phi$, дифференцируя тождество $\Phi = \Phi_0\Psi$ и применяя (2.2)–(2.3), придем к соотношению

$$-Q\Phi_0\Psi = \Phi_0\Psi' \qquad \text{или} \qquad \Psi' = -\Phi_0^{-1}Q\Phi_0\Psi. \qquad (5.14)$$

Интегрируя это соотношение с учетом начального условия $\Psi(0,\lambda) = I_n$, получим

$$\Psi(x,\lambda) = I_n - \int_0^x \Phi_0^{-1}(t,\lambda)Q(t)\Phi_0(t,\lambda)\Psi(t,\lambda)\,dt, \quad x\in[0,\ell], \ \lambda\in\mathbb{C}. \quad (5.15)$$

Из (2.4) очевидно, что матричная функция $\Phi_0(x,\cdot)$ ограничена на действительной оси для любого $x\in[0,\ell]$. Значит, применяя лемму Гронуолла к (5.15), получим, что матричная функция $\Psi(x,\cdot)$ также ограничена на действительной оси. Так как $\Phi = \Phi_0\Psi$, то же самое справедливо и для $\Phi(x,\cdot)$. Характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$ наследует от $\Phi(\ell,\cdot)$ свойство ограниченности на действительной оси в силу представления (5.1). Поэтому по определению 5.2 имеем $\Delta_Q \in A_b$.

Теорема 5.4(ii) гарантирует, что индикаторная диаграмма $\Delta_Q(\cdot)$ – это отрезок $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ мнимой оси для некоторых $\sigma_- \leqslant \sigma_+$, что завершает доказательство части (i).

(ii) Утверждение вытекает из теоремы 5.4(iii) и части (i). □

Заметим, что предложение 5.5 не устанавливает никаких разумных ограничений на индикаторную диаграмму $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot)$. Если выполнено условие "вложения носителей" (1.19), то можно достаточно хорошо оценить $\sigma_\pm$ из ключевого представления (5.2). В оставшейся части статьи мы всегда предполагаем, что числа $b_1, \dots, b_n$, заданные (2.1), отличны от нуля и канонически упорядочены (1.10) для некоторого $n_- \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Следствие 5.6. *В условиях предложения 5.5 пусть выполняется условие* (1.19). *Тогда индикаторная диаграмма* $\Delta_Q(\cdot)$ *– это отрезок* $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ *мнимой оси, удовлетворяющий следующим оценкам:*

$$\min\{b_-, \widetilde{b}_-\} \leqslant \sigma_- \leqslant \sigma_+ \leqslant \max\{b_+, \widetilde{b}_+\}. \tag{5.16}$$

Здесь числа $\widetilde{b}_\pm$ *и* $b_\pm$ *заданы соотношениями* (4.4) *и* (1.11) *соответственно. Кроме того, если* $n_- \in \{1, \dots, n-1\}$, *то*

$$\widetilde{b}_- \leqslant \sigma_- \leqslant \sigma_+ \leqslant \widetilde{b}_+. \qquad \text{т. е.} \quad [\sigma_-, \sigma_+] \subset [\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+]. \tag{5.17}$$

Доказательство. Из представления (2.24) очевидно, что "невозмущенный" характеристический определитель $\Delta_0(\cdot)$ удовлетворяет оценкам

$$-h_{\Delta_0}(\pi/2) \geqslant b_- \qquad \text{и} \qquad h_{\Delta_0}(-\pi/2) \leqslant b_+. \tag{5.18}$$

Объединяя представление (4.5) с оценками (5.18) и леммой Римана-Лебега, получим

$$\sigma_- := -h_{\Delta_Q}(\pi/2) \geqslant \min\{b_-, \widetilde{b}_-\} \text{ и } \sigma_+ := h_{\Delta_Q}(-\pi/2) \leqslant \max\{b_+, \widetilde{b}_+\}. \tag{5.19}$$

Из предложения 5.5(ii) вытекает, что индикаторная диаграмма $\Delta_Q(\cdot)$ совпадает с $[i\sigma_-, i\sigma_+]$, где $\sigma_\pm$ заданы в (5.19) (см. также теорему 5.4(ii)). Из этого следует требуемая оценка (5.16). Если $n_- \in \{1, \dots, n-1\}$, то вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \supset [b_-, b_+]$ вытекает из предложения 4.9(i) и гарантирует неравенства (5.17) в силу (5.16). □

Далее, напомним следующее общее свойство функций типа синуса (см. определение 2.5), содержащееся неявно в [16, предложения 4.6

и 4.7]. Доказательство использует вышеприведенную оценку (2.22) для функций типа синуса и теорему Руше.

Лемма 5.7. *Пусть $F_0(\cdot)$ – функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ для некоторых $\sigma_- < \sigma_+$. Пусть также $f \in L^1[\sigma_-, \sigma_+]$. Тогда функция*

$$F(z) := F_0(z) + \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} f(u)e^{izu}\,du, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{5.20}$$

– также типа синуса с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-, i\sigma_+]$.

Кроме того, последовательности нулей

$$\Lambda_0 = \{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}} \quad \text{и} \quad \Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

(с учетом кратности) функций $F_0(\cdot)$ и $F(\cdot)$ соответственно можно упорядочить таким образом, чтобы выполнялась следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_m = \lambda_m^0 + o(1) \qquad \text{при} \qquad m \to \infty, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{5.21}$$

В случае, когда граничные условия (1.2) регулярны, о характеристическом определителе $\Delta_Q(\cdot)$ можно сказать гораздо больше по сравнению с предложением 5.5 и следствием 5.6, когда выполнено вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. Еще раз напомним, что числа $\widetilde{b}_\pm$ и $b_\pm$ заданы в (4.4) и (1.11) соответственно. А именно, в следующем результате мы покажем, что $\Delta_Q(\cdot)$ – функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[ib_-, ib_+]$; мы также установим точную асимптотическую формулу для нулей $\Delta_Q(\cdot)$.

