Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

М. Н. Демченко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

Рассматривается ультрагиперболическое уравнение вида

$$(\Delta_t - \Delta_x + m^2)u = f, \tag{1}$$

в котором решение $u(x,t)$ и правая часть $f(x,t)$ суть функции в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, $d, n \geqslant 1$,

$$\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_d}^2, \quad \Delta_t = \partial_{t_1}^2 + \ldots + \partial_{t_n}^2,$$

m – положительная постоянная. В частном случае $n = 1$, $f = 0$, данное уравнение является (гиперболическим) уравнением Клейна–Гордона–Фока, описывающим свободное движение релятивистской бесспиновой частицы массы покоя m.

В работе рассматриваются решения $u(x,t)$, имеющие следующую асимптотику на бесконечности

$$u(s\theta, s\omega) = s^{-(d+n-1)/2} \sum_{\pm} U_\pm(\theta,\omega) e^{\pm is\, m\sqrt{1-\theta^2}} + O(s^{-(d+n+1)/2}),$$
$$s \to +\infty. \tag{2}$$

Здесь $(\theta,\omega) \in B^d \times S^{n-1}$, $B^d = \{\theta \in \mathbb{R}^d \mid |\theta| < 1\}$, $S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid |\omega| = 1\}$, $\theta^2 := |\theta|^2$. Соотношение (2) характеризует поведение решения на бесконечности при удалении точки вдоль времениподобных направлений. Мы найдем семейство решений, обладающих такой асимптотикой. Кроме того, для заданных функций $U_\pm$ (а точнее, одной из этих функций) и правой части f мы построим решение уравнения (1), для которого выполнено (2).

Ключевые слова: ультрагиперболическое уравнение, уравнение Клейна–Гордона–Фока, релятивистское волновое уравнение, асимптотика решения на бесконечности, задача рассеяния.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00627-а.

Поведение на бесконечности решений волнового уравнения, в которое переходит уравнение (1) при $n = 1$, $m = 0$, и его векторных аналогов изучалось в ряде работ (например, в [1–6]). Отметим, однако, существенное отличие полученных там результатов от асимптотики (2), которая имеет место при $m > 0$. Рассмотрим, для примера, случай $d = 3$, $n = 1$. Решение задачи Коши для волнового уравнения с финитными начальными данными и правой частью f обращается в нуль при удалении на бесконечность вдоль времениподобных направлений (принцип Гюйгенса). С другой стороны, при удалении на бесконечность вдоль *характеристических* направлений решения имеют нетривиальную асимптотику, которая выражается в терминах преобразования Радона начальных данных и некоторого интегрального преобразования правой части f. При этом решение однозначно определяется соответствующими асимптотическими коэффициентами [2]. Как будет показано в данной работе, в случае уравнения Клейна-Гордона-Фока (при $m > 0$) ситуация обратная: решения задачи Коши убывают сверхстепенным образом вдоль характеристических направлений, а вдоль времениподобных направлений имеют асимптотику вида (2). Мы установим это для некоторого семейства решений в более общем случае $n \geqslant 1$, не прибегая к анализу задачи Коши, которая в данной ситуации становится некорректной.

Для ультрагиперболических уравнений известно не так много корректных задач, как для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. В работе [7] изучена характеристическая задача для уравнения вида (1) с $m = 0$, $f = 0$, в которой решение $u(x, t)$ находится в области $|x| < |t|$ (или $|x| > |t|$) по его значениям на характеристическом конусе $|x| = |t|$. В упомянутой работе в случае произвольных $d, n \geqslant 1$ доказаны существование и единственность решения этой задачи в определенном классе, а также получена формула в квадратурах для u. В настоящей работе рассматривается задача для уравнения (1) с $m > 0$, в которой в качестве данных выступает один из асимптотических коэффициентов $U_\pm$ в разложении (2). Установлено существование решения такой задачи.

Автор благодарен А. П. Киселеву, указавшему ему на полученные ранее результаты для волнового уравнения, а также М. И. Белишеву и А. Ф. Вакуленко за полезные обсуждения.

§2. Построение решений, имеющих асимптотику (2)

Определим преобразование Фурье следующим образом

$$\widehat{v}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} v(x)dx$$

(здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве; в дальнейшем угловыми скобками мы также будем обозначать значение распределения на пробной функции). Для функции $v(x,t)$, определенной в "пространстве-времени" $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, преобразование Фурье удобно определить формулой

$$\widehat{v}(\xi,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^{d+n}} e^{i(-\langle x,\xi\rangle + \langle t,\tau\rangle)} v(x,t)dxdt.$$

Тогда обратное преобразование Фурье имеет вид

$$v(x,t) = (2\pi)^{-d-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{d+n}} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\tau\rangle)} \widehat{v}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Всюду далее предполагается, что правая часть f в уравнении (1) принадлежит классу Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+n})$. Применив к уравнению (1) преобразование Фурье, мы получим

$$(\xi^2 + m^2 - \tau^2)\widehat{u}(\xi,\tau) = \widehat{f}(\xi,\tau).$$

Тогда можно формально представить $\widehat{u}$ в виде

$$\begin{gathered} \widehat{u} = \widehat{u}^f + \widehat{u}^a, \\ \widehat{u}^f(\xi,\tau) = \frac{\widehat{f}(\xi,\tau)}{\xi^2 + m^2 - \tau^2}, \quad \widehat{u}^a(\xi,\tau) = \delta(\xi^2 + m^2 - \tau^2)a(\xi,\tau), \end{gathered} \tag{3}$$

что, по существу, является суммой частного решения неоднородного уравнения (u^f) и общего решения однородного уравнения (u^a с произвольной плотностью a). Ниже будет дано строгое определение функций u^f и u^a. В частности, в качестве регуляризации выражения $(\xi^2 + m^2 - \tau^2)^{-1}$, имеющего особенность на гиперповерхности

$$\Sigma_m = \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{d+n} \,|\, \xi^2 + m^2 - \tau^2 = 0\},$$

будет выбрана обобщенная функция, определяемая в терминах интеграла в смысле главного значения.

Применим формально к (3) обратное преобразование Фурье:

$$u = u^f + u^a, \tag{4}$$

$$u^f(x,t) = (2\pi)^{-d-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{d+n}} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\tau\rangle)} \frac{\widehat{f}(\xi,\tau)}{\xi^2+m^2-\tau^2}\, d\xi d\tau,$$

$$u^a(x,t) = (2\pi)^{-d-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{d+n}} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\tau\rangle)} \delta(\xi^2+m^2-\tau^2) a(\xi,\tau)\, d\xi d\tau.$$

Дальнейшими формальными преобразованиями можно привести выражение для u^f к виду

$$u^f(x,t) = (2\pi)^{-d-n}\, \mathrm{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}\times(0,\infty)} \frac{e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})} F(\xi,\sigma,\rho)}{1-\rho}\, d\xi dS_\sigma d\rho, \tag{5}$$

$$F(\xi,\sigma,\rho) = (\xi^2+m^2)^{n/2-1} \widehat{f}(\xi, \rho\sigma\sqrt{\xi^2+m^2}) \frac{\rho^{n-1}}{1+\rho},$$

в котором мы выбрали конкретную регуляризацию сингулярности $(1-\rho)^{-1}$, возникшей из сингулярности $(\xi^2+m^2-\tau^2)^{-1}$ в исходном выражении. А именно, интеграл в (5) понимается в смысле главного значения. Здесь и далее под dS понимается мера на единичной сфере S^{n-1}, индуцированная евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^n$; для сферы размерности нуль положим

$$dS_\sigma = \delta(\sigma-1) + \delta(\sigma+1).$$

Выражение (5), которое мы примем за определение функции u^f, обсуждается более подробно в п. 3. В частности, будет показано, что u^f – гладкое решение уравнения (1). Можно было бы выбрать регуляризацию интеграла в (5), отличную от интеграла в смысле главного значения. При этом мы получили бы решение, которое отличается от выбранного на решение однородного уравнения вида (1).

