Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

В. М. Бабич, М. В. Бабич

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ЛУЧЕВОЙ МЕТОД И КВАЗИФОТОНЫ ВОЛН ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

§1. Введение

Исследование локализованных волн шепчущей галереи тема не новая, например этому посвящена недавняя статья М. М. Попова [5], где построены соответствующие гауссовы пучки. Однако гауссовы пучки это решения, сосредоточенные а окрестности линии, одномерного многообразия, в данной же статье строятся квазифотоны, то есть решения, сосредоточенные возле нульмерного многообразия – точки, движущейся по двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$. Такие решения называются квазифотонами, см. обзор А. П. Киселёва [6].

Наши построения близки по духу к главе III книги [4], где также содержится список литературы, посвящённой волнам шепчущей галереи, также были использованы методы работы, посвящённые собственным функциям, локализованным в окрестности замкнутой геодезической [2, 7].

Для математического описания волн шепчущей галереи модулированных по частоте и амплитуде естественно использовать соответствующий вариант ПВЛМ (см. [1]). Решения волнового уравнения в окрестности ПВЛМ-лучей – это и есть квазифотоны. ПВЛМ-луч это линия в пространстве-времени. С точки зрения трёхмерного наблюдателя – это точка, летящая вдоль луча со скоростью c.

Тема этой статьи – построение ПВЛМ волн шепчущей галереи и соответствующих квазифотонов.

Ключевые слова: поверхностные волны, волны шепчущей галереи, лучевой метод, пространственно-временные решения, квазифотоны.

§2. Основные формулы.

Рассмотрим волновой процесс, который описывается волновым уравнением с постоянной скоростью c:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

а на гладкой поверхности S выполняется краевое условие

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Методика волн шепчущей галереи, используемая здесь – это методика пограничного слоя (см. [3] и указанную там литературу). Формальное асимптотическое разложение волны шепчущей галереи мы будем искать в виде:

$$u = e^{ip\theta(M,t)+ip^{1/3}\sigma(M,t)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j(t,M,\nu)}{p^{j/3}}. \tag{3}$$

Здесь p – большой параметр, M – точка поверхности S, которую мы будем характеризовать координатами $s = \alpha^1, y = \alpha^2$. В качестве третьей координаты возьмем расстояние от поверхности S по нормали n. Поскольку характерный размер области, где сосредоточены волны шепчущей галереи, имеет порядок $1/p^{2/3}$, то, для измерения расстояния до поверхности по нормали, мы, в основном, будем использовать масштабированную переменную $\nu := n/p^{2/3} = n/\widehat{p}^2$, где n это расстояние от поверхности до нормали, $\widehat{p} := p^{1/3}$.

Обозначим буквой $\mathbf{R}$ радиус вектор произвольной точки в окрестности S, тогда

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + n\mathbf{m}(\alpha^1, \alpha^2). \tag{4}$$

Эта формула вводит в окрестности S координатную систему α^1, α^2, n. Система координат устроена так. На поверхности S первая координатная линия, где отсчитывается $s = \alpha^1$ (т.е. линия $n = 0, y = 0$) идёт вдоль выделенной (опорной) геодезической, координата $y = \alpha^2$ на S отсчитывается тоже вдоль геодезических, пересекающих опорную перпендикулярно. Третья координата n отсчитывается по нормали к поверхности, используется масштабированная в $\widehat{p}^2$ раз переменная $\nu := n\widehat{p}^{-2}$. "Координатная сетка" на поверхности S переносится по нормали (к S), на координатные поверхности $n = \text{const} \neq 0$, которые образуют семейство поверхностей, параллельных S. То есть касательные плоскости к ним в точках с одинаковыми значениями s, y параллельны друг другу. Такая система координат является ортогональной (вообще говоря) только на поверхности S. При отходе от неё, сказывается кривизна S и координатная сетка на поверхностях $n = \mathrm{const}$ уже не ортогональна даже если $y = 0$ или $n = 0$. Однако линии $s = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$ всегда ортогональны поверхности $n = \mathrm{const}$.