Теорема 5.8. *Пусть матричные функции $B(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ удовлетворяют условиям (1.3)–(1.4) и (1.19), и пусть выполнено вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. Далее, пусть граничные условия (1.2) регулярны. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Определитель $\Delta_Q(\cdot)$ является функцией типа синуса с индикаторной диаграммой $[ib_-, ib_+]$.*

(ii) *Последовательность нулей $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ (с учетом кратности) функции $\Delta_Q(\cdot)$ может быть занумерована так, что выполнена следующая асимптотическая формула:*

$$\lambda_m = \frac{2\pi m}{b_+ - b_-} + O(1), \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{5.22}$$

В частности, эта последовательность лежит в полосе

$$\Pi_h = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant h\}$$

при некотором $h > 0$.

(iii) *Пусть* $\Lambda_0 = \{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *– последовательность нулей (с учетом кратности) характеристического определителя* $\Delta_0(\cdot)$ *(см.* (2.14)*), упорядоченная так, что* $\operatorname{Re}\lambda_m^0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_{m+1}^0$, $m \in \mathbb{Z}$. *Тогда последовательность* $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *можно упорядочить таким образом, чтобы выполнялась следующая точная асимптотическая формула:*

$$\lambda_m = \lambda_m^0 + o(1) \quad \textit{при} \quad m \to \infty, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{5.23}$$

(iv) *В частности, все вышеприведенные утверждения справедливы, если выполняется условие "фиксированного знака"* (4.24)*, т. е. если при п. в.* $x \in [0, \ell]$ *выполнено условие*

$$\beta_k(x) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_-, \qquad \beta_k(x) \geqslant 0, \quad n_- < k \leqslant n. \tag{5.24}$$

(v) *Более того, если выполнены громоздкие условия* (4.38)–(4.40)*, то все утверждения частей* (*i*)–(*iii*) *также справедливы.*

Доказательство. (i)–(iii) Так как граничные условия (1.2) регулярны, то из следствия 2.10 вытекает, что $\Delta_0(\cdot)$ – функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-, i\sigma_+] := [ib_-, ib_+]$. В силу вложения $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$, представление (4.5) из теоремы 4.2 переписывается в виде

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{b_-}^{b_+} g(u)e^{i\lambda u}\, du = \Delta_0(\lambda) + \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} g(u)e^{i\lambda u}\, du, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.25}$$

Следовательно, из леммы 5.7 вытекают все требуемые свойства, кроме асимптотической формулы (5.22). Для ее доказательства заметим, что из экспоненциально-полиномиальной формулы (2.24) для характеристического определителя $\Delta_0(\cdot)$ следует, что он является почти периодической целой функцией конечного порядка с нулями в полосе Π_h и индикаторной диаграммой $[ib_-, ib_+]$. Значит, из [10, теорема VI.2.3] вытекает, что $\lambda_m^0 = \frac{2\pi m}{b_+ - b_-} + O(1)$ при $m \in \mathbb{Z}$. Объединяя эту формулу с асимптотическим соотношением (5.23), получим формулу (5.22), что завершает доказательство.

(iv) В силу леммы (4.5), условие "фиксированного знака" (5.24) влечет вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$. Значит, все утверждения частей (i)–(iii) справедливы при предположении (5.24).

(v) Предположим теперь, что выполняются условия (4.38)–(4.40). Если $n_- \in \{1, \ldots, n-1\}$, то из предложения 4.9(iii) следует, что $b_- = \widetilde{b}_-$, в то время как предложение 4.9(ii) гарантирует, что $b_+ = \widetilde{b}_+$. В частности, выполнено вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$, откуда вытекают все утверждения частей (i)–(iii). Пусть $n_- = 0$. Тогда $b_- = 0$. Ввиду определения (4.4), условие (4.40) просто означает, что $\widetilde{b}_- \geqslant 0 = b_-$. В свою очередь, из тождества (4.23) следует, что $\widetilde{b}_+ \leqslant b_+$. Таким образом, вложение $[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+] \subset [b_-, b_+]$ снова выполняется. Случай $n_- = n$ рассматривается аналогично, что завершает доказательство. $\square$

Замечание 5.9. Ясно, что утверждение (iv) является частным случаем утверждения (v). Однако мы доказываем (iv) отдельно из-за его простоты и прозрачности. Более того, оно еще удобнее и проще в приложениях.

§6. О "плохом" распределении собственных значений

Мы завершаем эту статью описанием того, что произойдет, когда индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ шире, чем у $\Delta_0(\cdot)$. С этой целью установим следующее обобщение леммы 5.7.

Лемма 6.1. *Пусть $\sigma_\pm, \sigma_\pm^0 \in \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\sigma_- < \sigma_-^0 < \sigma_+^0 < \sigma_+. \tag{6.1}$$

Пусть $F_0(\cdot)$ – функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-^0, i\sigma_+^0]$, и пусть $\Lambda_0 = \{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}}$ – последовательность нулей $F_0(\cdot)$ (с учетом кратности).

Далее, пусть $g \in L^1[\sigma_-, \sigma_+]$ и $g(\cdot)$ не исчезает в точках σ_- и σ_+, т. е. для любого достаточно малого $\delta > 0$ выполняются следующие условия:

$$\int_{\sigma_-}^{\sigma_-+\delta} |g(u)|\, du > 0 \qquad \text{и} \qquad \int_{\sigma_+-\delta}^{\sigma_+} |g(u)|\, du > 0. \tag{6.2}$$

Положим

$$F(z) := F_0(z) + G(z), \qquad G(z) := \int_{\sigma_-}^{\sigma_+} g(u)e^{izu}\,du, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{6.3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Функция $F(\cdot)$ принадлежит классу A_b (см. определение 5.2) а ее индикаторная диаграмма – отрезок $[i\sigma_-, i\sigma_+]$.*

(ii) *Последовательность нулей $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ (с учетом кратности) функции $F(\cdot)$ имеет плотность $\frac{\sigma_+-\sigma_-}{\pi}$, которая строго больше плотности $\frac{b_+-b_-}{\pi}$ нулей функции $F_0(\cdot)$.*

Кроме того, последовательность Λ распадается на две непересекающиеся ветви, $\Lambda = \Lambda_{\mathrm{good}} \cup \Lambda_{\mathrm{bad}}$, с разным асимптотическим поведением.