Далее, выражение для слагаемого u^a в (4) можно формально привести к виду

$$u^a(x,t) = (2\pi)^{-d-n} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}} e^{i\left(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\sigma\rangle\sqrt{\xi^2+m^2}\right)} A(\xi,\sigma)\, d\xi dS_\sigma, \tag{6}$$

где функция $A(\xi,\sigma)$ связана с $a(\xi,\tau)$ соотношением

$$A(\xi,\sigma)=\frac{1}{2}(\xi^2+m^2)^{n/2-1}a\left(\xi,\sigma\sqrt{\xi^2+m^2}\right).$$

Функция A определена на множестве $\mathbb{R}^d\times S^{n-1}$. Она, а стало быть, и функция u^a, зависит от значений a только на Σ_m. Определим $\mathcal{S}(\Sigma_m)$ как множество функций a на гиперповерхности Σ_m, которым соответствуют функции A из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d\times S^{n-1})$. Когда указанное условие выполнено, мы примем соотношение (6) за определение функции $u^a(x,t)$. Легко проверить, что она является гладким решением уравнения (1) с нулевой правой частью.

Для характеризации коэффициентов $U_\pm$ в разложении (2) мы введем класс функций на $B^d\times S^{n-1}$, имеющих “нуль бесконечного порядка” на границе ∂B^d. А именно, функция U по определению принадлежит $\mathcal{S}(B^d\times S^{n-1})$, если она является сужением на $B^d\times S^{n-1}$ функции из $C^\infty(\mathbb{R}^d\times S^{n-1})$, имеющей носитель в $\overline{B^d}\times S^{n-1}$.

Теорема 1. *Пусть $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+n})$, $a\in\mathcal{S}(\Sigma_m)$. Тогда функция $u(x,t)$ вида* (4) *является гладким решением уравнения* (1), *и для него справедлива асимптотика* (2). *Коэффициенты $U_\pm$ выражаются через f, a следующим образом*

$$\begin{aligned}U_\pm(\theta,\omega)=\frac{e^{\pm i\pi(d-n+1)/4}}{4\pi m}&\left(\frac{m}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\right)^{(d+n-1)/2}\\ &\times(a\mp i\pi\widehat{f})\left(\frac{\mp m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}},\frac{\mp m\omega}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

(*отметим, что для любых $(\theta,\omega)\in B^d\times S^{n-1}$ аргументы функции $a\mp i\pi\widehat{f}$ в правой части задают точку на Σ_m*).

Отметим необходимые условия на $U_\pm$, вытекающие из (7). В случае $f=0$ выполнено

$$U_\pm(-\theta,-\omega)=(\pm i)^{d-n+1}U_\mp(\theta,\omega),\tag{8}$$

тогда как в случае $a=0$ выполнено

$$U_\pm(-\theta,-\omega)=(\pm i)^{d-n-1}U_\mp(\theta,\omega).\tag{9}$$

Таким образом, коэффициенты $U_\pm$ в асимптотике (2) не могут быть произвольными функциями. В то же время, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+n})$, $U_+ \in \mathcal{S}(B^d \times S^{n-1})$. *Тогда функция*

$$a(\xi,\tau) = 4\pi m\, e^{-i\pi(d-n+1)/4} \left(\frac{2\pi}{|\tau|}\right)^{(d+n-1)/2} U_+\left(\frac{-\xi}{|\tau|}, \frac{-\tau}{|\tau|}\right) + i\pi \widehat{f}(\xi,\tau)$$

переменных $(\xi,\tau) \in \Sigma_m$ *принадлежит* $\mathcal{S}(\Sigma_m)$, *а соответствующее решение* $u(x,t)$ *вида* (4) *имеет асимптотику* (2) *с заданной функцией* U_+ *и функцией* $U_- \in \mathcal{S}(B^d \times S^{n-1})$, *которая может быть найдена по формуле* (7). *Более того, среди решений вида* (4) *с плотностью* a *из класса* $\mathcal{S}(\Sigma_m)$, *для которых коэффициент* U_+ *в* (2) *принимает заданные значения, указанное решение единственно.*

В формулировке теоремы 2 можно поменять ролями функции U_+ и U_-, то есть решение u можно построить по заданной функции U_- (и f). При этом соответствующее выражение для a принимает вид

$$a(\xi,\tau) = 4\pi m\, e^{i\pi(d-n+1)/4} \left(\frac{2\pi}{|\tau|}\right)^{(d+n-1)/2} U_-\left(\frac{\xi}{|\tau|}, \frac{\tau}{|\tau|}\right) - i\pi \widehat{f}(\xi,\tau).$$

Отметим, что существует ряд результатов, касающихся фундаментальных решений ультрагиперболических уравнений. Мы упомянем только работу [8], в которой рассматривалось уравнение (1) с $m = 0$, а также работы [9, 10], в которых изучен более общий случай. Можно было бы использовать фундаментальные решения для построения частных решений неоднородного уравнения (1). Однако, для получения их асимптотик, по-видимому, проще применить анализ Фурье и метод стационарной фазы, что и сделано в данной работе.

§3. Вспомогательные утверждения

Для функции $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ мы будем использовать следующее определение интеграла в смысле главного значения:

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx. \tag{10}$$

Нам понадобятся некоторые оценки, связанные с определением (10), в которых будут фигурировать следующие функционалы на функциях в $\mathbb{R}^n$ (k, p – целые неотрицательные числа):

$$|F|_{k,p} = \sup_{|\alpha| \leqslant k,\, x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^p |\partial^\alpha F(x)|. \tag{11}$$

Для $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$ имеем

$$\int\limits_{|x_n|>\varepsilon} - \int\limits_{|x_n|>\varepsilon'} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int\limits_{\varepsilon'<|x_n|<\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx_n,$$

где используется обозначение $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Покажем, что

$$\Bigg| \int\limits_{\varepsilon'<|x_n|<\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx_n \Bigg| \leqslant 2(\varepsilon - \varepsilon')(1 + |x'|)^{-n} |F|_{1,n}. \tag{12}$$

В самом деле, левая часть равна

$$\Bigg| \int\limits_{\varepsilon'<|x_n|<\varepsilon} \frac{1}{x_n} (F(x) - F(x', 0))\, dx_n \Bigg| \leqslant 2(\varepsilon - \varepsilon') \sup_{x_n} |\partial_{x_n} F(x', x_n)|,$$

откуда вытекает (12). Теперь мы можем оценить внешний интеграл по x' в предыдущей выкладке по абсолютной величине через $C_n(\varepsilon - \varepsilon')|F|_{1,n}$. Из этого следует существование предела в правой части (10) и оценка

$$\Bigg| \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx - \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x) dx \Bigg| \leqslant C_n \varepsilon |F|_{1,n}. \tag{13}$$

Далее для $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем

$$\Bigg| \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx_n \Bigg| \leqslant \Bigg| \int\limits_{|x_n|>1} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx_n \Bigg| + \Bigg| \int\limits_{\varepsilon<|x_n|<1} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx_n \Bigg|.$$