Как и в §3 монографии [3], мы считаем, что волновой процесс происходит при $n \leqslant 0$.

Коэффициенты разложения U_j при $\nu = np^{\frac{2}{3}} \leqslant 0$ предполагаются гладкими функциями α^1, α^2, ν, причем:

$$U_j|_{\nu=0} = 0, \;\; U_j|_{\nu \to -\infty} \to 0. \tag{5}$$

§3. Формулы ПВ лучевого метода для волн шепчущей галереи.

Прежде всего запишем уравнение (1) в координатах α^1, α^2, ν. Наши построения являются пространственно-временным (ПВ) аналогом, и, заметим, очень близким аналогом, построений главы 3 монографии [3]. Так же как и там, предполагается, что волны шепчущей галереи распространяются вблизи поверхности S при $n < 0$.

Поскольку лапласиан не зависит от координат, то (методически) правильно вычислять его сразу в координатах $\alpha^1 = s, \alpha^2 = y, \nu = \widehat{p}^2 n := p^{2/3} n$. В этих координатах элемент длины

$$dl^2 = g_{ij}(n, s, y) d\alpha^i d\alpha^j + \widehat{p}^4 d\nu^2, \quad i, j \in \{1, 2\}. \tag{6}$$

Таким образом, метрический тензор пространства в этих координатах блочно-диагональный, имеется нетривиальный 2×2 блок (соответствующий координатам s, y) и константа на диагонали (это координата n). Будем использовать немного некорректные обозначения – через g будем, как правило, обозначать только этот блок, но иногда и весь метрический тензор (формула (10)). Как правило, в тексте, будет обсуждаться тензор с поднятыми вверх индексами, так что g^{ij} это матричные элементы матрицы, *обратной* к тому нетривиальному диагональному 2×2 блоку метрического тензора. В общем, обычно индексы i, j в обозначении g^{ij} пробегают значения 1 и 2, а g^{33} указываем отдельно.

Заметим, что, в последствии, у нас будут, вообще говоря, три малых параметра асимптотических разложений: это длина волны, расстояние от точки где вычисляем поле до поверхности S, и расстояние от ортогональной проекции на S точки наблюдения до луча, бегущего по поверхности.

На странице 258 [2] вычислены g^{ij} (формулы (5.7)) в первом приближении. Отличие наших обозначений от обозначений [2] в том, что сейчас $g^{33} = \widehat{p}^4$, а было $g^{33} = 1$. Метрический тензор (с верхними значками, т.е. обратная матрица) пространства $\mathbb{R}^3$ в наших (криволинейных) координатах такой:

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \widehat{p}^{-4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + K(s)y^2 + 2nb_{ss}(n,0) + \dots & -2nb_{yy}(n,0) + \dots & 0 \\ -2nb_{yy}(n,0) + \dots & 1 + 2nb_{yy}(n,0) + \dots & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{p}^{-4} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ещё нужен определитель метрического тензора:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \widehat{p}^2 \det{}^{-1/2}(g) \\ &= \widehat{p}^2 \big((1 + Ky^2) + 2n\big(b_{ss} + b_{yy}(1 + Ky^2)\big) \\ &\quad + 4n^2(b_{ss}b_{yy} - b_{sy}^2) + \dots\big)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{8}$$

участвующий в формуле (10), формуле для вычисления оператора Лапласа в криволинейных координатах, точками обозначены члены $O(|y|^3 + |y||n| + n^2)$.

Поскольку матричные элементы 2×2 матрицы $g^{ij} = g^{ij}(s, y, \nu)$ это нетривиальные ряды по степеням малого параметра $\widehat{p}^{-2}$, то введём обозначения

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{p}^{-2k} \nu^k g_{(k)}, \tag{9}$$

где $g_{(k)} = g_{(k)}(s, y)$ нетривиально зависят от обеих переменных. Аккуратное исследование (см. [2]) показывает, что

$$\begin{aligned} g_{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 + K(s)y^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(y^3), \\ g_{(1)} &= 2 \begin{pmatrix} b_{ss}(s,0) & -b_{sy}(s,0) \\ -b_{sy}(s,0) & b_{yy}(s,0) \end{pmatrix} + O(y). \end{aligned}$$

Матрица $g_{(0)} = g_{(0)}(s,y)$ диагональна в первых двух порядках по y, $g_{(1)}$, в нулевом порядке по y, составлена из матричных элементов второй квадратичной формы поверхности S на опорной геодезической. Остальные члены тэйлоровского разложения матрицы g объединены в бесконечный ряд.

