

Я. И. Грановский, М. М. Маламуд

**ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С
 $W^{-1,1}$ -МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно классическому результату Титчмарша (см. монографию [8, гл. 5]), реализация Дирихле оператора Штурма–Лиувилля

$$-d^2/dx^2 + q$$

с суммируемым потенциалом $q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности (см. Определение 2.6). На матричный случай этот результат был распространен разными методами в работах [16, 17] и [21] (см. также монографию [10]). Отметим, что в [17] рассматривался также случай матричного оператора Шредингера с конечным числом точек дельта-взаимодействий, а в [16] результаты статьи [17] обобщены на случай конечных некомпактных квантовых графов.

Основным объектом настоящей работы является трехчленное дифференциальное матричное выражение Штурма–Лиувилля вида:

$$\mathcal{L}(P, Q, R)y := R^{-1}(x)(-(P(x)y)') + Q(x)y), \quad y = (y_1, \dots, y_m)^\top. \quad (1.1)$$

Здесь матричные коэффициенты $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ предполагаются локально суммируемыми, а потенциальная матрица $Q(\cdot)$ – сингулярной и принадлежащей соболевскому пространству $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. При этом операторы, порожденные выражением (1.1), рассматриваются в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

Ключевые слова: операторы Шредингера, сингулярные потенциалы, регуляризация, дельта-взаимодействия, граничные тройки, функции Вейля, абсолютно непрерывный спектр.

Работа поддержана грантом Российского Научного фонда No. 20-61-46016.

Наш первый основной результат – обобщение теоремы Титчмарша на случай матричных сингулярных потенциалов. Именно, мы показываем, что при условии $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ и некоторых необременительных условиях на $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$, неотрицательный спектр реализации Дирихле L^D , как и любой другой самосопряженной реализации выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$, является лебеговским постоянной кратности m , ее сингулярный положительный спектр – пуст, а отрицательная часть реализации Дирихле L^D – компактна. Полученный результат значительно усиливает все предыдущие результаты в этом направлении.

При этом мы трактуем дифференциальное выражение (1.1), пользуясь регуляризацией, предложенной в работах [6, 7]. Впоследствии эта регуляризация использовалась для исследования спектральных свойств операторов вида (1.1) во многих работах (см., например, статью [14] и литературу в ней).

Весьма важный подкласс операторов, порожденных выражением (1.1) в $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$, образуют операторы Шредингера с дельта-взаимодействиями, т.е. операторы вида:

$$\mathbf{H}_{X_+, \alpha, Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q(\cdot) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \quad (1.2)$$

$$X_+ = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+.$$

Эти операторы являются объектами многочисленных исследований последних четырех десятилетий (см., например, монографии [11, 12], приложение [15], обзор [18] и литературу в них). Мы показываем, что для оператора (1.2) условие $Q \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ эквивалентно условиям

$$Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \quad (1.3)$$

Поэтому при этих условиях реализация Дирихле \mathbf{H}^D выражения (1.2) имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности m , а ее сингулярный положительный спектр – пуст.

Кроме того, мы исследуем спектральные свойства минимального оператора $L_{\min} = L := L(P, Q, R)$, порожденного выражением (1.1) на оси \mathbb{R} . Именно, мы показываем, что если минимальный оператор L в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ самосопряжен, то при условии

$$Q(\cdot) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$$

и необременительных условиях на $P(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ и $R(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ неотрицательный спектр оператора L является лебеговским постоянной кратности $2m$. Подчеркнем обнаруженный здесь любопытный эффект: абсолютная непрерывность спектра “положительной части” оператора $L = L^*$ в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ зависит лишь от поведения матричных коэффициентов $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$ и $R(\cdot)$ на одной из полуосей \mathbb{R}_+ или \mathbb{R}_- и не зависит от их поведения на дополнительной полуоси.

В частности, самосопряженный в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ оператор Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ вида:

$$\mathbf{H}_{X,\alpha,Q} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(\cdot) := -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k),$$

$$X = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

имеет лебеговский спектр на $\overline{\mathbb{R}_+}$ постоянной кратности $2m$ при следующих условиях на “положительную (отрицательную) часть” потенциальной матрицы $Q(\cdot)$:

$$Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$$

$$\left(Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^{m \times m}) \text{ и } \sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty \right). \quad (1.5)$$

Эти условия совпадают с условиями (1.3), для $X_+ := \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ – “положительной части” множества X . И здесь результат зависит лишь от поведения потенциальной матрицы $Q(\cdot)$ на одной из полуосей \mathbb{R}_+ или \mathbb{R}_- и не зависит от ее поведения на дополнительной полуоси.

Весьма частный случай этого результата получен ранее другим методом в работе К. Shubin Christ и G. Stolz [20]. Именно, считая в (1.4) $X = \mathbb{Z}$ и $Q_1(\cdot) = 0$, они доказали, что при условии $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ положительная часть спектра скалярного ($m = 1$) гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ абсолютно непрерывна и заполняет положительную полуось \mathbb{R}_+ .