Первое слагаемое оценивается через

$$C \sup_{x_n} ((1 + |x_n|)\, |F(x', x_n)|) \leqslant C_n (1 + |x'|)^{-n} |F|_{0,n+1},$$

а второе оценивается с помощью (12). Проинтегрировав по x', мы получим

$$\Bigg| \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx \Bigg| \leqslant C_n |F|_{1,n+1}. \tag{14}$$

Из наших выкладок вытекает также равенство

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \, \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x_n} F(x)\, dx_n. \tag{15}$$

Рассмотрим случай, когда функция F в интеграле (10) зависит от параметра λ. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\partial_\lambda \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x,\lambda)\,dx = \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} \partial_\lambda F(x,\lambda)\,dx,$$

как только величины $|F(\,\cdot\,,\lambda)|_{0,n+1}$, $|\partial_\lambda F(\,\cdot\,,\lambda)|_{0,n+1}$ равномерно ограничены. Это следует из того, что при выполнении указанного условия интегралы в данном равенстве существуют, и, кроме того, несобственный интеграл в правой части сходится равномерно по λ. Предположим еще, что $|\partial_\lambda F(\,\cdot\,,\lambda)|_{1,n}$ равномерно ограничено. Тогда в силу (13) интеграл в правой части последнего равенства, а значит, и левая часть равенства, достигает своего предела при $\varepsilon \to 0$ равномерно по λ. Это означает, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} \partial_\lambda F(x,\lambda)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \partial_\lambda \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x,\lambda)\,dx \\ &= \partial_\lambda \left(\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x,\lambda)\,dx \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\partial_\lambda \left(\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x,\lambda)\,dx \right) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} \partial_\lambda F(x,\lambda)\,dx.$$

Справедливо аналогичное равенство для старших производных по λ:

$$\partial_\lambda^\alpha \left(\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x,\lambda)\,dx \right) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} \partial_\lambda^\alpha F(x,\lambda)\,dx, \tag{16}$$

если для любого α выполнено $|\partial_\lambda^\alpha F(\cdot,\lambda)|_{1,n+1} \leqslant C_\alpha$.

Покажем, что в интеграле вида (10) возможна замена переменной интегрирования. Мы рассмотрим только случай, когда $n = 1$, а функция F принадлежит $C_0^\infty(I)$, где $I \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал, содержащий точку нуль. Предположим, что $z(x)$ – гладкая функция на $\overline{I}$, такая что

$$z(0) = 0, \quad z'|_{\overline{I}} \neq 0. \tag{17}$$

Через $x(z)$ мы обозначим отображение, обратное к $z(x)$. Мы установим равенство

$$\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}F(x)\,dx = \text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{z}E(z)\,dz, \quad E(z) = \frac{z}{x(z)}|x'(z)|\,F(x(z)). \quad (18)$$

Функция $E(z)$ определяется приведенным выражением на интервале $z(I)$ и продолжается нулем на дополнение к нему. Заметим, что в силу условий (17) функция $E(z)$ не имеет сингулярности в нуле, а потому принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Предположим для определенности, что $z' > 0$ (случай $z' < 0$ требует очевидных модификаций). Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}F(x)\,dx = \int\limits_{z(\varepsilon)}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{z(-\varepsilon)} \frac{1}{z}E(z)\,dz. \quad (19)$$

Положим $h := z'(0)$. Тогда

$$\left| \int\limits_{z(\varepsilon)}^{\infty} - \int\limits_{h\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{z}E(z)\,dz \right| \leqslant \frac{|z(\varepsilon) - h\varepsilon|\,\sup|E|}{\min(z(\varepsilon), h\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \sup|E|.$$

Интеграл по интервалу $z < z(-\varepsilon)$ аналогичным образом приближается интегралом по $z < -h\varepsilon$. Тогда в силу (19) мы получаем, что

$$\left| \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}F(x)\,dx - \int\limits_{|z|>h\varepsilon} \frac{1}{z}E(z)\,dz \right| \leqslant C\varepsilon \sup|E|.$$

Устремив в этом неравенстве ε к нулю, мы получим (18).

Обратимся теперь к выражению (5) для функции $u^f(x,t)$. Оно имеет вид отличный от (10), так как множество интегрирования не является евклидовым пространством. Однако, определение интеграла в смысле главного значения очевидным образом переносится на этот случай. При этом роль функции F в (10) играет функция

$$e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})}F(\xi,\sigma,\rho), \quad (20)$$

определенная на множестве $(\xi,\sigma,\rho) \in \mathbb{R}^d \times S^{n-1} \times (0,\infty)$ (зависящая от x, t, как от параметров). Мы будем говорить, что функция на этом множестве принадлежит классу Шварца, если для нее конечны все функционалы $|\cdot|_{k,p}$, которые определяются по аналогии с (11) следующим образом. Выберем произвольный конечный атлас на сфере

S^{n-1}. Обозначим через γ карту из этого атласа, то есть диффеоморфизм открытого подмножества сферы (которое мы будем называть областью определения карты) на открытое подмножество $\mathbb{R}^{n-1}$ (через γ мы также будем обозначать точки этого подмножества $\mathbb{R}^{n-1}$, то есть координаты). Пусть с каждой картой γ связана гладкая функция $\chi_\gamma(\sigma)$ на сфере с носителем в области определения данной карты, причем

$$\sum_\gamma \chi_\gamma \equiv 1.$$

Положим

$$|F|_{k,p} = \sup(1+|\xi|+\rho)^p \, |\partial_\xi^\alpha \partial_\gamma^{\alpha'} \partial_\rho^{\alpha''} (\chi_\gamma(\sigma(\gamma))F(\xi, \sigma(\gamma)\,\rho))|,$$

где точная верхняя грань берется по всем картам γ из выбранного атласа, точкам ξ, γ, ρ и мультииндексам $\alpha, \alpha', \alpha''$, таким что $|\alpha|+|\alpha'|+\alpha'' \leqslant k$.

Заметим, что функция (20) принадлежит классу Шварца, как только это верно для $\widehat{f}(\xi,\tau)$ (см. (5)). Более того, функционалы $|\cdot|_{k,p}$ от нее и ее производных по (x,t) локально равномерно ограничены, что позволяет применять формулу (16). Имеем

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{d+n}(\Delta_t - \Delta_x + m^2)u^f(x,t)\\
&= \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}\times(0,\infty)} \frac{(\Delta_t - \Delta_x + m^2)\left(e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})}\right)F(\xi,\sigma,\rho)}{1-\rho}\, d\xi dS_\sigma d\rho\\
&= \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}\times(0,\infty)} \frac{(1-\rho^2)(\xi^2+m^2)e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})}F(\xi,\sigma,\rho)}{1-\rho}\, d\xi dS_\sigma d\rho\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}\times(0,\infty)} (\xi^2+m^2)^{n/2} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})}\widehat{f}(\xi, \sigma\rho\sqrt{\xi^2+m^2})\rho^{n-1}\, d\xi dS_\sigma d\rho\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n} (\xi^2+m^2)^{n/2} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\tau\rangle\sqrt{\xi^2+m^2})}\widehat{f}(\xi, \tau\sqrt{\xi^2+m^2})\, d\xi d\tau\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle t,\tau\rangle)}\widehat{f}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = (2\pi)^{d+n} f(x,t).
\end{aligned}$$

Таким образом, u^f является решением уравнения (1).