Заметим, что, на первых порах, для получения уравнения эйконала, достаточно просто того, что это всё (и $d\log\sqrt{g}$ и g^{ij}) – ряды по $\widehat{p}^{-2}$ с ненулевыми свободными членами, только у $g^{12} = -2nb_{yy} = -2\widehat{p}^{-2}\nu b_{yy}$ нет свободного члена (что не важно). Но, поскольку нам, в дальнейшем, нужны и остальные члены разложения, сделаем всё аккуратно.

3.1. Вычисление лапласиана. Воспользуемся классической формулой

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial\alpha^j} = G^i\frac{\partial}{\partial\alpha^i} + g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j} + \widehat{p}^2G^3\frac{\partial}{\partial\nu} + \widehat{p}^4\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}, \quad (10)$$

тут

$$G^i := \frac{\partial}{\partial\alpha^j}g^{ij} + \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^j}\log\sqrt{g}\right)g^{ij},$$

$$G^3 := \frac{1}{\widehat{p}^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\log\sqrt{g}\right)g^{33} = \frac{\partial}{\partial n}\log\sqrt{g}$$

это степенные ряды по $\widehat{p}^{-2}\nu$ с ненулевыми свободными членами

$$G^i = \sum_{k=0}^{\infty} G^i_{(k)}\nu^k\widehat{p}^{-2k}, \quad G^3 = \sum_{k=0}^{\infty} G^3_{(k)}\nu^k\widehat{p}^{-2k}. \quad (11)$$

Перепишем волновое уравнение как $\Delta u/u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}/u$, и применим равенство

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log f + \frac{\partial}{\partial x}\log f\frac{\partial}{\partial y}\log f,$$

– будем вычислять логарифмические производные. Подставим в уравнение анзац

$$u = \exp\{i\widehat{p}(\widehat{p}^2\theta + \sigma)\}U = \exp\{i\widehat{p}(\widehat{p}^2\theta + \sigma) + \widehat{U}\},$$

где, для единообразия вычислений, временно, введено $\widehat{U} := \log U$. Как U, так и $\widehat{U}$ – ряды по $\widehat{p}^{-1}$ со свободным членом. Это конечные величины, нулевой порядок по $\widehat{p}$.