Основным инструментом исследования является аппарат граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. [2], [3]). Именно, мы показываем, что соответствующая (неортогональная) спектральная мера из интегрального представления функции Вейля исследуемого оператора абсолютно непрерывна на \mathbb{R}_+ . Этот факт вместе с

известным результатом о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер самосопряженного оператора (см. [19]) позволяет получить упомянутые результаты об абсолютной непрерывности спектра самосопряженных реализаций выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$.

Обозначения. $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_- := (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$, $\overline{\mathbb{C}}_+ := \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$; $\mathbb{C}^{m \times m}$ – множество всех матриц порядка m , I_m , \mathbb{O}_m – единичная и нулевая матрицы порядка m , $|M| := \|M\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}$ – норма матрицы $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$; $\rho(T)$ – резольвентное множество замкнутого оператора T , $E_T(\cdot)$ – спектральная мера оператора $T = T^*$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – множество ограниченных операторов в \mathcal{H} , $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ – индикаторная функция измеримого множества \mathcal{K} ; $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_s(A)$, $\sigma_p(A)$ – абсолютно непрерывный, сингулярный и точечный спектр оператора A .

§2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО $W^{-1,1}$ -ПОТЕНЦИАЛА

Здесь мы регуляризуем дифференциальное выражение $\mathcal{L}(P, Q, R)$, получаем новое выражение $\mathcal{L} := \mathcal{L}(P, R, \sigma_1, \sigma_2)$, и исследуем свойства функции Вейля $M^D(z)$, соответствующей реализации Дирихле L^D выражения \mathcal{L} , а также ее предельное представление $M^D(\lambda + i0)$. Главная цель – показать, что неотрицательная часть произвольного самосопряженного расширения выражения \mathcal{L} (в том числе и расширения L^D) является чисто абсолютно непрерывной с постоянной кратностью m . Также мы показываем, что отрицательная часть каждой самосопряженной реализации дифференциального выражения \mathcal{L} – компактна.

2.1. Регуляризация. В данном разделе самосопряженность матричной функции $P(\cdot)$ понимается в стандартном смысле: $P(\cdot) = P(\cdot)^*$ почти всюду на \mathbb{R}_+ . Будем предполагать, что $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ являются обратимыми при п.в. $x \in \mathbb{R}_+$ и допускают представление:

$$\begin{aligned} P(x) &= (I_m + P_1(x))^{-1}, \quad P_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \\ R(x) &= I_m + R_1(x) = R(x)^* > 0 \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+, \\ R_1(\cdot) &\in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Кроме того, будем предполагать, что $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, что согласно классическому определению класса $W^{-1,1}$ (см. [9], гл. 3), означает справедливость представления:

$$Q(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2'(x), \quad \text{в котором } \sigma_j(\cdot) = \sigma_j(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \\ j \in \{1, 2\}. \quad (2.2)$$

Здесь производная понимается в смысле теории распределений. Однако, всюду далее мы будем предполагать справедливость более сильного включения:

$$\sigma_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \quad (2.3)$$

Следуя [7], регуляризуем выражение (1.1) следующим образом:

$$\mathcal{L}(y) := R^{-1}(x) \left(\sigma_1(x)y - \left(y^{[1]} \right)' - \sigma_2(x)P^{-1}(x)y^{[1]} \right. \\ \left. - \sigma_2(x)P^{-1}(x)\sigma_2(x)y \right), \quad (2.4)$$

где

$$y^{[1]} := P(x)y' - \sigma_2(x)y \quad (2.5)$$

называют квазипроизводной функции y . Регуляризация (2.4) дает строгую трактовку формального выражения (1.1). Отметим, что если $Q(\cdot)$ является гладкой функцией, то выражения (1.1) и (2.4) совпадают.

Далее введем матричное решение $Y(x, z)$ уравнения:

$$\mathcal{L}(Y(x, z)) = zY(x, z), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

Пусть $C(\cdot, z)$ и $S(\cdot, z)$ – матричные решения уравнения (2.6), удовлетворяющие начальным условиям:

$$C(0, z) = S^{[1]}(0, z) = I_m, \quad z \in \mathbb{C}, \\ S(0, z) = C^{[1]}(0, z) = \mathbb{O}_m, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.7)$$

2.2. Функции Вейля самосопряженных реализаций. В данном разделе всюду предполагается, что матричные коэффициенты $P(\cdot)$, $R(\cdot)$, $\sigma_1(\cdot)$, $\sigma_2(\cdot)$, входящие в выражение (2.4), удовлетворяют условиям (2.1)–(2.3). Обозначим через $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ множество локально абсолютно непрерывных функций на \mathbb{R}_+ , т.е. $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, если $f \in AC[0, b]$ при всех $b \in \mathbb{R}_+$. С дифференциальным выражением (2.4) мы

связываем минимальный и максимальный операторы. Соответствующий минимальный оператор $A := L_{\min}$ задается выражением \mathcal{L} на области:

$$\text{dom}(A) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m), \quad f(0) = f^{[1]}(0) = 0 \end{array} \right\}. \quad (2.8)$$

Сопряженный оператор A^* совпадает с максимальным оператором L_{\max} и задается тем же выражением на области:

$$\text{dom}(A^*) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) \end{array} \right\}. \quad (2.9)$$

Важно отметить, что оператор A является простым. Также отметим, что в случае $Q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \Leftrightarrow \sigma_2(\cdot) \equiv 0$ определения минимального и максимального операторов совпадают с классическими определениями (см. [1], [5]), поскольку условие $f^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ влечет $P(\cdot)f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, и обратное тоже верно.