§4. Метод стационарной фазы

В этом параграфе мы рассмотрим поведение при $s \to +\infty$ интеграла

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x) e^{is\Phi(x)}\, dx, \tag{21}$$

предполагая, что

$$F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad |\partial^\alpha \Phi(x)| \leqslant C_\alpha (1+|x|)^{M_{|\alpha|}} \quad \forall \alpha \tag{22}$$

для некоторых целых неотрицательных чисел M_k, где $k \geqslant 0$. Сначала мы приведем следующую элементарную лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (22). *Пусть также для всех* $x \in \operatorname{supp} F$ *выполнено*

$$|\partial \Phi(x)| \geqslant C(1+|x|)^{-M}. \tag{23}$$

Тогда для любого N *справедливо*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{is\Phi(x)} dx = O(s^{-N}), \quad s \to \pm\infty.$$

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{is\Phi(x)} dx = -is^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{F(x)}{|\partial\Phi(x)|^2} \langle \partial\Phi(x), \partial\rangle e^{is\Phi(x)}\, dx$$

$$= is^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\langle \partial\Phi(x), \partial\rangle + \Delta\Phi(x)) \left(\frac{F(x)}{|\partial\Phi(x)|^2} \right) e^{is\Phi(x)}\, dx.$$

Ввиду наших предположений о функциях F и Φ множитель, стоящий перед экспонентой под интегралом, является функцией из класса Шварца в $\mathbb{R}^n$ и его носитель не шире $\operatorname{supp} F$. Последнее означает, что оценка (23) имеет место на носителе этой функции, и мы снова можем применить наше рассуждение. После достаточного количества итераций мы можем получить перед интегралом множитель s^{-N} для любого N. □

Далее, как и в п. 3, мы используем обозначение $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (22). *Пусть также для всех* $x \in \operatorname{supp} F$ *выполнено*

$$|\partial_{x'} \Phi(x)| \geqslant C(1+|x|)^{-M}. \tag{24}$$

Тогда интеграл (21) *равен* $O(s^{-N})$ *при* $s \to \pm\infty$ *для любого* N.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ оценим интеграл

$$\int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x) e^{is\Phi(x)}\, dx. \tag{25}$$

Этот интеграл равен

$$\begin{aligned}
&-is^{-1} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{F(x)}{x_n |\partial_{x'}\Phi(x)|^2} \langle \partial_{x'}\Phi(x), \partial_{x'}\rangle e^{is\Phi(x)}\, dx \\
&= is^{-1} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} (\langle \partial_{x'}\Phi(x), \partial_{x'}\rangle + \Delta_{x'}\Phi(x)) \left(\frac{F(x)}{|\partial_{x'}\Phi(x)|^2} \right) e^{is\Phi(x)}\, dx.
\end{aligned}$$

Ввиду наших предположений о функциях F и Φ мы снова получаем интеграл вида (25), в котором роль функции F играет другая функция F_1 из класса Шварца в $\mathbb{R}^n$, носитель которой не шире, чем $\mathrm{supp} F$. Последнее означает, что оценка вида (24) для функций F_1 и Φ выполнена, а значит, мы можем повторить это рассуждение. После ряда итераций, мы получим, что интеграл (25) равен

$$s^{-N} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F_N(x) e^{is\Phi(x)}\, dx,$$

где $F_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу (14) имеем

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F(x) e^{is\Phi(x)}\, dx \right| &= |s|^{-N} \left| \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x_n|>\varepsilon} \frac{1}{x_n} F_N(x) e^{is\Phi(x)}\, dx \right| \\
&\leqslant C|s|^{-N} |F_N e^{is\Phi}|_{1,n+1}.
\end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$|F_N e^{is\Phi}|_{1,n+1} \leqslant |s|\, |F_N|_{1,n+1+M_0+M_1},$$

где M_0, M_1 – показатели из последнего неравенства в предположении (22). $\square$

Лемма 3. *Пусть $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда для всех $N \geqslant 0$ и $s > 0$ справедливо*

$$\left| \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{z} F(z) e^{isz}\, dz - i\pi F(0) \right| \leqslant C_N |F|_{N+1,2}\, s^{-N}. \tag{26}$$

Доказательство. Интеграл в левой части (26) равен значению распределения $\mathcal{P}_{1/z}$ на пробной функции $F(z)e^{isz}$ переменной z:

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{z} F(z) e^{isz}\, dz = \left\langle \mathcal{P}_{1/z}, F(z)e^{isz} \right\rangle_z .$$

Полученное выражение равно значению распределения $(2\pi)^{-1}\widehat{\mathcal{P}_{1/z}}$ на обратном преобразовании Фурье указанной пробной функции. Последнее (как функция переменной ξ) равно $\check{F}(\xi + s)$. Поэтому, применив формулу

$$\widehat{\mathcal{P}_{1/z}}(\xi) = -i\pi\, \text{sgn}\xi,$$

мы получим

$$\left\langle \mathcal{P}_{1/z}, F(z)e^{isz} \right\rangle_z = -i\pi(2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \check{F}(-\xi - s)\, \text{sgn}\xi\, d\xi$$

$$= i/2 \int\limits_{\mathbb{R}} \check{F}(\xi) d\xi - i \int\limits_0^{\infty} \check{F}(-s - \xi)\, d\xi = i\pi F(0) - i \int\limits_{-\infty}^{-s} \check{F}(\xi)\, d\xi.$$

Второе слагаемое быстро убывает с ростом s. Его легко можно оценить через правую часть (26). □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (22), *и, кроме того, функция F имеет компактный носитель. Пусть также выполнены следующие условия на Φ:*

$$\partial\Phi(x) \neq 0, \quad x \in V, \tag{27}$$

$$\partial_{x'}\Phi(x', 0) \neq 0, \quad (x', 0) \in V \setminus \{0\}, \tag{28}$$

$$\partial_{x'}\Phi(0) = 0, \quad \det \partial^2_{x'}\Phi(0) \neq 0, \tag{29}$$

где V – окрестность объединения $\mathrm{supp} F \cup \{0\}$*. Тогда (*$\mathrm{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))$ *равно разности количества положительных и отрицательных собственных чисел матрицы* $\partial^2_{x'}\Phi(0)$*)*

$$\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n} F(x) e^{is\Phi(x)}\,dx = i\pi\,\mathrm{sgn}(\partial_{x_n}\Phi(0)) \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{(n-1)/2} \times |\det \partial^2_{x'}\Phi(0)|^{-1/2} e^{i\pi\,\mathrm{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))/4} e^{is\Phi(0)} F(0) + O(s^{-(n+1)/2}), \quad s\to+\infty. \tag{30}$$

Доказательство. Из условия (27) и первого условия в (29) следует, что $\partial_{x_n}\Phi(0)\neq 0$. Пусть гладкая функция $\chi(x)$ имеет носитель в окрестности нуля, в которой выполнено $\partial_{x_n}\Phi\neq 0$. Пусть также $\chi(x)=1$ при малых x. Левую часть в (30) можно представить в виде суммы

$$\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n}(\chi F e^{is\Phi})(x)\,dx + \text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n}((1-\chi)F e^{is\Phi})(x)\,dx. \tag{31}$$

Покажем, что второе слагаемое равно $O(s^{-N})$ при $s\to+\infty$ для любого N. Разобьем его на сумму двух слагаемых

$$\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n}\zeta(x_n)((1-\chi)F e^{is\Phi})(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n}(1-\zeta(x_n))((1-\chi)F e^{is\Phi})(x)\,dx,$$

где ζ – функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, равная единице в окрестности нуля. Ввиду условия (27) и компактности носителя функции $F(x)$ ко второму слагаемому применима лемма 1. В качестве функции $F(x)$ в лемме 1 следует взять выражение

$$(1-\zeta(x_n))(1-\chi(x))F(x)/x_n.$$

Ввиду условия (28) к первому слагаемому в предыдущем выражении применима лемма 2, если функция ζ сосредоточена в достаточно малой окрестности нуля.