Учитывая, что ни θ, ни σ от n не зависят, получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{u}\Delta u = \frac{1}{u}\Big(G^i\frac{\partial}{\partial\alpha^i} + g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j} + \widehat{p}^2G^3\frac{\partial}{\partial\nu} + \widehat{p}^4\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\Big)u \\
&=G^i\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\left(\sqrt{-1}\widehat{p}\left(\widehat{p}^2\theta+\sigma\right)+\widehat{U}\right)+\widehat{p}^2G^3\frac{\partial}{\partial\nu}\widehat{U} \\
&+g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}\left(\sqrt{-1}\widehat{p}\left(\widehat{p}^2\theta+\sigma\right)+\widehat{U}\right)\right. \\
&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\left(\sqrt{-1}\widehat{p}\left(\widehat{p}^2\theta+\sigma\right)+\widehat{U}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^j}\left(\sqrt{-1}\widehat{p}\left(\widehat{p}^2\theta+\sigma\right)+\widehat{U}\right)\right)\right) \\
&+\widehat{p}^4\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\widehat{U}+\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\widehat{U}\right)^2\right) \\
&=\frac{1}{c^2}u_{tt}/u=\frac{1}{c^2}\left(i\widehat{p}(\widehat{p}^2\theta_{tt}+\sigma_{tt})+\widehat{U}_{tt}-\left(\widehat{p}(\widehat{p}^2\theta_t+\sigma_t)+\widehat{U}_t/i\right)^2\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Приведём подобные по степеням p, убрав временное обозначение $\widehat{U}$:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{p}^6\big(-g^{ij}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j}+\frac{1}{c^2}\theta_t^2\big)+\widehat{p}^4\left(-2g^{ij}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j}+\frac{2}{c^2}\theta_t\sigma_t+U_{\nu\nu}/U\right) \\
&\quad+i\widehat{p}^3\left(G^i\theta_{\alpha^i}+g^{ij}(\theta_{\alpha^i\alpha^j}+2\theta_{\alpha^i}U_{\alpha^j}/U)-\frac{1}{c^2}\theta_{tt}-\frac{2}{c^2}\theta_tU_t/U\right) \\
&\quad+\widehat{p}^2\left(-g^{ij}\sigma_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j}+\frac{1}{c^2}\sigma_t^2+G^3U_\nu/U\right) \\
&\quad+i\widehat{p}\left(G^i\sigma_{\alpha^i}+g^{ij}(\sigma_{\alpha^i\alpha^j}+2\sigma_{\alpha^i}U_{\alpha^j}/U)-\frac{1}{c^2}\sigma_{tt}-\frac{2}{c^2}\sigma_tU_t/U\right) \\
&\quad+G^iU_{\alpha^i}/U+g^{ij}U_{\alpha^i\alpha^j}/U-\frac{1}{c^2}U_{tt}/U=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Заметим, что

$$
\sum_{i=1}^{2}G^i\frac{\partial}{\partial\alpha^i}+\sum_{i,j=1}^{2}g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}=:\Delta_2 \tag{14}
$$

это оператор Лапласа (координатных) поверхностей $n = \text{const}$ параллельных S:

$$
\begin{aligned}
\widehat{p}^6(-g^{ij}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} + \frac{1}{c^2}\theta_t^2)U& \\
&+ \widehat{p}^4 \left(\left(-2g^{ij}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} + \frac{2}{c^2}\theta_t\sigma_t \right) U + U_{\nu\nu} \right) \\
&+ i\widehat{p}^3 \left(\left(\Delta_2\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta \right) U + 2g^{ij}\theta_{\alpha^i}U_{\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\theta_t U_t \right) \\
&+ \widehat{p}^2 \left(\left(-g^{ij}\sigma_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} + \frac{1}{c^2}\sigma_t^2 \right) U + G^3U_\nu \right) \\
&+ i\widehat{p} \left(\left(\Delta_2\sigma - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sigma \right) U + 2g^{ij}\sigma_{\alpha^i}U_{\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\sigma_t U_t \right) \\
&+ \quad \Delta_2 U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Это ещё не конец разложения по степеням $\widehat{p}$ – нельзя приравнивать нулю множители при разных степенях отдельно, поскольку тут присутствуют и ряды по $\widehat{p}^{-1}$. Члены этих рядов при ненулевых степенях будут “просачиваться ниже”, менять суммы при меньших степенях $\widehat{p}$.

Учтём, что матричные элементы g^{ij}, G это ряды по $\widehat{p}^{-2}\nu$, а также то, что оператор Лапласа Δ_2 координатных поверхностей $n = \text{const}$ тоже содержит в себе ряды g^{ij}, G^i, зависит от $n = \widehat{p}^{-2}\nu$, и только в главном, нулевом порядке по $\widehat{p}^{-2}$, является оператором Лапласа поверхности S

$$
\Delta_2 =: \Delta^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{p}^{-2k}\nu^k \widetilde{\Delta}^{(k)},
$$

где $\widetilde{\Delta}^{(k)}$ это некоторые дифференциальные операторы второго порядка по α^j, $\Delta^{(0)}$ – оператор Лапласа поверхности S.