(ii.a) *"Хорошая" ветвь $\Lambda_{\mathrm{good}} =: \{\lambda'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ лежит в некоторой полосе Π_h, а числа λ'_m "близки" к нулям функции $F_0(\cdot)$. А именно, последовательность Λ_{good} можно упорядочить таким образом, что справедлива следующая точная асимптотическая формула:*

$$\lambda'_m = \lambda^0_m + o(1) \qquad \text{при} \qquad m \to \infty, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{6.4}$$

(ii.b) *При каждом $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ все нули "плохой" ветви $\Lambda_{\mathrm{bad}} = \{\lambda''_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, кроме подпоследовательности нулевой плотности, лежат в секторах S^+_ε и S^-_ε, определенных в (5.8), и считающая функция для Λ_{bad} в этих секторах имеет следующую асимптотику:*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{N}(r; \Lambda_{\mathrm{bad}} \cap S^\pm_\varepsilon)}{r} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2\pi} - \frac{b_+ - b_-}{2\pi} > 0. \tag{6.5}$$

Более того, в любой горизонтальной полосе Π_h лежит только конечное число нулей "плохой" ветви $\Lambda_{\mathrm{bad}} = \{\lambda''_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{Im} \lambda''_m = \infty. \tag{6.6}$$

Доказательство. (i) Из леммы 2.7(iv) вытекает оценка (2.23) для функции $F_0(\cdot)$ (с $\sigma^0_\pm$ вместо $\sigma_\pm$). Это дает оценки (5.4) для $F_0(\cdot)$ и, значит, $F_0 \in A_b$. Очевидна следующая оценка:

$$\left|\int_{\sigma_-}^{\sigma_+} g(u)e^{izu}\,du\right| \leqslant \|g\|_{L^1} \cdot \left(e^{\operatorname{Im} z\cdot\sigma_-} + e^{\operatorname{Im} z\cdot\sigma_+}\right), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{6.7}$$

Объединяя ее с условием (6.2), получим, что $G \in A_b$ и что индикаторная диаграмма функции $G(\cdot)$ совпадает с $[i\sigma_-, i\sigma_+]$. Поэтому функция $F(\cdot) = F_0(\cdot) + G(\cdot)$ также класса A_b с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ (в силу неравенств (6.1)). В частности, из теоремы 5.4(iii) следует, что последовательность нулей функции $F(\cdot)$ счетна и имеет плотность $\frac{b_+ - b_-}{\pi}$. Обозначим ее через $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ (с учетом кратности).

(ii) По лемме 2.7(ii), все нули $F_0(\cdot)$ лежат в полосе Π_{h_0} для некоторого $h_0 > 0$,

$$\lambda_m^0 \in \Pi_{h_0}, \quad \text{т. е.} \ \ |\operatorname{Im}\lambda_m^0| \leqslant h_0, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{6.8}$$

(ii.a) Пусть $h > h_0$ фиксировано. Найдем распределение нулей $F(\cdot)$, лежащих в горизонтальной полосе Π_h. Здесь мы следуем доказательство предложения 4.6 из [16]. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. В частности, пусть $h_0 + \varepsilon < h$. Так как $F_0(\cdot)$ – функция типа синуса, то оценка (2.22) выполнена с некоторым $C_\varepsilon > 0$. В свою очередь, ограничивая эту оценку на значения $z \in \Pi_h$, имеем

$$|F_0(z)| > C_{h,\varepsilon}, \qquad z \in \Pi_h \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}_\varepsilon(\lambda_m^0) \tag{6.9}$$

с некоторым $C_{h,\varepsilon} > 0$. Так как $f \in L^1[\sigma_-, \sigma_+]$, то по лемме Римана-Лебега существует $R_{h,\varepsilon} > 0$ такое, что

$$\left|\int_{\sigma_-}^{\sigma_+} g(u) e^{izu}\, du\right| < C_{h,\varepsilon}, \qquad |z| > R_{h,\varepsilon}, \quad z \in \Pi_h. \tag{6.10}$$

Объединяя оценки (6.9) и (6.10) с определением (6.3) функции $F(\cdot)$, приходим к неравенству

$$|F_0(z) - F(z)| < |F_0(z)|, \qquad z \in \Pi_h \setminus \Omega_{h,\varepsilon}, \tag{6.11}$$

где

$$\Omega_{h,\varepsilon} := \big(\Pi_h \cap \mathbb{D}_{R_{h,\varepsilon}}(0)\big) \cup \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}_\varepsilon(\lambda_m^0). \tag{6.12}$$

В силу включения $\lambda_m^0 \in \Pi_{h_0}$, $m \in \mathbb{Z}$, и оценки $h_0 + \varepsilon < h$ имеем $\Omega_{h,\varepsilon} \subset \Pi_h$.

Из оценки (6.11) вытекает, что $|F(z)| > 0$ при $z \in \Pi_h \setminus \Omega_{h,\varepsilon}$. Следовательно, все нули $F(\cdot)$, лежащие в Π_h, должны принадлежать множеству $\Omega_{h,\varepsilon} \subset \Pi_h$. Из леммы 4.3 из [16] вытекает, что диаметры компонент связности объединения $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}_\varepsilon(\lambda_m^0)$ равномерно ограничены числом $N_0 \cdot \varepsilon$, где $N_0 > 0$ зависит только от $F_0(\cdot)$. В частности, каждая компонента связности $\Omega_{h,\varepsilon}$ ограничена. Значит, в силу оценки (6.11), можно применить теорему Руше к каждой из этих компонент связности и вывести, что функции $F_0(\cdot)$ и $F(\cdot)$ имеют в них одинаковое количество нулей (с учетом кратности). Пусть $\Lambda_h := \{\lambda_{h,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ – последовательность нулей $F(\cdot)$, лежащая в Π_h. Устремляя $\varepsilon \to 0$, можно доказать, что найдется упорядочивание последовательностей Λ_h и Λ_0, дающее следующую асимптотическую формулу:

$$\lambda_{h,m} = \lambda_m^0 + o(1) \qquad \text{при} \qquad m \to \infty, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{6.13}$$

См. предложение 4.13 из [18] для детального изложения этого факта.