Обратимся к первому слагаемому в (31). С помощью (15) его можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx'\ \text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x_n}(\chi F e^{is\Phi})(x)\,dx_n. \tag{32}$$

Условие $\partial_{x_n}\Phi\neq 0$, которое выполнено на носителе подинтегральной функции, позволяет сделать замену переменной интегрирования $x_n \mapsto$

$z=\Phi(x',x_n)-\Phi(x',0)$ (обратное отображение мы обозначим $x_n(x',z)$) во внутреннем интеграле по формуле (18), что дает

$$e^{is\Phi(x',0)}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{z}\frac{z}{x_n(x',z)}|\partial_z x_n(x',z)|\,\chi(x)F(x)e^{isz}\,dz.$$

К полученному интегралу применима лемма 3. Поскольку $z/x_n|_{z=0}=\partial_{x_n}\Phi(x',0)$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{z}{x_n(x',z)}|\partial_z x_n(x',z)|\,\chi(x)F(x)\big|_{z=0}&=(\chi F\operatorname{sgn}\partial_{x_n}\Phi)(x',0)\\&=(\chi F)(x',0)\operatorname{sgn}\partial_{x_n}\Phi(0).\end{aligned}$$

Мы получаем, что интеграл (32) при $s\to+\infty$ равен

$$i\pi\operatorname{sgn}\partial_{x_n}\Phi(0)\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(\chi F e^{is\Phi})(x',0)\,dx'+O(s^{-N}),$$

где N произвольно. Ввиду (29) к интегралу в полученном выражении применим стандартный метод стационарной фазы (если носитель функции $\chi(x)$ сосредоточен в достаточно малой окрестности нуля), который дает следующую асимптотику:

$$\left(\frac{2\pi}{s}\right)^{(n-1)/2}|\det\partial^2_{x'}\Phi(0)|^{-1/2}e^{i\pi\operatorname{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))/4}e^{is\Phi(0)}F(0)+O(s^{-(n+1)/2}).$$

Таким образом, мы получаем (30). □

§5. Асимптотика функции u^f

Представим интеграл в (5) в виде суммы

$$\begin{aligned}&\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}\times(0,\infty)}\frac{e^{i(\langle x,\xi\rangle-\langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})}\zeta(\rho)F(\xi,\sigma,\rho)}{1-\rho}\,d\xi dS_\sigma d\rho\\&+\int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}\times(0,\infty)}\frac{e^{i(\langle x,\xi\rangle-\langle t,\sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2+m^2})}(1-\zeta(\rho))F(\xi,\sigma,\rho)}{1-\rho}\,d\xi dS_\sigma d\rho,\end{aligned}\tag{33}$$

где $\zeta(\rho)$ – функция из $C_0^\infty(0,+\infty)$, равная единице в окрестности точки $\rho=1$. Замена $\tau=\rho\sigma$ во втором слагаемом дает

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n}\frac{e^{i(\langle x,\xi\rangle-\langle t,\tau\rangle\sqrt{\xi^2+m^2})}(\xi^2+m^2)^{n/2-1}(1-\zeta(|\tau|))\widehat{f}(\xi,\tau\sqrt{\xi^2+m^2})}{1-\tau^2}\,d\xi d\tau.$$

При $x = s\theta$, $t = s\omega$, показатель стоящей под интегралом экспоненты принимает вид

$$is\Phi(\xi, \tau; \theta, \omega) = is\left(\langle\theta, \xi\rangle - \langle\omega, \tau\rangle\sqrt{\xi^2 + m^2}\right).$$

Эта экспонента под интегралом умножается на выражение, которое как функция переменных (ξ, τ) принадлежит классу Шварца. Кроме того,

$$|\partial_{\xi,\tau}\Phi| \geqslant |\partial_\tau\Phi| = \left|\omega\sqrt{\xi^2 + m^2}\right| \geqslant m, \tag{34}$$

поэтому к рассматриваемому интегралу применима лемма 1, а значит, он равен $O(s^{-N})$ при $s \to \infty$ для произвольного N.

Обратимся к первому слагаемому в (33). При $x = s\theta$, $t = s\omega$ оно принимает вид

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times S^{n-1} \times (0,\infty)} \frac{1}{1-\rho}\, e^{is\Phi(\xi,\sigma,\rho;\theta,\omega)}\, F_\zeta(\xi, \sigma, \rho)\, d\xi dS_\sigma d\rho, \tag{35}$$

где

$$\Phi(\xi, \sigma, \rho; \theta, \omega) = \langle\theta, \xi\rangle - \langle\omega, \sigma\rangle\rho\sqrt{\xi^2 + m^2}, \tag{36}$$
$$F_\zeta(\xi, \sigma, \rho) = \zeta(\rho)F(\xi, \sigma, \rho).$$

Пусть γ – карта на сфере S^{n-1}. Через γ мы также будем обозначать соответствующие координаты, пробегающие открытое подмножество $\mathbb{R}^{n-1}$, а под $\partial_\gamma\Phi$ мы будем понимать производную

$$\partial_\gamma(\Phi(\xi, \sigma(\gamma), \rho; \theta, \omega)).$$

(В случае $n = 1$ мы будем считать, что $\gamma = \sigma = \pm 1$.) Пусть $\chi(\sigma)$ – гладкая функция на сфере S^{n-1} с носителем в области определения карты γ. Перейдем от интеграла (35) к аналогичному интегралу для функции

$$F_{\chi\zeta}(\xi, \sigma, \rho) = \chi(\sigma)F_\zeta(\xi, \sigma, \rho),$$

который мы запишем в виде

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}} \frac{1}{1-\rho}\, e^{is\Phi(\xi,\sigma(\gamma),\rho;\theta,\omega)} F_{\chi\zeta}(\xi, \sigma(\gamma), \rho) J(\gamma)\, d\xi d\gamma d\rho, \tag{37}$$

где $J = \partial S_\sigma / \partial\gamma$ есть якобиан замены переменной $\sigma \mapsto \gamma(\sigma)$ (при $n = 1$ интеграл по γ равен сумме по $\gamma = \pm 1$, и, кроме того, $J = 1$, $\gamma(\sigma) = \sigma$). Мы взяли область интегрирования, более широкую, чем область определения подынтегрального выражения. Такая запись, однако, имеет смысл, поскольку подинтегральная функция гладко продолжается нулем на указанную область интегрирования.