Подставим эти разложения в формулу (14), и сгруппируем члены при одинаковых степенях $\widehat{p}$. Мы получим выражение вида

$$
\widehat{p}^6 \left(g_{(0)}^{ij}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} - \frac{1}{c^2}\theta_t^2 \right) U + \widehat{p}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{p}^{-k} L_k U = 0. \tag{16}
$$

Тут L_k это дифференциальные операторы второго порядка по переменным ν, α^j, t с коэффициентами, полиномиально зависящими от ν:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} - g^{ij}_{(1)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j}\nu - 2g^{ij}_{(0)}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} + \frac{2}{c^2}\theta_t\sigma_t \\
L_1 &= i\left(2g^{ij}_{(0)}\theta_{\alpha^i}\frac{\partial}{\partial\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\theta_t\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^{(0)}\theta - \frac{1}{c^2}\theta_{tt}\right) \\
L_2 &= G^3_{(0)}\frac{\partial}{\partial\nu} - g^{ij}_{(0)}\sigma_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} + \frac{1}{c^2}\sigma_t^2 - 2g^{ij}_{(1)}\nu\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} - \nu^2 g^{ij}_{(2)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} \\
L_3 &= i\Big(2(g^{ij}_{(0)}\sigma_{\alpha^i} + \nu g^{ij}_{(1)}\theta_{\alpha^i})\frac{\partial}{\partial\alpha^j} \\
&\quad - \frac{2}{c^2}\sigma_t\frac{\partial}{\partial t} + \nu\widetilde{\Delta}^{(1)}\theta + \Delta^{(0)}\sigma - \frac{1}{c^2}\sigma_{tt}\Big) \\
L_4 &= \Delta^{(0)} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu G^3_{(1)}\frac{\partial}{\partial\nu} - \nu g^{ij}_{(1)}\sigma_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} \\
&\quad - 2\nu^2 g^{ij}_{(2)}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} - \nu^3 g^{ij}_{(3)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} \\
L_{3+2k} &= i\nu^k\left(2(g^{ij}_{(k)}\sigma_{\alpha^i} + \nu g^{ij}_{(k+1)}\theta_{\alpha^i})\frac{\partial}{\partial\alpha^j} + \nu\widetilde{\Delta}^{(k+1)}\theta + \widetilde{\Delta}^{(k)}\sigma\right) \\
L_{4+2k} &= \nu^k\Big(\widetilde{\Delta}^{(k)} + \nu G^3_{(k+1)}\frac{\partial}{\partial\nu} - \nu g^{ij}_{(k+1)}\sigma_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} \\
&- 2\nu^2 g^{ij}_{(k+2)}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} - \nu^3 g^{ij}_{(k+3)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j}\Big)\ , \text{ где } k = 1, 2, \dots
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Эти операторы применяются к ряду $U = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{p}^{-k}U_k$, так что при одинаковых степенях $\widehat{p}$, в итоге, будут выражения вида $\sum_{s=0}^{k} L_s U_{k-s}$.

3.2. Построение асимптотического разложения, решение цепочки уравнений. Материал этого раздела во многом повторяет § 3 монографии [3]. Рассмотрим возникающие уравнения. Прежде всего, приравнивая нулю множитель при $\widehat{p}^6$, мы получаем уравнение эйконала

$$g^{ij}_{(0)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} - \frac{1}{c^2}\theta_t^2 = 0. \tag{18}$$

Его можно записать в виде уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\theta_t + H = 0, \;\; H = c\left(g^{ij}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Тут g^{ij} – матрица обратная матрице $g_{ij} = (\mathbf{r}_{\alpha^i}, \mathbf{r}_{\alpha^j})$ первой квадратичной формы поверхности S, $\theta_{\alpha^i} = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha^i}$.

Найти решение уравнения (19) позволяет теория, восходящая к первой половине девятнадцатого века. Центральную роль в этой теории играет каноническая система уравнений: $\frac{d\alpha^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i}$, $\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha^i}$. В работах по ПВЛМ решения соответствующей системы уравнений принято называть ПВ лучами. ПВ луч можно представлять себе как бегущую по геодезической линии точку $\alpha^1(t), \alpha^2(t)$, причём задав момент времени t, мы однозначно определяем не только $\alpha^1(t), \alpha^2(t)$, но и $\theta_{\alpha^1}, \theta_{\alpha^2}$ – компоненты градиента искомого эйконала в этой точке.