Далее, определим реализацию (расширение) Дирихле L^D выражения (2.4) следующим образом:

$$\text{dom}(L^D) := \{f \in \text{dom}(A^*) : f(0) = 0\}. \quad (2.10)$$

В следующей лемме мы вводим граничную тройку для оператора $A^* = L_{\max}$.

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.3). Тогда множество $\Pi = \Pi^D := \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f = f(0), \quad \Gamma_1 f = f^{[1]}(0), \\ f &= (f_1, \dots, f_m)^\top \in \text{dom}(L_{\max}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

является граничной тройкой для оператора $A^* = L_{\max}$. В данном случае $A_0 = L^D$.

Предложение 2.2. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.3). Пусть $M^D(\cdot)$ – функция Вейля, соответствующая граничной тройке (2.11). Пусть также $S(\cdot, \cdot)$ и $C(\cdot, \cdot)$ – матричные решения уравнения (2.6), удовлетворяющие начальным условиям (2.7). Тогда:

(i) *Функции $S(x, z)$ и $C(x, z)$ допускают представления:*

$$\begin{aligned} S(x, z) &= e^{-ix\sqrt{z}} \{-N_0(z) + o_m(1)\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}, \\ C(x, z) &= e^{-ix\sqrt{z}} \{N_1(z) + o_m(1)\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

в которых

$$\begin{aligned} N_0(z) &= \frac{I_m}{2i\sqrt{z}} + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_1(t) S(t, z) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) S(t, z) dt \\ &\quad - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) S(t, z) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} P_1(t) S^{[1]}(t, z) dt \\ &\quad - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) S^{[1]}(t, z) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1'(t) S(t, z) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1(t) S'(t, z) dt, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

u

$$\begin{aligned}
N_1(z) &= \frac{1}{2}(I_m + R_1(0)) - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_1(t) C(t, z) dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) C(t, z) dt \\
&+ \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) C(t, z) dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} P_1(t) C^{[1]}(t, z) dt \\
&+ \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) C^{[1]}(t, z) dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1'(t) C(t, z) dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1(t) C'(t, z) dt, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Функции $N_j(\cdot)$, $j \in \{0, 1\}$, корректно определены, непрерывны и голоморфны в $\overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$.

(ii) Справедливо соотношение:

$$N_0(z)M^D(z) = N_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{2.15}$$

В следующей теореме мы исследуем функцию Вейля $M^D(\cdot)$, соответствующую реализации L^D . В частности, мы показываем, что на полуоси \mathbb{R}_+ часть соответствующей спектральной меры $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ из интегрального представления (5.4) – абсолютно непрерывна, и указываем ее явный вид.

Теорема 2.3. Пусть \mathcal{L} – дифференциальное выражение вида (2.4), и выполнены условия (2.1)–(2.3). Тогда для функции Вейля $M^D(\cdot)$, соответствующей граничной тройке (2.11), справедливы следующие утверждения:

(i) Детерминант $d_0(z) = \det(N_0(z))$ – голоморфная в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ функция и множество ее нулей Λ_0 является компактным, т.е. дискретным с единственной возможной предельной точкой ноль.

(ii) Функция Вейля допускает представление

$$M^D(z) = N_0(z)^{-1} N_1(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0, \quad \Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} : d_0(z) = 0\}. \quad (2.16)$$

(iii) Некасательные предельные значения функции Вейля

$M^D(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} M^D(z)$ существуют при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, и справедливо равенство:

$$M^D(\lambda) := M^D(\lambda + i0) = N_0(\lambda)^{-1} N_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.17)$$

Кроме того, для мнимой части справедливо представление:

$$M_I^D(\lambda) := \text{Im}(M^D(\lambda + i0)) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^* N_0(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.18)$$

В частности, мнимая часть $M_I^D(\lambda)$ положительно определена для каждого $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Соответствующая спектральная мера $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ функции Вейля $M^D(\cdot)$ на \mathbb{R}_+ имеет вид:

$$\Sigma_{M^D}(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{t}} (N_0(t)^* N_0(t))^{-1} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.19)$$

В частности, $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ – абсолютно непрерывна с непрерывной на \mathbb{R}_+ плотностью $d\Sigma_{M^D}(\lambda)/d\lambda$ максимального ранга, т.е.