Теперь зафиксируем $h > h_0$ и положим

$$\Lambda_{\text{good}} := \Lambda_h, \quad \Lambda_{\text{bad}} := \Lambda \setminus \Lambda_{\text{good}}.$$

Из (6.13) ясно, что Λ_{good} удовлетворяет асимптотическому соотношению (6.13), которое завершает доказательство этой части.

(ii.b) Для изучения последовательности Λ_{bad} докажем сначала соотношение (6.5). Теорема 5.4(iii), примененная к $F_0(\cdot)$ и $F(\cdot)$ как функциям класса A_b с индикаторными диаграммами $[i\sigma_-^0, i\sigma_+^0]$ и $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ соответственно, дает следующие соотношение для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{N}(r; \Lambda \cap S_\varepsilon^\pm)}{r} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2\pi} > 0, \tag{6.14}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{N}(r; \Lambda_{\text{good}} \cap S_\varepsilon^\pm)}{r} = \frac{\sigma_+^0 - \sigma_-^0}{2\pi} > 0. \tag{6.15}$$

Так как $\Lambda_{\text{bad}} = \Lambda \setminus \Lambda_{\text{good}}$, то соотношение (6.5) очевидно из (6.14)–(6.15) в силу свойства аддитивности считающей функции,

$$\mathcal{N}(r; \Lambda \cap S_\varepsilon^\pm) = \mathcal{N}(r; \Lambda_{\text{good}} \cap S_\varepsilon^\pm) + \mathcal{N}(r; \Lambda_{\text{bad}} \cap S_\varepsilon^\pm), \qquad r > 0. \tag{6.16}$$

Предположим теперь, что соотношение (6.6) нарушено. Тогда при некотором $H > h$ в полосе Π_H лежит бесконечно много элементов последовательности Λ_{bad}. Так как нули целой функции стремятся к бесконечности, то пересечение $\Lambda_{\text{bad}} \cap \Pi_H$ содержит сколь угодно большие (по модулю) нули. В силу (ii.a) все такие "большие" нули $F(\cdot)$ близки к нулям функции $F_0(\cdot)$. Но по построению последовательности Λ_{good}, только ее элементы "близки" к "далеким" нулям функции $F_0(\cdot)$ (с учетом кратности). Это противоречит тому, что $\Lambda_{\text{bad}} \cap \Lambda_{\text{good}} = \emptyset$. Поэтому соотношение (6.6) выполнено. $\square$

Непосредственно применяя лемму 6.1 к представлению (5.2) для характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot)$, приходим к следующему результату, демонстрирующему "плохое" поведение нулей определителя $\Delta_Q(\cdot)$ в "хорошем" регулярном случае. Мы приведем также критерий "плохого" поведения в терминах функции $g(\cdot)$ из представления 6.1. Напомним, что числа $\widetilde{b}_\pm$ и $b_\pm$ заданы в (4.4) и (1.11) соответственно.

Предложение 6.2. *Пусть матричные функции $B(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ удовлетворяют условиям (1.3)–(1.4), (1.19). Пусть граничные условия (1.2) регулярны, и пусть $\Lambda_0 = \{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}}$ – последовательность нулей определителя $\Delta_0(\cdot)$ (с учетом кратности).*

(i) *Предположим, что функция $\Delta_Q(\cdot)$ имеет индикаторную диаграмму $[i\sigma_-, i\sigma_+]$, где*

$$\sigma_- < b_- < b_+ < \sigma_+, \quad \text{т. е.} \quad [b_-, b_+] \text{ строго внутри } [\sigma_-, \sigma_+]. \tag{6.17}$$

Тогда последовательность нулей $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ определителя $\Delta_Q(\cdot)$ распадается на две ветви,

$$\Lambda = \Lambda_{\text{good}} \cup \Lambda_{\text{bad}}, \qquad \Lambda_{\text{good}} = \{\lambda'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \qquad \Lambda_{\text{bad}} = \{\lambda''_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \tag{6.18}$$

с совершенно различным поведением, описанным в (6.4)–(6.5) (если положить $\sigma_\pm^0 := b_\pm$). Именно, "хорошая" ветвь Λ_{good} лежит в полосе Π_h для некоторого $h > 0$ и удовлетворяет асимптотической формуле (6.4), т. е. она близка к нулям "невозмущенного" характеристического определителя $\Delta_0(\cdot)$. Наоборот, "плохая" ветвь $\Lambda_{\text{bad}} = \{\lambda''_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ имеет стремящиеся к бесконечности мнимые части, ненулевую плотность и удовлетворяет соотношению (6.5).

(ii) *Пусть $g \in L^1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+]$ – функция из представления (4.5). Нули определителя $\Delta_Q(\cdot)$ имеют неограниченные мнимые части в точности тогда, когда носитель функции $g(\cdot)$ не содержится в отрезке $[b_-, b_+]$, т. е. справедливо следующее соотношение:*

$$\int_{\widetilde{b}_-}^{b_-} |g(u)|\, du + \int_{b_+}^{\widetilde{b}_+} |g(u)|\, du > 0. \tag{6.19}$$

Доказательство. **(i)** Из теоремы 4.2 вытекает ключевое соотношение (4.5), т. е. для некоторого $g \in L^1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+]$ мы имеем

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u)e^{i\lambda u}\,du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.20}$$

где числа $\widetilde{b}_\pm$ заданы (4.4).