Для применения леммы 4 нам нужно найти точки (ξ, σ, ρ), в которых выполнено $\rho = 1$, $\partial_\xi \Phi = 0$, а также (если $n > 1$) $\partial_\gamma \Phi = 0$. При $n > 1$ из последнего условия следует, что $\sigma(\gamma) = \pm\omega$. При $n = 1$ полученное равенство выполнено автоматически, так как ω и σ принимают значения ± 1. Далее

$$\partial_\xi \Phi = \theta - \frac{\langle \omega, \sigma \rangle \rho\, \xi}{\sqrt{\xi^2 + m^2}} = \theta \mp \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + m^2}}. \tag{38}$$

Поэтому условие $\partial_\xi \Phi = 0$ означает

$$\xi^2 = \frac{m^2 \theta^2}{1 - \theta^2}, \quad \xi = \pm \frac{m\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}.$$

Таким образом, мы нашли две критические точки (ξ, σ, ρ):

$$(\xi, \sigma) = \pm \left(\frac{m\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}, \omega \right), \quad \rho = 1. \tag{39}$$

Мы можем покрыть сферу S^{n-1} конечным числом карт и выбрать соответствующие этим картам функции $\chi(\sigma)$ так, чтобы сумма этих функций была тождественно равна единице на сфере. Тогда интеграл (35) равен сумме интегралов вида (37). Рассмотрим сначала карту γ, область определения которой не содержит точек $\pm\omega$ (это необходимо только в случае $n > 1$). Покажем, что в этом случае интеграл (37) равен $O(s^{-N})$ для любого N. Ввиду леммы 2 для этого достаточно, чтобы на носителе подинтегральной функции было выполнено $|\partial_{\xi,\gamma} \Phi| \geqslant c > 0$. Имеем ($j \leqslant n - 1$)

$$\partial_{\gamma_j} \Phi = -\langle \omega, \partial_{\gamma_j} \sigma \rangle \rho \sqrt{\xi^2 + m^2}.$$

При $\sigma(\gamma) \neq \pm\omega$ всегда найдется j, для которого $\langle \omega, \partial_{\gamma_j} \sigma \rangle \neq 0$, так как гиперплоскость, касательная к сфере S^{n-1} в точке σ, не ортогональна ω. Кроме того, на носителе подинтегральной функции переменная ρ отделена от нуля, поэтому $|\partial_{\gamma_j} \Phi| \geqslant c > 0$. Это означает, что лемма 2 применима к интегралу (37).

Таким образом, для вычисления асимптотики интеграла (35) достаточно рассмотреть интегралы (37) для карт γ, область определения которых содержит $\pm\omega$. Пусть область определения карты γ содержит точку ω, не содержит $-\omega$, при этом области определения других карт не содержат ω. В частности, из этого следует, что для соответствующей функции χ выполнено $\chi(\omega) = 1$ (в случае $n = 1$, когда ω, $\sigma = \pm 1$, мы считаем, что $\chi(\omega) = 1$, $\chi(-\omega) = 0$). Асимптотика интеграла (37) определяется поведением подинтегральной функции в критической точке $\varkappa = (\xi, \sigma, \rho)$, которая дается равенством (39) со знаком $+$. Это вытекает из леммы 4. Для применения последней, однако, необходимо локализовать интеграл (37) по переменной ξ. Для этого мы введем еще одну гладкую срезку $\eta(\xi)$ с компактным носителем, равную единице в окрестности точки $\xi = m\theta/\sqrt{1-\theta^2}$ (см. (39)), и разобьем интеграл (37) на сумму

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}} \frac{-1}{\rho - 1}\, e^{is\Phi(\xi,\sigma(\gamma),\rho;\theta,\omega)}\, F_{\eta\chi\zeta}(\xi, \sigma(\gamma), \rho) J(\gamma)\, d\xi d\gamma d\rho$$

$$+\ \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}} \frac{-1}{\rho - 1}\, e^{is\Phi(\xi,\sigma(\gamma),\rho;\theta,\omega)}\, (1-\eta(\xi)) F_{\chi\zeta}(\xi, \sigma(\gamma), \rho) J(\gamma)\, d\xi d\gamma d\rho,$$

где

$$F_{\eta\chi\zeta}(\xi, \sigma, \rho) = \eta(\xi) F_{\chi\zeta}(\xi, \sigma, \rho).$$

Для оценки второго слагаемого мы вновь применим лемму 2. Обратимся к предположению (24) в этой лемме. Как следует из первого равенства в (38), если $\langle \omega, \sigma \rangle$ и ρ достаточно близки к единице, а ξ достаточно велико, то выполнено $|\partial_\xi \Phi| \geqslant c > 0$, поскольку $|\theta| < 1$. Для выполнения указанных условий мы потребуем, чтобы: карта γ на S^{n-1} была определена в достаточно малой окрестности точки ω; функция $\zeta(\rho)$ была отлична от нуля только в достаточно малой окрестности точки $\rho = 1$; разность $1 - \eta(\xi)$ была отлична от нуля только при достаточно больших ξ.

К первому слагаемому мы применим лемму 4. Критическую точку нуль в условиях леммы (а точнее, в (28), (29)) в нашей ситуации следует заменить на $\varkappa$. Условие (27) принимает вид $\partial_{\xi,\gamma,\rho}\Phi \neq 0$. Это, однако, вытекает из (34). В выполнении первого равенства условия (29) мы уже убедились. В условии (28) требуется, чтобы в окрестности носителя подинтегральной функции не было критических точек, отличных от $\varkappa$. В нашем случае это выполнено, поскольку область определения карты γ по нашему предположению не содержит точки $-\omega$, которая отвечает второй критической точке в (39).

Перейдем, наконец, к вычислению входящих в (30) величин. Выберем координатные оси так, чтобы было выполнено

$$\theta = |\theta| e_d \in \mathbb{R}^d, \quad \omega = e_n \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\Phi(\xi, \sigma, \rho; \theta, \omega) = |\theta|\xi_d - \sigma_n \rho \sqrt{\xi^2 + m^2},$$

а первое равенство в (38) принимает вид

$$\partial_\xi \Phi = |\theta| e_d - \frac{\sigma_n \rho \xi}{\sqrt{\xi^2 + m^2}}.$$

Рассматриваемая критическая точка $\varkappa$ описывается равенствами

$$\xi = \frac{m|\theta| e_d}{\sqrt{1-\theta^2}}, \quad \sigma = e_n, \quad \rho = 1.$$

Имеем

$$\Phi(\varkappa; \theta, \omega) = -m\sqrt{1-\theta^2}.$$

Далее ($k, j \leqslant d$)

$$\partial_{\xi_k} \partial_{\xi_j} \Phi = \frac{-\sigma_n \rho \delta_k^j}{\sqrt{\xi^2 + m^2}} + \frac{\sigma_n \rho \xi_k \xi_j}{(\xi^2 + m^2)^{3/2}}.$$

В точке $\varkappa$ получаем

$$\partial_{\xi_k} \partial_{\xi_j} \Phi(\varkappa; \theta, \omega) = \frac{-\delta_k^j}{\sqrt{\xi^2 + m^2}} + \frac{\xi^2 \delta_k^d \delta_j^d}{(\xi^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{-\delta_k^j \sqrt{1-\theta^2}}{m} + \frac{\xi^2 \delta_k^d \delta_j^d}{(\xi^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{-\sqrt{1-\theta^2}}{m}(\delta_k^j - \theta^2 \delta_k^d \delta_j^d).$$

Далее мы вычислим производные функции Φ по γ. Этот шаг требуется только при $n > 1$. Нам удобно считать, что для карты γ на сфере выполнено

$$\sigma(\gamma) = (\gamma, \sqrt{1-\gamma^2}). \tag{40}$$

Имеем ($k, j \leqslant n-1$)

$$\partial_{\gamma_j} \Phi = -\rho \sqrt{\xi^2 + m^2}\, \partial_{\gamma_j} \sigma_n = \rho \sqrt{\xi^2 + m^2}\, \frac{\gamma_j}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

$$\partial_{\gamma_k} \partial_{\gamma_j} \Phi = \rho \sqrt{\xi^2 + m^2} \left(\frac{\delta_k^j}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{\gamma_j \gamma_k}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \right).$$