Будем считать уравнение эйконала решённым, то есть отныне $\theta = \theta(\alpha^1, \alpha^2, t)$ это некоторое решение (18). Следующее уравнение $L_0U_0 = 0$ будет уже на главный член ряда U, на U_0:

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}U_0 + \left(\nu(-2\widehat{b}^{ij}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j}) - 2g^{ij}_{(0)}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} + \frac{2}{c^2}\theta_t\sigma_t\right)U_0 = 0. \qquad (20)$$

Его можно рассматривать как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение по переменной ν, поскольку функции в скобках от ν не зависят (кроме самой ν). Это уравнение, масштабным преобразованием, сводится к уравнению Эйри.

Вследствие нулевых краевых условий $U_0|_{\nu=0} = U_0|_{\nu=\infty} = 0$, подходящие нам нетривиальные решения это собственные функции соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Они образуют дискретный набор функций – такие сдвиги функции Эйри, чтобы в нуле значение было ноль.

Итак, решение уравнения $L_0U_0 = 0$ это

$$U_0 = A_0(\alpha^1, \alpha^2, t)v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu), \qquad (21)$$

где v это функция Эйри, константа ζ_{Ai} – её корень. Через ψ обозначена (положительная) функция

$$\psi := -g^{ij}_{(1)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} = -2b^{ij}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j} > 0. \qquad (22)$$

Мы требуем, чтобы выполнялось неравенство $\psi > 0$. Это неравенство обеспечивает существование волны шепчущей галереи, распространяющейся в направлении, задаваемом вектором $(\theta_{\alpha^i}, \theta_{\alpha^j})$, т.е. градиентом θ. Величина ψ имеет простой геометрический смысл (см. [1]) – это кривизна нормального сечения поверхности S в направлении этого градиента, умноженная на длину градиента. Для существования волны необходимо, чтобы кривизна была отрицательной, то есть поверхность – вогнутой.

Нулевые граничные условия влекут за собой условие, что ζ_{Ai} это корень функции Эйри, и, следовательно, функция σ определится из уравнения

$$(-g^{ij}_{(1)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j})^{2/3}\zeta_{Ai} = 2g^{ij}_{(0)}\theta_{\alpha^i}\sigma_{\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\theta_t\sigma_t. \tag{23}$$

Таким образом, оператор L_0 имеет вид

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - \psi^{2/3}\left(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu\right), \tag{24}$$

где $\psi = -g^{ij}_{(1)}\theta_{\alpha^i}\theta_{\alpha^j}$ уже, на этот момент, фиксированная функция времени на поверхности S – она определяется выбранным решением уравнения эйконала и кривизной поверхности. Константа ζ_{Ai} это ноль функции Эйри.

Собственная функция f задачи Штурма–Лиувилля

$$L_0 f = 0, f(0) = f(\infty) = 0,$$

это функция Эйри $v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu)$.

Рассмотрим следующее по порядку уравнение (при $\widehat{p}^3$):

$$L_0U_1 + L_1U_0 = 0. \tag{25}$$

Тут и U_0 и L_0, L_1 уже определены, так что рассматриваем его как неоднородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение на U_1:

$$L_0U_1 = -L_1U_0, \quad \text{где } U_0 = A_0(\zeta^1, \alpha^2, t)v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu). \tag{26}$$

Поскольку уравнение $L_0 f = 0$ имеет нетривиальное решение – это $v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu)$, – то (25), вообще говоря, не имеет решения. Условие разрешимости это ортогональность правой части (26) решению однородного уравнения, то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{0} v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu)L_1\left(A_0(\alpha^1, \alpha^2, t)v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu)\right)d\nu = 0, \tag{27}$$

где

$$L_1 = i\Big(2g^{ij}_{(0)}\theta_{\alpha^i}\frac{\partial}{\partial\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\theta_t\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^{(0)}\theta - \frac{1}{c^2}\theta_{tt}\Big) =: \sum_{k=0}^{2} B^k\frac{\partial}{\partial\alpha^k} + C, \tag{28}$$