$\text{rank}(d\Sigma_{M^D}(\lambda)/d\lambda) = m$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Для формулировки следующего основного результата раздела нам понадобится вспомогательный результат из теории граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. Приложение).

Предложение 2.4 ([3], гл. 7). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ и $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ – две граничные тройки для оператора A^* , пусть также $M(\cdot)$ и $\tilde{M}(\cdot)$ – соответствующие функции Вейля, $\tilde{A}_0 := A^* \upharpoonright \ker(\tilde{\Gamma}_0)$, и

$$J := i \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Существует $J_{\mathcal{H}}$ -унитарный оператор $X = (X_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, т.е. $X^*JX = J$, такой что

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_1 \\ \tilde{\Gamma}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

(ii) $0 \in \rho(X_{21}M(z) + X_{22})$ при $z \in \rho(\tilde{A}_0)$. Функции Вейля $\tilde{M}(\cdot)$ и $M(\cdot)$ связаны следующим дробно-линейным преобразованием:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z) = X(M(z)) &:= (X_{11}M(z) + X_{12})(X_{21}M(z) + X_{22})^{-1}, \\ &z \in \rho(\tilde{A}_0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В следующем следствии мы исследуем функцию Вейля $\tilde{M}(\cdot)$, соответствующую произвольному самосопряженному расширению $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ минимального оператора A . В частности, мы показываем, что на полуоси \mathbb{R}_+ часть соответствующей спектральной меры $\Sigma_{\tilde{M}}(\cdot)$ из интегрального представления (5.4) – абсолютно непрерывна, и указываем ее явный вид.

Следствие 2.5. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.3). Пусть $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ – граничная тройка для оператора A^* , такая что $\tilde{A} = A^* \upharpoonright \ker(\tilde{\Gamma}_0)$. Тогда для функции Вейля, соответствующей граничной тройке $\tilde{\Pi}$, справедливы следующие утверждения:

- (i) Некасательный предел $\tilde{M}(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} \tilde{M}(z)$ существует при всех $\lambda > 0$, и мнимая часть $\tilde{M}_I(\lambda) := \text{Im}(\tilde{M}(\lambda + i0))$ положительно определена.
- (ii) Соответствующая спектральная мера $\Sigma_{\tilde{M}}$ функции Вейля $M^D(\cdot)$ (неортогональная спектральная мера оператора \tilde{A}) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{M}}(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda (M^D(t)^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} M_I^D(t) (X_{21}M^D(t) + X_{22})^{-1} dt, \\ &\lambda > 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

в котором функция Вейля $M^D(\cdot)$ и ее мнимая часть $M_I^D(\cdot)$ задаются равенствами (2.17) и (2.18) соответственно. В частности, $\Sigma_{\tilde{M}}(\cdot)$ является абсолютно непрерывной с непрерывной на \mathbb{R}_+ плотностью $d\Sigma_{\tilde{M}}(\lambda)/d\lambda$ максимального ранга, т.е. $\text{rank}(d\Sigma_{\tilde{M}}(\lambda)/d\lambda) = t$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2.6. Пусть \mathcal{K} – измеримое подмножество \mathbb{R} , $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что самосопряженный оператор T в \mathfrak{H} с разложением единицы $E_T(\cdot)$ имеет лебеговский спектр кратности d на \mathcal{K} , если его часть $TE_T(\mathcal{K})$ унитарно эквивалентна оператору умножения на λ в пространстве $\bigoplus_1^d L^2(\mathcal{K}, \mu)$, где μ – мера Лебега.

В следующей теореме изучаются спектральные свойства произвольного самосопряженного расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A . Для этого воспользуемся параметризацией (5.2) (см. Приложение).

Теорема 2.7. Пусть выполнены условия (2.1)–(2.3), $\Pi^D = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка вида (2.11), и $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ – произвольное самосопряженное расширение минимального оператора A вида (2.8). Тогда существуют матрицы $C, D \in \mathbb{C}^{m \times m}$, такие что

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \tilde{A}^* &= A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \\ CD^* &= DC^*, \quad 0 \in \rho(CC^* + DD^*), \end{aligned} \quad (2.23)$$

и справедливы следующие утверждения:

(i) Неотрицательная часть $E_{\tilde{A}}(\overline{\mathbb{R}_+})\tilde{A}$ оператора \tilde{A} имеет лебеговский спектр постоянной кратности m , т.е.

$$\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty), \quad \sigma_s(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad \text{и} \quad N_{\tilde{A}ac}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Более того, положительные части $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+)\tilde{A}$ и $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ операторов \tilde{A} и L^D унитарно эквивалентны.

(ii) Детерминант $d_{C,D}(z) = \det(CN_0(\bar{z})^* - DN_1(\bar{z})^*)$ является голоморфной в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ функцией.