В точке $\varkappa$ выполнено $\gamma = 0$, поэтому

$$\partial_{\gamma_k} \partial_{\gamma_j} \Phi(\varkappa; \theta, \omega) = \frac{m \delta_k^j}{\sqrt{1-\theta^2}}.$$

Далее ($k \leqslant d$, $j \leqslant n-1$)

$$\partial_{\xi_k}\partial_{\gamma_j}\Phi = \frac{\rho\xi_k\gamma_j}{\sqrt{(\xi^2+m^2)(1-\gamma^2)}}, \quad \partial_{\xi_k}\partial_{\gamma_j}\Phi(\varkappa;\theta,\omega)=0,$$

откуда

$$\det\partial^2_{\xi,\gamma}\Phi(\varkappa;\theta,\omega) = (\det\partial^2_\xi\Phi\ \det\partial^2_\gamma\Phi)(\varkappa;\theta,\omega)$$

(при $n=1$ мы полагаем по определению $\partial^2_{\xi,\gamma}\Phi = \partial^2_\xi\Phi$, $\det\partial^2_\gamma\Phi = 1$). Из полученных выше равенств следует, что

$$\det\partial^2_\xi\Phi(\varkappa;\theta,\omega) = \left(\frac{-\sqrt{1-\theta^2}}{m}\right)^d(1-\theta^2),$$

$$\det\partial^2_\gamma\Phi(\varkappa;\theta,\omega) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)^{n-1}.$$

Подытожим наши вычисления равенствами

$$\Phi(\varkappa;\theta,\omega) = -m\sqrt{1-\theta^2}, \quad |\det\partial^2_{\xi,\gamma}\Phi(\varkappa;\theta,\omega)| = \frac{(1-\theta^2)^{(d-n+3)/2}}{m^{d-n+1}},$$
$$\operatorname{sgn}(\partial^2_{\xi,\gamma}\Phi(\varkappa;\theta,\omega)) = n-1-d. \tag{41}$$

Нам также необходимо вычислить знак $\partial_\rho\Phi$ в точке $\varkappa$:

$$\partial_\rho\Phi(\varkappa;\theta,\omega) = -\sqrt{\xi^2+m^2} < 0.$$

Найдем J в интеграле (37). Имеем ($j \leqslant n-1$)

$$\partial_j\sigma = e_j + e_n\partial_j\sigma_n = e_j - \frac{\gamma_j e_n}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

поэтому в точке $\varkappa$, которой соответствует $\gamma = 0$, получаем

$$J(0) = |\det\{\langle\partial_j\sigma(0), \partial_k\sigma(0)\rangle\}_{j,k}|^{1/2} = 1.$$

Нам остается найти значение функции $F_{\eta\chi\zeta}$ в точке $\varkappa$:

$$F_{\eta\chi\zeta}(\varkappa) = F(\varkappa) = \frac{m^{n-2}}{2(1-\theta^2)^{n/2-1}}\,\widehat{f}\left(\frac{m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \frac{m\omega}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)$$

(мы учли, что в этой точке $\eta = \chi = \zeta = 1$). Таким образом, интеграл (37) при $s \to +\infty$ имеет асимптотику

$$i\pi\left(\frac{2\pi}{s}\right)^{(d+n-1)/2}\frac{m^{(d-n+1)/2}}{(1-\theta^2)^{(d-n+3)/4}}e^{i\pi\,(n-d-1)/4}e^{-is\,m\sqrt{1-\theta^2}}F(\varkappa)$$
$$+\,O(s^{-(d+n+1)/2}).$$

Старший член этой асимптотики может быть записан в виде

$$\frac{(2\pi)^{d+n}}{s^{(d+n-1)/2}}\, e^{-is\, m\sqrt{1-\theta^2}} U_-^f(\theta,\omega),$$

где

$$\begin{aligned} U_-^f(\theta,\omega) &= i\pi\,(2\pi)^{-(d+n+1)/2}\frac{m^{(d-n+1)/2}}{(1-\theta^2)^{(d-n+3)/4}} e^{i\pi\,(n-d-1)/4} F(\varkappa) \\ &= \frac{e^{i\pi(n-d+1)/4}\, m^{(d+n-3)/2}}{4(2\pi)^{(d+n-1)/2}(1-\theta^2)^{(d+n-1)/4}}\,\widehat{f}\left(\frac{m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \frac{m\omega}{\sqrt{1-\theta^2}}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь вторую критическую точку в (39), которую мы обозначим $\varkappa'$. В этом случае мы выберем координаты γ по аналогии с (40) следующим образом

$$\sigma(\gamma) = (\gamma, -\sqrt{1-\gamma^2}).$$

Тогда вычисления, аналогичные проделанным выше, дают равенства

$$\Phi(\varkappa';\theta,\omega) = m\sqrt{1-\theta^2}, \quad |\det \partial^2_{\xi,\gamma}\Phi(\varkappa';\theta,\omega)| = \frac{(1-\theta^2)^{(d-n+3)/2}}{m^{d-n+1}},$$
$$\operatorname{sgn}(\partial^2_{\xi,\gamma}\Phi(\varkappa';\theta,\omega)) = d-n+1 \tag{42}$$

и, кроме того,

$$\partial_\rho \Phi(\varkappa';\theta,\omega) = \sqrt{\xi^2+m^2} > 0.$$

Поэтому старший член асимптотики интеграла (37) имеет вид

$$\frac{(2\pi)^{d+n}}{s^{(d+n-1)/2}}\, e^{is\, m\sqrt{1-\theta^2}} U_+^f(\theta,\omega),$$

где

$$U_+^f(\theta,\omega) = \frac{e^{i\pi(d-n-1)/4}\, m^{(d+n-3)/2}}{4(2\pi)^{(d+n-1)/2}(1-\theta^2)^{(d+n-1)/4}}\,\widehat{f}\left(\frac{-m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \frac{-m\omega}{\sqrt{1-\theta^2}}\right).$$

Можно записать полученные для $U_\pm^f$ соотношения по-другому:

$$\begin{aligned} U_\pm^f(\theta,\omega) = \frac{e^{\pm i\pi(d-n-1)/4}}{4m}&\left(\frac{m}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\right)^{(d+n-1)/2} \\ &\times \widehat{f}\left(\frac{\mp m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \frac{\mp m\omega}{\sqrt{1-\theta^2}}\right). \end{aligned}$$

Соотношение (9) является следствием этой формулы.

§6. Асимптотика функции u^a

При $x(s) = s\theta$, $t(s) = s\omega$, имеем

$$u^a(s\theta, s\omega) = (2\pi)^{-d-n} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times S^{n-1}} e^{is\Phi(\xi,\sigma;\theta,\omega)} A(\xi,\sigma)\, d\xi\, dS_\sigma,$$

$$\Phi(\xi,\sigma;\theta,\omega) = \langle\theta,\xi\rangle - \langle\omega,\sigma\rangle\sqrt{\xi^2+m^2}. \tag{43}$$

Для нахождения асимптотики данного интеграла при $s \to +\infty$ мы применим метод стационарной фазы. Фазовая функция Φ совпадает с функцией, определенной в (36), суженной на множество $\{\rho = 1\}$. Это позволяет применить результаты вычислений из предыдущего параграфа. В частности, критические точки (ξ,σ), в которых $\partial_{\xi,\sigma}\Phi = 0$, определяются первым равенством в (39). Значения функции Φ и ее производных в критических точках, необходимые для нахождения асимптотики, даются формулами (41), (42). Обоснование применения метода стационарной фазы (локализация по переменной ξ, переход к локальным координатам на сфере S^{n-1}) вполне аналогично тому, которое было сделано в предыдущем параграфе, поэтому мы не будем здесь его повторять.