где, для обозримости формул, введены обозначения

$$B_k := \sum_{i=1}^{2} 2g^{ik}_{(0)}\theta_{\alpha^i}, B_0 := -\frac{2}{c^2}\theta_t, \frac{\partial}{\partial\alpha^0} := \frac{\partial}{\partial t}, C := \Delta^{(0)}\theta - \frac{1}{c^2}\theta_{tt} \tag{29}$$

Из этого условия находим A_0, то есть завершаем вычисление $U_0 = A_0 v$. Подставляя в (27)

$$L_1 A_0 v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu) = CA_0 v + B^k A_{0\,\alpha^k} v - A_0 \nu B^k (\psi^{1/3})_{\alpha^k} v', \tag{30}$$

и интегрируя по частям слагаемое с vv', получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left(CA_0 + B^k A_{0\,\alpha^k} - \frac{1}{2} A_0 B^k \log_{\alpha^k} \psi^{1/3} \right) v^2 d\nu = 0.$$

Поскольку выражение в скобках от ν не зависит, на $\int v^2 d\nu$ можно сократить, и на A_0 получаем линейное уравнение

$$2 g^{ij}_{(0)} \theta_{\alpha^i} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} A_0 + \frac{2}{c^2} \theta_t \frac{\partial}{\partial t} A_0 \\ + A_0 \left(\Delta^{(0)} \theta - \frac{1}{c^2} \theta_{tt} - g^{ij}_{(0)} \theta_{\alpha^i} \log_{\alpha^j} \psi^{1/3} + \frac{1}{c^2} \theta_t \log_t \psi^{1/3} \right) = 0 \tag{31}$$

Пусть теперь A_0 это какое-то решение (31), то есть U_0 определено, уравнение $L_0 U_1 = -L_1 U_0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} U_1 - \psi^{2/3} \left(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3} \nu \right) U_1 = \widetilde{C} v + \nu \widetilde{B} v' \tag{32}$$

разрешимо. Тут $\widetilde{C} := CA_0 + B^k A_{0\,\alpha^k}$, $\widetilde{B} := A_0 B^k (\psi^{1/3})_{\alpha^k}$, см. формулы (28)–(29).

Будем искать решение U_1 методом неопределённых коэффициентов:

$$U_1 = (D\nu^2 + E\nu + A_1) v \left(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3} \nu \right) + F v' \left(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3} \nu \right). \tag{33}$$

Подставив в уравнение получаем

$$(2D + \psi^{1/3} F) v - \psi^{1/3} 2(2D\nu + E) v' = \widetilde{C} v + \nu \widetilde{B} v',$$

то есть

$$E = 0, D = -\psi^{-1/3} \widetilde{B}/4, F = \psi^{-2/3} (\widetilde{C} + \psi^{-1/3} \widetilde{B}/2). \tag{34}$$

Коэффициент A_1 на этом шаге, естественно, не определить. Он, как в прошлый раз A_0, определится из условия разрешимости последующего уравнения, то есть разрешимости $L_0 U_2 = -(L_1 U_1 + L_2 U_0)$, ортогональности v и $L_1 U_1 + L_2 U_0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} v(\zeta_{Ai} - \psi^{1/3} \nu) \left(L_1 U_1 + L_2 U_0 \right) d\nu = 0. \tag{35}$$

Заметим, что, как и на прошлом шаге, $L_1U_1 + L_2U_0$ имеет вид $P_1v + P_2v'$, где $P_{1,2}$ это полиномы по ν, а v и v' это функция Эйри и её производная от аргумента $\zeta_{Ai} - \psi^{1/3}\nu$. Проинтегрировав по частям слагаемое с v', опять получим линейное дифференциальное уравнение на A_1.

Для любого его решения уравнение (35) разрешимо, и его решение снова можно найти методом неопределённых коэффициентов (см. [3]).

Действуя дальше таким образом, построим весь ряд $U = \sum_k U_k \widehat{p}^{-k}$. На каждом шагу будут возникают выражения того же вида, то есть v и v', умноженные на многочлены по ν. Метод неопределённых коэффициентов даёт все коэффициенты кроме одного. Этот коэффициент определится из условия разрешимости следующего уравнения.