(iii) Оператор \tilde{A} полуограничен снизу и его отрицательный спектр совпадает с замыканием множества нулей функции $d_{C,D}(z)$, т.е.

$$\sigma_{pp}(\tilde{A}) = \sigma_{pp}(\tilde{A}) \cap \overline{\mathbb{R}_-} = \Lambda_{C,D}, \quad \Lambda_{C,D} = \{z \in \mathbb{C} : d_{C,D}(z) = 0\}.$$

В частности, отрицательная часть $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_-)\tilde{A}$ оператора \tilde{A} компактна, т.е. ее спектр либо конечен, либо дискретен с единственной предельной точкой ноль.

Поясним, что утверждение (i) Теоремы 2.7 вытекает из формулы (2.22) в силу отмеченного во введении результата о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер $E_{\tilde{A}}(\cdot)$ и $\Sigma_{\tilde{M}}(\cdot)$ самосопряженной реализации \tilde{A} простого симметрического оператора A (см. [19]).

Замечание 2.8 ([16]). В условиях Теоремы 2.7 ноль всегда принадлежит абсолютно непрерывному спектру. Это не исключает включения $0 \in \sigma_p(\tilde{A})$, т.е. ноль может быть и собственным значением кратности $k \leq m$. Например, это так для оператора, ассоциированного с выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= -\frac{d^2}{dx^2} + Q, \\ Q(x) &:= -\operatorname{diag}\{(x+a_1)^{-2}, \dots, (x+a_m)^{-2}\} \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), a_j > 0, \\ &\quad j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

и граничным условием

$$y'(0) = Ty(0), \quad T := -\operatorname{diag}\{a_1, \dots, a_m\}.$$

§3. ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА С ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ПОЛУОСИ

Здесь мы рассматриваем дифференциальное выражение Штурма–Лиувилля вида (1.1), предполагая, что для матричных коэффициентов $P(\cdot), R(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ выполняются условия (2.1), а потенциальная матрица $Q(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(x) &:= Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(x - x_k), \\ \{x_k\}_1^{\infty} &\subset \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти операторы при $P(\cdot) = R(\cdot) = I_m$ являются объектами многочисленных исследований последних четырех десятилетий (см., например, монографии [11, 12], приложение [15], обзор [18] и литературу в них).

Как и раньше, с выражением $\mathcal{L}(P, Q, R)$ будем ассоциировать минимальный симметрический оператор $A := L_{\min}$ в весовом гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

Напомним, что $|\alpha_k| := \|\alpha_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}$ обозначает матричную норму.

Предложение 3.1. Пусть $L^D := L^D(P, Q, R)$ – реализация Дирихле выражения (1.1) в $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$. Пусть также

$$Q_1(\cdot) = Q_1(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \tag{3.2}$$

Тогда оператор L^D является самосопряженным, а его неотрицательная часть имеет лебеговский спектр постоянной кратности m , т.е.

$$\sigma_{ac}(L^D) = [0, \infty), \quad \sigma_s(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad \text{и} \quad N_{L^D, ac}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Кроме того, отрицательная часть $E_{L^D}(\mathbb{R}_-)L^D$ оператора L^D компактна.

Набросок доказательства. Применим Теорему 2.7 с $\tilde{A} = L^D$. Для этого достаточно показать, что при условиях (3.2) потенциальная матрица $Q(\cdot)$ принадлежит классу $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Вначале проверим, что $\delta(\cdot)$ допускает следующее представление:

$$\delta(x) = \frac{2x\theta(x)}{(x^2+1)^2} + \left(\frac{\theta(x)}{x^2+1} \right)' =: q_1(x) + q_2'(x), \quad (3.3)$$

в котором $\theta(\cdot)$ – стандартная функция Хевисайда. Действительно, для произвольной функции $\varphi(\cdot) \in C_0^\infty$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\theta(x)}{x^2+1} \right)', \varphi(x) \right) &= - \left(\theta(x), \frac{\varphi'(x)}{x^2+1} \right) \\ &= - \left(\theta(x), \frac{2x\varphi(x)}{(x^2+1)^2} \right) - \left(\theta(x), \left(\frac{\varphi(x)}{x^2+1} \right)' \right) \\ &= - \left(\theta(x), \frac{2x\varphi(x)}{(x^2+1)^2} \right) + \left(\delta(x), \frac{\varphi(x)}{x^2+1} \right) \\ &= - \left(\frac{2x\theta(x)}{(x^2+1)^2}, \varphi(x) \right) + (\delta(x), \varphi(x)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тождество (3.3) немедленно следует из (3.4) с $q_2(x) = (x^2+1)^{-1}\theta(x)$.

Ясно, что $q_1(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $q_2(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для всех $p \in [1, \infty]$. Поэтому включение $\delta(\cdot) \in W^{-1,p}(\mathbb{R}_+)$ следует из описания класса $W^{-1,p}(\mathbb{R}_+)$ (см. [9], гл. 3). В свою очередь, представление (3.3) с учетом условий (3.2) дает:

$$\begin{aligned} Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(x-x_k) &= Q_1(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(x-x_k)\theta(x-x_k)}{((x-x_k)^2+1)^2} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\theta(x-x_k)}{(x-x_k)^2+1} \right)' =: \sigma_1(x) + \sigma_2'(x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теперь несложно показать, что $\sigma_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, а $\sigma_2(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, $p \in [1, \infty]$. Поэтому, в соответствии с описанием (2.2), $Q(\cdot) = \sigma_1(\cdot) + \sigma_2'(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Применение Теоремы 2.3 завершает доказательство.