Так как граничные условия (1.2) регулярны, то в силу следствия 2.10 функция $\Delta_0(\cdot)$ типа синуса с индикаторной диаграммой $[ib_-, ib_+]$. Поскольку $\Delta_Q(\cdot)$ имеет индикаторную диаграмму $[i\sigma_-, i\sigma_+]$, удовлетворяющую (6.17), то из представления (6.20) и общих свойств преобразования Фурье следует, что $\operatorname{supp} g \subset [\sigma_-, \sigma_+]$ и что $g(\cdot)$ не "исчезает" в концах σ_- и σ_+, т. е. справедливо соотношение (6.2). Значит, лемма 6.1 применима к $\Delta_Q(\cdot)$ и $\Delta_0(\cdot)$ (если положить $\sigma^0_\pm = b_\pm$) и дает все требуемые свойства последовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ определителя $\Delta_Q(\cdot)$.

(ii) Если $\operatorname{supp} g \subset [b_-, b_+]$, то справедливо "хорошее" представление Фурье (5.25). Значит, лемма 5.7 применима к $\Delta_Q(\cdot)$ и дает, что этот определитель является функцией типа синуса. Следовательно, в этом случае нули определителя $\Delta_Q(\cdot)$ имеют ограниченные мнимые части.

Пусть теперь выполнено соотношение (6.19). Для некоторых σ_- и σ_+ имеем $\operatorname{supp} g \subset [\sigma_-, \sigma_+]$ и $g(\cdot)$ не "исчезает" в концах σ_- и σ_+, т. е. справедливы соотношения (6.2). Условие (6.19) гарантирует, что выполнено хотя бы одно из неравенств $\sigma_- < b_-$, $\sigma_+ > b_+$. Из представления (6.20) и основных свойств индикаторной функции вытекает, что индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ совпадает с отрезком $[\min\{\sigma_-, b_-\}, \max\{\sigma_+, b_+\}]$, строго большим, чем $[b_-, b_+]$ [1]. Поэтому те же рассуждения, что и в лемме 6.1, доказывают существование "плохой ветви" $\Lambda_{\text{bad}} = \{\lambda''_m\}$ нулей определителя $\Delta_Q(\cdot)$ с неограниченными мнимыми частями (и ненулевой плотностью). □

Замечание 6.3. **(i)** Предложение 6.2 остается справедливым для произвольных граничных условий при предположении, что индикаторная

[1]Здесь имеется одна трудность, когда, например, $\sigma_- < b_-$ и $\sigma_+ = b_+$. В этом случае требуемая оценка $h_{\Delta_Q}(-\pi/2) \leqslant b_+ = \sigma_+$ на индикатор вытекает из леммы Римана-Лебега и оценки снизу (2.22) на функцию типа синуса $\Delta_0(\cdot)$.

диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ не содержится в индикаторной диаграмме определителя $\Delta_0(\cdot)$. Для простоты изложения мы сформулировали этот результат для случая регулярных граничных условий, когда индикаторная диаграмма определителя $\Delta_0(\cdot)$ известна (и самая широкая).

(ii) Заметим, что в [23, 13, 15] граничная задача (1.1)–(1.2) исследовалась в случае нерегулярных граничных условий и постоянной матрицы B. Там было получено свойство полноты (и в некоторых случаях спектральный синтез) корневых векторов без анализа собственных значений. Если граничные условия нерегулярны, то даже для случая постоянной матрицы B, вообще говоря, индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ шире, чем у определителя $\Delta_0(\cdot)$. Значит, предложение 6.2 дополняет результаты из [23, 13, 15] с большей информацией о спектре граничной задачи (1.1)–(1.2).

Проверка условия (6.19) на практике может быть нетривиальной. Поэтому мы иллюстрируем предложение 6.2 конкретным 2×2-примером, где индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ действительно шире отрезка $[ib_-, ib_+]$. С этой целью пусть $\ell = 1$, $\beta_1, \beta_2 \in L^1[0,1]$ и предположим, что

$$b_- = b_1 = \rho_1(1) = \int_0^1 \beta_1(x)\,dx < 0, \tag{6.21}$$

$$b_+ = b_2 = \rho_2(1) = \int_0^1 \beta_2(x)\,dx > 0. \tag{6.22}$$

Далее, для $x \in [0,1]$ положим

$$\beta_{12}(x) := \beta_2(x) - \beta_1(x), \tag{6.23}$$

$$\rho_{12}(x) := \int_0^x \beta_{12}(t)\,dt = \rho_2(x) - \rho_1(x), \tag{6.24}$$

и пусть для некоторых $x_-, x_+ \in (0,1)$

$$a_- := \min_{x\in[0,1]} \rho_{12}(x) = \rho_{12}(x_-) < 0, \tag{6.25}$$

$$a_+ := \max_{x\in[0,1]} \rho_{12}(x) = \rho_{12}(x_+) > b_2 - b_1 = b_+ - b_-. \tag{6.26}$$

Предположим дополнительно, что

$$x_- < x_+ \qquad \text{и} \qquad \beta_1(x) \neq \beta_2(x) \quad \text{для п. в.} \;\; x \in [0,1]. \tag{6.27}$$

Пример 6.4. Приведем явный пример функций $\beta_1(\cdot)$ и $\beta_2(\cdot)$, удовлетворяющих свойствам (6.21)–(6.27). Пусть $b_1 < 0 < b_2$ фиксированы и пусть $\beta_1 \in L^1[0,1]$ – произвольная суммируемая функция такая, что $\int\limits_0^1 \beta_1(x)\,dx = b_1$. Пусть

$$\alpha \in \Big(0, \frac{1}{6}\Big), \quad x_- \in \Big(0, \frac{1}{3} - 2\alpha\Big), \quad x_+ := \frac{\frac{2}{3} + 2\alpha - x_-}{1 - 2x_-}, \tag{6.28}$$

$$\beta_2(x) := \beta_1(x) - \frac{b_2 - b_1}{\alpha} \cdot (x - x_-)(x - x_+), \quad x \in [0,1]. \tag{6.29}$$