Итак, функция u^a имеет асимптотику вида (2), где в качестве коэффициентов $U_\pm$ выступают функции

$$U^a_\pm(\theta,\omega) = \frac{e^{\pm i\pi(d-n+1)/4}}{(2\pi)^{(d+n+1)/2}} \frac{m^{(d-n+1)/2}}{(1-\theta^2)^{(d-n+3)/4}}\, A\left(\frac{\mp m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \mp\omega\right).$$

В терминах плотности $a(\xi,\tau)$ это соотношение записывается в виде

$$U^a_\pm(\theta,\omega) = \frac{e^{\pm i\pi(d-n+1)/4}}{4\pi m} \left(\frac{m}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\right)^{(d+n-1)/2} \times a\left(\frac{\mp m\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \frac{\mp m\omega}{\sqrt{1-\theta^2}}\right).$$

Соотношение (8) является следствием этой формулы.

Полученные формулы для $U^f_\pm$, $U^a_\pm$ доказывают теорему 1. Формула (7) позволяет выразить плотность a через функцию $\widehat{f}$ и одну из функций $U_\pm$. Это приводит к соотношению, выписанному в формулировке теоремы 2. Включение $a \in \mathcal{S}(\Sigma_m)$ вытекает из этого соотношения. Плотность a определяется однозначно во всех точках Σ_m, что приводит к утверждению о единственности решения вида (4), имеющего заданный коэффициент U_+ (или U_-) в асимптотике (2). Таким образом, теорема 2 доказана.

§7. Асимптотическое поведение u вдоль характеристик

Обсудим поведение решения (4) при удалении точки (x,t) на бесконечность вдоль характеристических направлений, которые мы будем задавать единичными векторами $(\theta,\omega)\in S^{d-1}\times S^{n-1}$ и параметром $q\in\mathbb{R}$:

$$x(s)=(s+q)\theta,\quad t(s)=s\omega. \tag{44}$$

Для простоты будем считать, что $f=0$. Тогда $u=u^a$, и нам нужно исследовать поведение при $s\to\infty$ интеграла

$$u(x(s),t(s))=(2\pi)^{-d-n}\int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{n-1}} e^{is\Phi(\xi,\sigma;\theta,\omega)}e^{iq\langle\theta,\xi\rangle}a(\xi,\sigma)\,d\xi dS_\sigma,$$

где функция Φ определяется равенством (43). Произведение $e^{iq\langle\theta,\xi\rangle}$ $a(\xi,\sigma)$ как функция переменных (ξ,σ) принадлежит классу Шварца. Далее

$$|\partial_\xi\Phi|=\left|\theta-\frac{\langle\omega,\sigma\rangle\xi}{\sqrt{\xi^2+m^2}}\right|\geqslant 1-\frac{|\xi|}{\sqrt{\xi^2+m^2}}\geqslant\frac{C_m}{1+|\xi|}.$$

Это означает, что к интегралу в предыдущей формуле (после замены переменной σ локальными координатами) применима лемма 1, так как условие (23) выполняется для $M=1$. Таким образом, в рассматриваемом случае для любого N верно

$$u(x(s),t(s))=O(s^{-N}),\quad s\to\infty.$$

Частным случаем уравнения (1) является уравнение Клейна-Гордона-Фока ($n=1$, $f=0$), которое допускает корректную постановку задачи Коши с данными, например, на гиперповерхности $\{t=0\}$:

$$u|_{t=0}=u_0,\quad u|_{t=0}=u_1.$$

Если начальные данные u_0, u_1 принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, решение этой задачи записывается в виде (6) с плотностью $A(\xi,\sigma)$ (в данном случае $\sigma=\pm1$) вида

$$A(\xi,\pm1)=\frac{\widehat{u}_0(\xi)}{2}\pm\frac{i\widehat{u}_1(\xi)}{2\sqrt{\xi^2+m^2}}.$$

(В рассматриваемом случае $n = 1$ формула (6) с такой функцией A, разумеется, может быть получена стандартным методом Фурье.) Таким образом, наши результаты применимы к решению задачи Коши. В частности, из последнего равенства и формулы (7) следует, что асимптотическое поведение решения при удалении на бесконечность вдоль времениподобных направлений выражается через преобразование Фурье начальных данных. Однако, при удалении на бесконечность вдоль характеристических направлений решение убывает сверхстепенным образом. В этом виден отчетливый контраст в поведении решений уравнения Клейна-Гордона-Фока и волнового уравнения. Решения аналогичной задачи Коши для волнового уравнения убывают сверхстепенным образом вдоль времениподобных направлений (для нечетных d это следует из принципа Гюйгенса), а вдоль характеристических направлений имеют нетривиальную асимптотику. В случае $d = 3$ эта асимптотика имеет вид [2]

$$u(x(s), t(s)) = \frac{1}{4\pi s} \left(-\partial_q(Ru_0(\theta, q)) + Ru_1(\theta, q)\right) + o(s^{-1}), \quad s \to \pm\infty,$$

где $x(s)$, $t(s)$ определены в (44), R – преобразование Радона:

$$Rv(\theta, q) = \int\limits_{\langle x, \theta\rangle = q} v(x)\, dS_x.$$

Таким образом, в случае волнового уравнения поведение решений на бесконечности описывается в терминах преобразования Радона начальных данных (а не их преобразования Фурье).

Список литературы

1. P. D. Lax, R. S. Phillips, *Scattering Theory.* — New York–London: Academic Press, 1967. Перевод: П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния, Москва, Мир, 1971.
2. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения.* — Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (1970), 29–35, Ленинград, Наука, 1971.
3. H. E. Moses, R. T. Prosser, *Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations.* — SIAM J. Appl. Math. **50**, No. 5 (1990), 1325–1340.
4. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор).* — Оптика и спектроскопия **102**, No. 4 (2007), 661–681.
5. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об одной задаче управления для волнового уравнения в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 19–37.

6. А. Б. Плаченов, *Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 269–287.
7. А. С. Благовещенский, *О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения.* — Матем. сб. **63:105** (1964), No. 1, 137–168.
8. Georges de Rham, *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre.* — Annales de l'institut Fourier **8** (1958), 337–366.
9. В. М. Бабич, *Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения.* — Алгебра и анализ **3**, No. 5 (1991), 1–37.
10. N. Ortner, P. Wagner, *Fourier transformation of O(p, q)-invariant distributions. Fundamental solutions of ultra-hyperbolic operators.* — J. Math. Analys. Applic. **450** (2017), 262–292.

Demchenko M. N. Asymptotic properties of solutions to a certain ultrahyperbolic equation.

We consider a certain ultrahyperbolic equation in a Euclidean space being a generalization of Klein-Gordon-Fock equation. The behavior of solutions at points tending to infinity along timelike directions is studied. We examine the issue of existence of solutions possessing given asymptotic properties at infinity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 1 ноября 2022 г.