Далее, применим Предложение 3.1 к дифференциальному выражению Шредингера с дельта-взаимодействиями, считая в (1.1) $P(\cdot) = R(\cdot) = I_m$, т.е. – к выражению

$$\mathbf{H}_{X_+, \alpha, Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q(\cdot) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\cdot - x_k). \quad (3.6)$$

Здесь $X_+ = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ и $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 3.2. Пусть выполнены условия (3.2). Тогда реализация Дирихле \mathbf{H}^D выражения (3.6) является самосопряженной, а ее неотрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(\overline{\mathbb{R}_+})\mathbf{H}^D$ имеет лебеговский спектр постоянной кратности m , т.е.

$$\sigma_{ac}(\mathbf{H}^D) = [0, \infty), \quad \sigma_s(\mathbf{H}^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset, \quad N_{\mathbf{H}^D, ac}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (3.7)$$

Кроме того, отрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(\mathbb{R}_-)\mathbf{H}^D$ оператора \mathbf{H}^D компактна.

Замечание 3.3. В случае скалярного оператора Шредингера с суммируемым потенциалом $Q_1(\cdot) = q(\cdot) = \overline{q(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ без точек взаимодействия ($\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$) Следствие 3.2 было доказано Титчмаршем (см. [8, гл. 5]). Этот результат был обобщен на случай суммируемого матричного потенциала $Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ и конечного числа точек взаимодействий в [17], а в случае $Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, но без точек взаимодействий ($\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$), независимо и другим методом – в работе [21] (см. также монографию [10]). На случай конечных некомпактных квантовых графов с суммируемыми матричными потенциалами этот результат был распространен в [16].

§4. ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА С ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ОСИ

В этом параграфе мы исследуем абсолютную непрерывность спектра минимального оператора Штурма–Лиувилля $L := L_{\min}(P, Q, R)$, порожденного выражением (1.1) на прямой \mathbb{R} . Для этого заметим, что

с дифференциальным выражением $\mathcal{L}(P, Q, R)$ естественно связаны минимальные операторы $L_{\pm, \min}$, порождаемые дифференциальными выражениями $\mathcal{L}(P, Q, R)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\pm}}$ на полуосях \mathbb{R}_+ и \mathbb{R}_- соответственно. Здесь, как и прежде, $\mathbf{1}_E(\cdot)$ – индикатор измеримого множества E .

Здесь мы ограничимся рассмотрением потенциальных матриц $Q(\cdot)$ вида

$$Q(x) := Q_1(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(x - x_k), \quad Q_1(\cdot) = Q_1(\cdot)^* \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

$$\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad (4.1)$$

хотя основной результат (Теорема 4.1) остается верным и при общем условии $Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$.

В следующей теореме мы исследуем абсолютно непрерывный спектр оператора $L = L_{\min}(P, Q, R)$ на оси \mathbb{R} , считая его самосопряженным, $L = L^*$, и предполагая выполнение на полуоси \mathbb{R}_+ условий Предложения 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть минимальный оператор Шредингера*

$$L = L_{\min}(P, Q, R),$$

ассоциированный с выражением (1.1) в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$, – самосопряжен, $L = L^$. Пусть также $P(\cdot), R(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m})$, и для матричных функций $P(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ и $R(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ выполнены условия (2.1). Если потенциальная матрица $Q(\cdot)$ вида (4.1) удовлетворяет условиям:*

$$Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty, \quad (4.2)$$

то неотрицательная часть $E_L(\overline{\mathbb{R}_+})L$ оператора L имеет лебеговский спектр постоянной кратности $2m$, т.е.

$$\sigma_{ac}(L) \cap \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty), \quad \sigma_s(L) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad \text{и} \quad N_{L^{ac}}(t) = 2m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Для доказательства Теоремы 4.1 мы ассоциируем с дифференциальным выражением $\mathcal{L}(P, Q, R)$ минимальные операторы $L_{\pm, \min}$, порождаемые дифференциальными выражениями $\mathcal{L}(P, Q, R)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\pm}}$ на полуосях \mathbb{R}_+ и \mathbb{R}_- соответственно. Это позволяет рассматривать оператор $L = L^*$ в качестве расширения оператора $A = L_{+, \min} \oplus L_{-, \min}$ и исследовать его функцию Вейля, используя вид функции Вейля $M^D(\cdot)$ реализации Дирихле L^D из Теоремы 2.3 (iii) (см. формулы

(2.17)–(2.18)). Также существенно используются некоторые результаты работы [4].

Замечание 4.2.