Легко проверить, что $x_+ \in (x_-, 1)$ и $\int\limits_0^1 \beta_2(x)\,dx = b_2$. Второе условие в (6.27) очевидно из определения (6.29). Далее, заметим, что

$$\rho_{12}'(x) = \beta_2(x) - \beta_1(x) = -\frac{b_2 - b_1}{\alpha} \cdot (x - x_-)(x - x_+) \tag{6.30}$$

при $x \in [0,1]$. Значит, ясно, что x_- и x_+ – точки минимума и максимума функции $\rho_{12}(\cdot)$ соответственно. Это наблюдение и некоторые прямые вычисления влекут соотношения (6.25)–(6.26) с

$$a_- = \frac{b_2 - b_1}{\alpha} \cdot \frac{x_-^2}{6}(x_- - 3x_+) < 0, \tag{6.31}$$

$$a_+ = \frac{b_2 - b_1}{\alpha} \cdot \frac{x_+^2}{6}(x_+ - 3x_-) > b_2 - b_1. \tag{6.32}$$

Переходя к потенциальной матричной функции $Q(\cdot)$, предположим, что она имеет следующий специальный вид:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x)\beta_{12}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in [0,1], \tag{6.33}$$

где

$$q \in \mathrm{AC}[1, x_-] \cup \mathrm{AC}[x_-, x_+] \cup \mathrm{AC}[x_+, 1]. \tag{6.34}$$

Предположим дополнительно, что функция $q(\cdot)$ имеет разрывы в точках x_- и x_+,

$$q_- := q(x_- + 0) - q(x_- - 0) \neq 0, \tag{6.35}$$

$$q_+ := q(x_+ + 0) - q(x_+ - 0) \neq 0. \tag{6.36}$$

Наконец, введем следующий экспоненциальный полином:

$$P(z) := q_- \cdot e^{iza_-} - q_+ \cdot e^{iza_+} + q(1) \cdot e^{iz(b_2-b_1)} - q(0) \tag{6.37}$$

при $z \in \mathbb{C}$. Так как $a_- < 0 < b_2 - b_1 < a_+$, то очевидно (ср. со следствием 2.10), что если $q_- \cdot q_+ \neq 0$, то функция $P(\cdot)$ – типа синуса с индикаторной диаграммой $[ia_-, ia_+]$. Поэтому она имеет счетную последовательность нулей $\mathfrak{M}_0 = \{\mu_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}}$, лежащую в полосе Π_h для некоторого $h > 0$. Положим также

$$J_{13} := \det \begin{pmatrix} c_{11} & d_{11} \\ c_{21} & d_{21} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \ \ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \ \ D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \tag{6.38}$$

– матрицы из граничных условий (1.2). Теперь мы готовы дополнить предложение 6.2 явным примером, в котором индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ шире, чем для определителя $\Delta_0(\cdot)$ *в случае регулярных граничных условий.*

Следствие 6.5. *Пусть для интегрируемых функций $\beta_1(\cdot)$, $\beta_2(\cdot)$ выполняются свойства* (6.21)–(6.27), *а матричная функция $Q(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям* (6.33)–(6.36). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Разность характеристических определителей $\Delta_Q(\cdot)$ и $\Delta_0(\cdot)$ допускает следующее представление при $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) := i\lambda(\Delta_Q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)) = -J_{13}e^{ib_1\lambda}\left(P(\lambda) - \int_{a_-}^{a_+} f(t)e^{i\lambda u}\,du\right) \tag{6.39}$$

с некоторым $f \in L^1[a_-, a_+]$. Здесь числа $a_\pm$ заданы (6.25)–(6.26), *функция (типа синуса) $P(\cdot)$ задана* (6.37) *и число J_{13} задано* (6.38).

(ii) *Если $J_{13} \neq 0$, то $\widetilde{\Delta}(\cdot)$ – функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-, i\sigma_+]$, где*

$$\sigma_- := a_- + b_1 < b_1 = b_-, \qquad \sigma_+ := a_+ + b_1 > b_2 = b_+. \tag{6.40}$$

В частности, индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)(\in A_b)$ совпадает с отрезком $[i\sigma_-, i\sigma_+]$ мнимой оси, который строго шире, чем $[ib_-, ib_+] = [ib_1, ib_2]$.

(iii) *Пусть граничные условия* (1.2) *регулярны и $J_{13} \neq 0$. Тогда последовательность нулей $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ определителя $\Delta_Q(\cdot)$ распадается на две ветви,*

$$\Lambda = \Lambda_{\text{good}} \cup \Lambda_{\text{bad}}, \qquad \Lambda_{\text{good}} = \{\lambda'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \qquad \Lambda_{\text{bad}} = \{\lambda''_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \tag{6.41}$$

с совершенно различным поведением, описанным в (6.4)–(6.5) (*если положить* $\sigma^0_\pm := b_\pm$).

Доказательство. **(i)** С учетом специального верхнетреугольного вида (6.33) матричной функции $Q(\cdot)$ можно непосредственно решить начальную задачу (2.2) для 2×2-системы ОДУ следующим образом:

$$\Phi_Q(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda\rho_1(x)} & \varphi_{12}(x,\lambda) \\ 0 & e^{i\lambda\rho_2(x)} \end{pmatrix}, \tag{6.42}$$

при $x \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, где

$$\varphi_{12}(x,\lambda) = -e^{i\lambda\rho_1(x)} \int\limits_0^x q(t)\beta_{12}(t)e^{i\lambda(\rho_2(t)-\rho_1(t))}\,dt. \tag{6.43}$$

В свою очередь, объединяя эту формулу с соотношениями (6.21) и (6.33), получим, что

$$\Phi_Q(1,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda b_1} & \varphi_{12}(\lambda) \\ 0 & e^{i\lambda b_2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.44}$$

где

$$\varphi_{12}(\lambda) := -e^{i\lambda b_1} \int\limits_0^1 q(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\beta_{12}(t)\,dt. \tag{6.45}$$

