Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

Д. В. Кориков

ОБ УНИТАРНЫХ ИНВАРИАНТАХ СЕМЕЙСТВА ОДНОМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

• Унитарные инварианты семейства подпространств - отдельная тема в линейной алгебре и функциональном анализе: см. [1–3]. Здесь рассматривается случай, когда все пространства семейства одномерны. Он встретился при исследовании алгебры эйконалов метрического графа [4], что и послужило поводом для написания данной заметки.

• Пусть A и B – подпространства вещественного гильбертова пространства H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Углом между A и B называется число

$$A^\wedge B := \arccos \|P_B P_A\| \in [0, \pi/2]$$

(здесь и далее P_L есть ортогональный проектор на подпространство L). Напомним, что угол между одномерным подпространством L и любым подпространством M совпадает с углом между L и проекцией L на M. Если $e \in L$ - единичный вектор, то косинус этого угла равен $\|P_M e\|$.

Пусть $\mathfrak{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ есть семейство подпространств в H. Назовем *конфигурацией* $\mathcal{L}$ упорядоченный набор углов

$$\begin{array}{ll} \varphi_i := L_i^\wedge(L_1 + \dots + L_{i-1}) & (i = 1, \dots, m), \\ \varphi_{ij} := L_i^\wedge L_j & (i, j = 1, \dots, m,\ i < j), \\ \varphi_{ij,k} := (L_i + L_j)^\wedge L_k & (i, j, k = 1, \dots, m,\ i < j < k). \end{array} \tag{1}$$

Семейства подпространств $\mathfrak{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ и $\mathfrak{L}' = \{L'_1, \dots, L'_m\}$ *унитарно эквивалентны*, если существует такой унитарный оператор U в H, что $L'_k = UL_k$ для всех $k = 1, \dots, m$. Следующий результат означает, что в случае $\dim L_1 = \dots = \dim L_m = 1$ конфигурация $\mathcal{L}$ является полным набором унитарных инвариантов $\mathcal{L}$.

Лемма 0.1. *Пусть $\mathfrak{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$, $\mathfrak{L}' = \{L'_1, \dots, L'_m\}$ – семейства одномерных подпространств в H и $\{\varphi_i, \varphi_{ij}, \varphi_{ij,k}\}$, $\{\varphi'_i, \varphi'_{ij}, \varphi'_{ij,k}\}$ – их*

Ключевые слова: конечное семейство подпространств, полная система унитарных инвариантов семейства.

THANKS ???

конфигурации, соответственно. Тогда для унитарной эквивалентности $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_i = \varphi_i', \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ij}', \quad \varphi_{ij,k} = \varphi_{ij,k}'$$

для всех i, j, k.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность индукцией по m. База индукции $m = 2$ очевидна. Теперь пусть утверждение леммы верно для $m < N$. Тогда при $m = N$ и $i < N$ имеем $L_i' = UL_i$, где $U^* = U^{-1}$. Для всех $i < N$ выберем единичные векторы $x_i \in L_i$ и положим $x_i' = Ux_i$, тогда $x_i' \in L_i')$. Выберем единичные векторы $x_N \in L_N$ и $x_N' \in L_N'$. Рассмотрим проекции

$$y = P_{L_1+\dots+L_{N-1}}x_N, \quad y' = P_{L_1'+\dots+L_{N-1}'}x_N', \quad y'' = Uy.$$

В силу $\varphi_N = \varphi_N'$ имеем $\|y\| = \|y'\|$; из $\varphi_{iN} = \varphi_{iN}'$ следует, что $|(y, x_i)| = |(y', x_i')|$, а из $\varphi_{ij,N} = \varphi_{ij,N}'$ следует, что $\|P_{L_i+L_j}\, y\| = \|P_{L_i'+L_j'}\, y'\|$. Унитарность U влечет $\|y\| = \|y''\|$, $|(y, x_i)| = |(y'', x_i')|$ и $\|P_{L_i+L_j}\, y\| = \|P_{L_i'+L_j'}\, y''\|$. В итоге приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \|y\| = \|y'\| = \|y''\|, \qquad |(y, x_i)| = |(y', x_i')| = |(y'', x_i')|,\\ \|P_{L_i+L_j}\, y\| = \|P_{L_i'+L_j'}\, y'\| = \|P_{L_i'+L_j'}\, y''\|. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть

$$R_- := \big\{ j \in \{1, \dots, N-1\} \mid (y', x_j') = -(y'', x_j') \neq 0 \big\}. \tag{3}$$

и $R_+ := \{1, \dots, N-1\} \backslash R_-$, тогда

$$(y', x_i') = (y'', x_i'), \qquad i \in R_+. \tag{4}$$

Пусть F_σ ($\sigma = \pm$) есть линейная оболочка всех L_i, $i \in R_\sigma$. Предположим, что существует такая пара (i, j), что $i \in R_+$ и $j \in R_-$. Введем векторы

$$\begin{gathered} x_+ := x_i, \quad x_- := x_j, \quad x_+' := x_i', \quad x_-' := x_j',\\ z := P_{L_i+L_j}\, y, \quad z' := P_{L_i'+L_j'}\, y', \quad z'' := P_{L_i'+L_j'}\, y'', \end{gathered}$$

тогда

$$\begin{aligned} (z', x_+') &= (P_{L_i'+L_j'}y', x_i') = (y', P_{L_i'+L_j'}x_i') = (y', x_i') \overset{(4)}{=} (y'', x_i')\\ &= (y'', P_{L_i'+L_j'}x_i') = (P_{L_i'+L_j'}y'', x_i') = (z'', x_i') = (z'', x_+'), \end{aligned}$$

т.е. выполнено $(z', x_+') = (z'', x_+')$. Аналогично выводится равенство $(z', x_-') = -(z'', x_-')$.