(i) Заключение Теоремы 4.1 остается верным, если условия (4.2) заменить следующим:

$$Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \quad (4.3)$$

(ii) Более того, Теорема 4.1 остается верной, если условия (2.1) и (4.2) (или условие (4.3)) на полуоси \mathbb{R}_+ заменить аналогичными условиями на отрицательной полуоси \mathbb{R}_- .

Теперь сформулируем Теорему 4.1 в частном случае, предполагая, что $P(\cdot) = R(\cdot) = I_m$. Рассмотрим дифференциальное выражение Шредингера на оси следующего вида:

$$\mathbf{H}_{X,\alpha,Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \quad (4.4)$$

$$Q_1(\cdot) = Q_1(\cdot)^* \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

где $X = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ и $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{\min}$ – минимальный оператор, ассоциированный в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (4.4).

Следствие 4.3. Пусть минимальный оператор, ассоциированный в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (4.4), самосопряжен, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, и выполнены условия (4.2). Тогда неотрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}}(\overline{\mathbb{R}_+})\mathbf{H}$ оператора \mathbf{H} имеет лебеговский спектр постоянной кратности $2m$, т.е.

$$\sigma_{ac}(\mathbf{H}) \cap \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty), \quad \sigma_s(\mathbf{H}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset, \quad N_{\mathbf{H}ac}(t) = 2m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.5)$$

Более того, заключения (4.5) остаются в силе при замене условий (4.2) аналогичными условиями на левой полуоси.

Замечание 4.4. В скалярном случае ($m = 1$) весьма частный случай этого результата был получен в работе [20]. Именно, применяя другой метод, С. Shubin Christ и G. Stolz доказали Следствие 4.3 для скалярного гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$, т.е. считая $X = \mathbb{Z}$, $Q_1(\cdot) = 0$, и предполагая выполненным условие $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ (см. [20, Теорема 5]).

§5. ПРИЛОЖЕНИЕ: ГРАНИЧНЫЕ ТРОЙКИ, ФУНКЦИЯ ВЕЙЛЯ, И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Здесь мы приведем некоторые факты из теории граничных троек и соответствующих функций Вейля, используемые в основном тексте.

Пусть A – плотно заданный замкнутый симметрический оператор в \mathfrak{H} , $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_z(A) := \mathfrak{H} \ominus \text{ran}(A - z^*) = \ker(A^* - z)$, $z \in \mathbb{C}_\pm$ – его *дефектные подпространства*, а $n_\pm(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ – его *индексы дефекта*. Пусть также $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$.

Определение 5.1 ([2], [3], гл. 7). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой \mathcal{H} – гильбертово пространство, а Γ_0 и Γ_1 – линейные отображения из $\text{dom}(A^*)$ в \mathcal{H} , называется *граничной тройкой оператора A^** , если:

- (i) справедливо тождество Грина
- $$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1f, \Gamma_0g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0f, \Gamma_1g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*); \quad (5.1)$$
- (ii) отображение $\Gamma : f \mapsto \{\Gamma_0f, \Gamma_1f\}$ из $\text{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ сюръективно.

Граничная тройка для оператора A^* существует, лишь при условии $n_+(A) = n_-(A)$. В этом случае $n_\pm(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0) \cap \ker(\Gamma_1) = \text{dom}(A)$. Понятие граничной тройки позволяет параметризовать все собственные расширения оператора A . В частности, справедлив следующий результат.

Предложение 5.2. Пусть A – замкнутый симметрический оператор в \mathfrak{H} с $n_\pm(A) = m < \infty$. Пусть также $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка оператора A^* . Тогда множество всех самосопряженных расширений оператора A параметризуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \tilde{A}^* &= A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \\ CD^* &= DC^*, \quad 0 \in \rho(CC^* + DD^*), \quad C, D \in \mathbb{C}^{m \times m}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Определение 5.3 ([13]). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* . Функцией Вейля, соответствующей граничной тройке Π , называют оператор-функцию $M(\cdot)$, определяемую равенством

$$\Gamma_1f_z = M(z)\Gamma_0f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z, \quad z \in \rho(A_0). \quad (5.3)$$

Функция Вейля определена корректно и является $R[\mathcal{H}]$ -функцией: $\text{Im}z \cdot \text{Im}M(z) > 0$ и $M(\bar{z}) = M^*(z)$. Кроме того, $0 \in \rho(\text{Im}M(i))$ (см. [13]).

Пусть A – простой симметрический оператор в \mathfrak{H} . Тогда функция Вейля $M(\cdot)$ определяет пару $\{A, A_0\}$ однозначно с точностью до унитарной эквивалентности (см. [13]).