Прямыми вычислениями получим

$$\Delta_Q(\lambda) = \det(C + D\Phi_Q(1,\lambda)) = \Delta_0(\lambda) + J_{13}\varphi_{12}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.46}$$

Для преобразования $\varphi_{12}(\cdot)$ проведем интегрирование по частям и воспользуемся специальной структурой (6.34)–(6.36) функции $q(\cdot)$. Для этого пусть $[a,b]$ – один из отрезков $[0,x_-]$, $[x_-,x_+]$, $[x_+,1]$ абсолютной непрерывности функции $q(\cdot)$. Тогда интегрирование по частям, с учетом определения (6.24), дает

$$\begin{aligned} i\lambda \int\limits_a^b q(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\beta_{12}(t)\,dt &= \int\limits_a^b q(t)\,d\big(e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\big) \\ &= \Big[q(x)e^{i\lambda\rho_{12}(x)}\Big]_a^b - \int\limits_a^b q'(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\,dt, \end{aligned} \tag{6.47}$$

где

$$\Big[q(x)e^{i\lambda\rho_{12}(x)}\Big]_a^b := q(b-0)\cdot e^{i\lambda\rho_{12}(b)} - q(a+0)\cdot e^{i\lambda\rho_{12}(a)}. \qquad (6.48)$$

В свою очередь, объединяя формулы (6.44) и (6.47), соотношения

$$\rho_{12}(0)=0, \quad \rho_{12}(1)=b_2-b_1$$

и определения (6.25)–(6.26), получим следующую формулу для $\varphi_{12}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} -i\lambda e^{-i\lambda b_1}\varphi_{12}(\lambda) &= i\lambda\left(\int_0^{x_-}+\int_{x_-}^{x_+}+\int_{x_+}^{1}\right) q(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\beta_{12}(t)\,dt \\ &= \Big[q(x)e^{i\lambda\rho_{12}(x)}\Big]_0^{x_-} + \Big[q(x)e^{i\lambda\rho_{12}(x)}\Big]_{x_-}^{x_+} + \Big[q(x)e^{i\lambda\rho_{12}(x)}\Big]_{x_+}^{1} \\ &- \int_0^1 q'(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\,dt = q(1)e^{i} - q(0) + q_-\cdot e^{i\lambda a_-} - q_+\cdot e^{i\lambda a_+} \\ &- \int_0^1 q'(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\,dt = P(\lambda) - \int_0^1 q'(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\,dt, \end{aligned} \qquad (6.49)$$

где функция $P(\cdot)$ задана (6.37).

Так как $q' \in L^1[0,1]$, $\rho_{12}'(x) = \beta_2(x) - \beta_1(x) \neq 0$ для п. в. $x \in [0,1]$ и выполнены соотношения (6.25)–(6.26), то возможно некоторое обобщение замены переменной $u = \rho_{12}(t)$ в интеграле в правой части (6.49). Именно, найдется $f \in L^1[a_-, a_+]$ такая, что

$$\int_0^1 q'(t)e^{i\lambda\rho_{12}(t)}\,dt = \int_{a_-}^{a_+} f(u)e^{i\lambda u}\,du, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (6.50)$$

Подставляя это тождество в представление (6.49), получим желаемое представление (6.39).

(ii) Так как $J_{13} \neq 0$, то, применяя лемму 5.7 к функции $\widetilde{\Delta}(\cdot)$ с учетом представления (6.39), получим, что $\widetilde{\Delta}(\cdot)$ – функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[i\sigma_-, i\sigma_+]$. Напомним, что индикаторная диаграмма определителя $\Delta_0(\cdot)$ содержится в $[ib_-, ib_+]$ и, согласно (6.40), $\sigma_- < b_- < b_+ < \sigma_+$. Следовательно, из представления

$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \widetilde{\Delta}(\lambda)/(i\lambda)$ легко вытекает, что индикаторная диаграмма определителя $\Delta_Q(\cdot)$ совпадает с $[i\sigma_-, i\sigma_+]$. В силу предложения 5.5(i), включение $\Delta_Q \in A_b$ всегда выполняется, что завершает доказательство этой части.

(iii) Эта часть очевидным образом вытекает из части (ii) и предложения 6.2(i). □

Список литературы

1. G. D. Birkhoff, *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations.* — Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1908), 373–395.
2. G. D. Birkhoff, R. E. Langer, *The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order.* — Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **58** (1923), 49–128.
3. J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis. Pure and Applied Mathematics*, Vol. X Academic Press, New York–London, 1960.
4. P. Djakov, B. Mityagin, *Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators.* — Math. Nachr. **283**, No. 3 (2010), 443–462.
5. P. Djakov and B. Mityagin, *Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions.* — Indiana Univ. Math. J. **61**, No. 1 (2012), 359–398.
6. F. Gantmacher, *Theory of Matrices*, AMS Chelsea publishing, (1959).
7. A. M. Gomilko, L. Rzepnicki, *On asymptotic behaviour of solutions of the Dirac system and applications to the Sturm-Liouville problem with a singular potential.* — J. Spect. Theory **10**, No. 3 (2020), 747–786.
8. V.É. Katsnel'son, *Exponential bases in L^2.* — Funct. Anal. Appl. **5**, No. 1 (1971), 31–38.
9. B. Ya. Levin, *Exponential bases in L^2.* — Zapiski Matem. Otd. Fiz.-Matem. F-ta Khar'kovskogo Un-ta i Khar'kovskogo Matem. Ob-va **27**, No. 4 (1961), 39-48.
10. B. Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Transl. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence 1964.
11. B. Ya. Levin,*Lectures on Entire Functions.* — Transl. Math. Monographs, **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996 (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, and V. Tkachenko).
12. B. M. Levitan, I. S. Sargsyan, *Sturm–Liouville And Dirac Operators*, Kluwer, Dordrecht (1991).
13. A. A. Lunyov, M. M. Malamud, *On spectral synthesis for dissipative Dirac type operators.* — Integr. Equ. Oper. Theory **90** (2014), 79–106.
14. A. A. Lunyov, M. M. Malamud, *On the Riesz dasis property of the root vector system for Dirac type* 2×2 *systems.* — Dokl. Math. **90**, No. 2 (2014), 556–561.
15. A. A. Lunyov, M. M. Malamud, *On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications.* — J. Spectral Theory **5**, No. 1 (2015), 17–70.
16. A. A. Lunyov, M. M. Malamud, *On the Riesz basis property of root vectors system for* 2×2 *Dirac type operators.* — J. Math. Anal. Appl. **441** (2016), 57–103.