Итак, $(z', x'_\pm) = \pm(z'', x'_\pm)$. Положим $z'_\pm := z' \pm z''$ и перепишем последнее равенство в виде $(z'_\mp, x'_\pm) = 0$. Заметим, что

$$(z'_\pm, z'_\mp) = \|z'\|^2 - \|z''\|^2 = \|P_{L'_i+L'_j} y'\|^2 - \|P_{L'_i+L'_j} y''\|^2 \overset{(2)}{=} 0.$$

Векторы $z'_\pm$ лежат в плоскости, натянутой на векторы x'_+ и x'_-. Поэтому из $z'_+ \perp z'_-$, $z'_\mp \perp x'_\pm$ следует, что $x'_+ \perp x'_-$. Поскольку $x'_\pm = Ux_\pm$, имеем $x_+ \perp x_-$. Отсюда, ввиду произвольности $i \in R_+$ и $j \in R_-$, вытекает, что $F_+ \perp F_-$.

Введем оператор V правилом

$$\begin{aligned} Vx &= \pm Ux, \qquad x \in F_\pm, \\ Vx &= Ux, \qquad x \in (L_1 + \dots + L_N)^\perp, \\ V(I - P_{L_1+\dots+L_{N-1}})\, x_N &= (I - P_{L'_1+\dots+L'_{N-1}})\, x'_N. \end{aligned}$$

Из ортогональности F'_+ и F'_- и равенства

$$\|(I-P_{L'_1+\dots+L'_{N-1}})\, x'_N\|^2 = 1-\|y'\|^2 \overset{(2)}{=} 1-\|y\|^2 = \|(I-P_{L_1+\dots+L_{N-1}})\, x_N\|^2$$

следует, что оператор V унитарен. Очевидно, что $VL_i = L'_i$ при $i < N$. Кроме того,

$$(Vy, x'_i) = \pm(Uy, x'_i) = \pm(y'', x'_i) \overset{(2)}{=} (y', x'_i), \qquad i \in R_\pm. \tag{5}$$

Поскольку линейная оболочка $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ есть все $L_1 + \dots + L_{N-1}$, из (5) следует, что $VP_{L_1+\dots+L_{N-1}} x_N = Vy = y' = P_{L'_1+\dots+L'_{N-1}} x_N$. Таким образом, $Vx_N = x'_N$ и $VL_N = L_N$. □

• Заметим, что числа $\varphi_{ij} = L_i^\wedge L_j$ $(i < j)$, составляющие лишь часть конфигурации, не образуют полной системы унитарных инвариантов семейства $\mathfrak{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$ и $\mathfrak{L}' = \{L'_1, L'_2, L'_3\}$ – семейства подпространств в $\mathbb{R}^3$, натянутых на единичные векторы $x_k \in L_k$ и $x'_k \in L'_k$, где

$$x_1 = x'_1 = (1, 0, 0)^t, \qquad x_2 = x'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big)^t,$$
$$x_3 = \Big(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}\Big)^t, \qquad x'_3 = \Big(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{4}\Big)^t.$$

Тогда $\cos\varphi_{12} = \cos\varphi'_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi_{23} = \cos\varphi'_{23} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\cos\varphi_{13} = \cos\varphi'_{13} = \frac{1}{4}$, однако $\sin\varphi_{12,3} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\sin\varphi'_{12,3} = \frac{\sqrt{11}}{4} \neq \sin\varphi_{12,3}$. Последнее неравенство делает существование унитарного оператора, связывающего $\mathfrak{L}$ с $\mathfrak{L}'$, невозможным, поскольку такой оператор должен сохранять углы между *любыми* подпространствами в $\mathbb{R}^3$.

• В заключение отметим, что вопрос о *минимальности* системы инвариантов (1) пока открыт.

Список литературы

1. Е. А. Морозова, Н. Н. Ченцов, Унитарные эквиварианты семейства подпространств. препринт ИПМ, М., №52/1974.
2. С. А. Кругляк, Ю. С. Самойленко, *Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов.* — Функц. анализ и его прил. **14**, вып. 1 (1980).
3. К. С. Сибирский, *Алгебраические инварианты системы матриц.* — Сиб. матем. журн. **9**, No. 1 (1968), 152–164.
4. М. И. Белишев, А. В. Каплун, *Каноническое представление C^*-алгебры эйконалов метрического графа.* — ПОМИ ПРЕПРИНТ 2 (2021).

Korikov D. V. On the unitary invariants of the family of one-dimensional subspaces.

The paper provides a complete system of the numerical unitary invariants of the finite family of subspaces in the Hilbert space. The invariants are the angles between the subspaces and the sums of subspaces, which belong to the family.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С-Петербург, Россия
E-mail: thecakeisalie@list.ru

Поступило 15 октября 2022 г.