Хорошо известно, что $M(\cdot)$ допускает интегральное представление (см., напр. [1]):

$$M(z) = C_0 + C_1 z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma_M(t), \quad z \in \rho(A_0). \quad (5.4)$$

Здесь $\Sigma_M(\cdot)$ является операторнозначной борелевской мерой на \mathbb{R} , удовлетворяющей соотношению $\int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^{-1} d\Sigma_M(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, и $C_j = C_j^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $j \in \{0, 1\}$, где $C_1 \geq 0$. Интеграл в (5.4) понимается в смысле сильной сходимости. Отметим, что $C_1 = 0$ в (5.4), если A является плотно определенным (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. И. Ахизер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. Т. II – Харьков, Вища школа (1978), 288 с.
2. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*. – К.: Наук. думка (1984), 284 с.
3. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи* – К.: Институт математики НАН Украины (2017), 573 с.
4. М. М. Маламуд, *О сингулярном спектре конечномерных возмущений (к теории Арошайна-Донохью-Каца)*, ДАН, **487**(4) (2019), 365–369.
5. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*. – М.: Наука (1969), 528 с.
6. А. М. Савчук, А. А. Шкалик, *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами*. – Матем. заметки, **66**(6) (1999), 897–912.
7. А. М. Савчук, А. А. Шкалик, *Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями*. – Труды Московского математического общества, **64** (2003), 159 – 212.
8. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. Т. I – М.: Издательство иностранной литературы (1960), 277 с.
9. R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, an imprint of Elsevier Science, Vancouver, 2003.
10. T. Aktosun, R. Weder, *Direct and Inverse Scattering for the Matrix Schrödinger Equation*. – Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, New York, **203** (2020), 637pp.
11. S. Albeverio., F. Gesztesy., R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*. – AMS Chelsea Publ. (2005).

12. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators and Schrödinger type operators*. — Cambridge Univ. Press (2000).
13. V. Derkach, M. Malamud, *Generalised resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps*. — J. Funct. Anal., **95** (1991), 1–95.
14. J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, *Weyl-Titchmarsh theory for Sturm-Liouville operators with distribution potentials*. — J. Opuscula Math., **33**(3) (2013), 467–563.
15. P. Exner, Appendix in [11]. *Solvable models in quantum mechanics* by S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. Sec. Edition, AMS Chelsea Publ. (2005).
16. Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt, *Non-compact quantum graphs with summable matrix potentials*. — Ann. Henri Poincaré **22** (2021), 1–47.
17. Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt, A. Posilicano, *To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials and point interactions*. — Func. Anal. and Oper. Theory for Quantum Phys. Pavel Exner Anniversary V. EMS Series of Congress Reports **12** (2017), 271–313.
18. A. Kostenko, M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review* — In Spectral Analysis, Differential Equations, and Mathematical Physics, H. Holden et al. (eds), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc., **87** (2013), 235–262.
19. M. Malamud, H. Neidhardt, *On the unitary equivalence of absolutely continuous parts of self-adjoint extensions*. — J. Funct. Anal., **260**(3) (2011), 613–638.
20. C. Shubin Christ, G. Stolz, *Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions*. — J. Math. Anal. Appl., **184** (1994), 491–516.
21. R. Weder, *Scattering theory for the matrix Schrödinger operator on the half line with general boundary conditions*. — J. Math. Phys. **56**, 092103 (2015); doi:10.1063/1.4930293; Erratum J. Math. Phys., **60**, 019901 (2019); doi:10.1063/1.5086412.

Granovskiy Ya. I., Malamud M. M. Sturm-Liouville operators with $W^{-1,1}$ -matrix potentials.

In the present work the spectral structure of realizations of a matrix three-term Sturm-Liouville operator

$$\mathcal{L}(P, Q, R)y := R^{-1}(x)(-(P(x)y)') + Q(x)y), \quad y = (y_1, \dots, y_m)^\top,$$

with singular potential $Q(\cdot) = Q(\cdot)^*$ on the half-line and line is investigated. It is shown that under certain conditions on the coefficients $P(\cdot)$ and $R(\cdot)$ the Dirichlet realization L^D (and other self-adjoint realizations) in the case of $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ has Lebesgue non-negative spectrum of constant multiplicity m . In particular, Schrödinger operator with matrix potential $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ has Lebesgue non-negative spectrum of constant multiplicity m . This result is applied to the Sturm-Liouville expression $\mathcal{L}(P, Q, R)$ with delta-interactions on the line \mathbb{R} . It

is shown that if the minimal operator $L := L_{\min}$ in $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ is self-adjoint, then the non-negative spectrum of the operator L is Lebesgue of constant multiplicity $2m$ whenever $Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. In particular, if the minimal Schrödinger operator \mathbf{H} on the line with potential matrix $Q(\cdot) = Q_1(\cdot) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k)$, is selfadjoint, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, then its non-negative spectrum is Lebesgue one of constant multiplicity $2m$ whenever $Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ and $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

Донецкий национальный
технический университет (ДонНТУ)
ул. Артёма, 58, г. Донецк, ДНР
E-mail: yarvodoley@mail.ru

Поступило 26 октября 2022 г.

Российский Университет Дружбы Народов,
Математический институт им. С. М. Никольского,
ул. Орджоникидзе 3, Москва
E-mail: malamud3m@gmail.com