17. A. A. Lunyov, M. M. Malamud, *On transformation operators and Riesz basis property of root vectors system for $n \times n$ Dirac type operators. Application to the Timoshenko beam model.* arXiv:2112.07248 (Submitted on 14 Dec 2021).
18. A. A. Lunyov, M. M. Malamud, *Stability of spectral characteristics of boundary value problems for 2×2 Dirac type systems. Applications to the damped string.* — J. Diff. Eq. **313** (2022), 633–742.
19. A. S. Makin, *Regular boundary value problems for the Dirac operator.* — Doklady Mathematics **101**, No. 3 (2020), 214–217.
20. A. S. Makin, *On the spectrum of two-point boundary value problems for the Dirac operator.* — Diff. Eq. **57**, No. 8 (2021), 993–1002.
21. A. S. Makin, *On convergence of spectral expansions of Dirac operators with regular boundary conditions.* — Math. Nachr. **295**, No. 1 (2022), 189–210.
22. M. M. Malamud, *Similarity of Volterra operators and related questions of the theory of differential equations of fractional order.* — Trans. Moscow Math. Soc. **55** (1994), 57–122.
23. M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, *On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations.* — J. Funct. Anal. **263** (2012), 1939–1980.
24. V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications.* — Operator Theory: Advances and Appl. **22**, Birkhäuser Verlag, Basel (1986).
25. M. Marcus, *Determinants of Sums.* — College Math. J., March, 1990.
26. J. S. Muldowney, *Compound matrices and ordinary differential equations.* — Rocky Mountain J. Math. **20**, No. 4 (1990), 857–872.
27. M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*, Part I, Frederick Ungar Publishing Co., New York (1967).
28. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskij, V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Springer-Verlag (1984).
29. L. Rzepnicki, *Asymptotic behavior of solutions of the Dirac system with an integrable potential.* — Integral Equations Operator Theory, **93**, Article number: 55 (2021), 24 p, arXiv:2011.06510.
30. A. M. Savchuk, I. V. Sadovnichaya, *Spectral analysis of a one-dimensional Dirac system with summable potential and a Sturm–Liouville operator with distribution coefficients.* — Sovrem. Mat. Fundam. Napravl. **66**, No. 3 (2020), 373–530.
31. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, T̂he Dirac operator with complex-valued summable potential. — Math. Notes **96**, Nos. 5–6 (2014), 777–810.
32. B. Schwarz, *Totally positive differential systems.* — Pacific J. Math **32** (1970), 203–229.
33. A. A. Shkalikov, *Regular spectral problems of hyperbolic type for systems of ordinary differential equations of the first order.* — Math. Notes, **110**, No. 5 (2021), 806–810.
34. J. D. Tamarkin, *Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier.* — Rend. Circ. Mat. Palermo **34**, No. 2 (1912), 345–382.
35. J. D. Tamarkin, *On some general problems of the theory of ordinary linear differential operators and the expansion of arbitrary functions into series*, Petrograd, 1917.

Lunev A., Malamud M. On characteristic determinants of boundary value problems for Dirac type systems.

The paper is concerned with the asymptotic behavior of the eigenvalues of the following $n \times n$ Dirac type equation

$$y' + Q(x)y = i\lambda B(x)y, \quad y = \operatorname{col}(y_1, \dots, y_n), \quad x \in [0, \ell],$$

on a finite interval $[0, \ell]$ subject to general regular boundary conditions $Cy(0)+Dy(\ell) = 1$ with $C, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Here $Q = (Q_{jk})_{j,k=1}^{n}$ is an integrable potential matrix and $B = \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = B^* \in L^1([0, \ell]; \mathbb{R}^{n\times n})$ is a diagonal matrix "weight". If $n = 2m$ and $B(x) = \operatorname{diag}(-I_m, I_m)$ this equation is equivalent to $n \times n$ Dirac equation.

Under the assumption $\operatorname{supp}(Q_{jk}) \subset \operatorname{supp}(\beta_k - \beta_j)$, we show that the deviation of the characteristic determinants $\Delta_Q(\cdot)$ and $\Delta_0(\cdot)$ of this boundary value problem (BVP) and the unperturbed BVP (with $Q \equiv 0$) is a Fourier transform of some integrable function,

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_{\widetilde{b}_-}^{\widetilde{b}_+} g(u)e^{i\lambda u}\, du, \quad g \in L^1[\widetilde{b}_-, \widetilde{b}_+].$$

We apply this representation to study of zeros distribution of the characteristic determinant $\Delta_Q(\cdot)$ (eigenvalues of the above BPV) and show that $\Delta_Q(\cdot)$ is always an entire class A function of exponential type, which is *bounded on the real axis*. We also find conditions guaranteeing that $\Delta_Q(\cdot)$ is a sine-type function and provide sharp asymptotic formula for its zeros.

Finally, we show that if the entries of matrix $B(\cdot)$ can change sign within the segment $[0, \ell]$, then in general even in the case of regular boundary conditions eigenvalues split into two branches: the "good" branch lies in the horizontal strip and is close to the eigenvalues of the unperturbed BVP, while the "bad" branch has non-zero density and imaginary parts that tend to infinity. We illustrate this effect on a concrete 2×2 example.

Российский Университет Дружбы Народов,
Математический институт им. С. М. Никольского,
ул. Орджоникидзе, 3, Москва
E-mail: malamud3m@gmail.com

Поступило 4 ноября 2022 г.