§4. Гауссова сосредоточенность

Пусть $\alpha^i(t)$ – решение канонической системы $\frac{d\alpha^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha^i}$ для уравнения (19), уравнения эйконала. Это бегущая по геодезической линии поверхности S точка $(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$, ПВ-луч.

Обозначим $\gamma^i := \alpha^i - \alpha^i(t), i = 1, 2$ – расстояние, вдоль координаты α^i, от точки наблюдения до луча в момент времени t.

Заменим ряды, описывающие θ, σ конечными суммами. Мы придём к выражению

$$\begin{aligned} W = \exp\Big\{ & ip\left(\theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots + \theta^{(n_1)}\right) \\ & + ip^{1/3}\left(\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \dots + \sigma^{(n_2)}\right)\Big\} \\ & \times \left(U_0 + U_1/p^{1/3} + U_2/p^{2/3} + \dots + U_{n_3}/p^{n_3/3}\right), \end{aligned} \tag{36}$$

где n_1, n_2, n_3 – целые неотрицательные числа, $\theta^{(j)}, \sigma^{(j)}$ – однородные полиномы по γ^1, γ^2, в частности $\theta^{(2)}, \sigma^{(2)}$ это квадратичные формы. Предполагается, что мнимая часть $\theta^{(2)}$ – положительно определённая квадратичная форма, $\theta^{(1)}$ – вещественная линейная форма.

Назовём такую формулу приближённым выражением для квазифотона. Естественно потребовать, чтобы его экспоненциальная часть удовлетворяла требованию "гауссовой сосредоточенности". Под "гауссовой сосредоточенностью" понимаем оценки вида

$$
\begin{aligned}
&|\exp\{ip\left(\theta^{(0)}+\theta^{(1)}+\theta^{(2)}+\cdots+\theta^{(n_1)}\right)\\
&\quad+ip^{1/3}\left(\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}+\cdots+\sigma^{(n_2)}\right)\}|<a_1e^{-pa_2|\gamma|^2},\\
&\qquad a_3\leqq t\leqq a_4, |\gamma|\leqq a_5, |\gamma|=\sqrt{(\gamma^1)^2+(\gamma^2)^2}, p\geqq a_6, \quad (37)
\end{aligned}
$$

здесь a_k постоянные, причём $a_1>0, a_2>0, a_3<a_4, a_5>0, a_6>0$.

Покажем, что гауссова сосредоточенность имеет место при любых целых $n_1\geqq 2, n_2\geqq 0$.

Доказательство гауссовой сосредоточенности базируется на том, что квадратичная форма $p\ Im\ \theta^{(2)}$ при достаточно большом p и достаточно малом a_5 мажорирует $p\theta^{(j)}, j>2, p^{1/3}\sigma^{(l)}, l\geqq 2$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{|p\theta^{(j)}|}{|p\ Im\ \theta^{(2)}|}=O(1)|\gamma|^{j-2}\leqq O(1)a_5^{j-2}. \qquad (38)$$

Здесь $O(1)$ функция γ равномерно ограниченная при $|\gamma|\leqq a_5$. Чем у́же окрестность рассматриваемого ПВ луча, то есть чем меньше a_5, тем меньше правая часть (38). В этом смысле $p\ Im\ \theta^{(2)}$ мажорирует $p\theta^{(j)}, j>2$.

Рассмотрим при $j\geqq 2$ отношение

$$\frac{|p^{1/3}\sigma^{(j)}|}{|p\ Im\ \theta^{(2)}|}=O(1)|\gamma|^{j-2}p^{-2/3}\leqq O(1)a_5^{j-2}p^{-2/3}. \qquad (39)$$

Оно сколь угодно мало, если p достаточно велико. Остаётся оценить $|p^{1/3}\sigma^{(1)}|/|p\ Im\ \theta^{(2)}|$. Это отношение равно $O(1)p^{-2/3}\frac{1}{|\gamma|}$.

Откуда следует, что при

$$|\gamma|\geqq \mathrm{const}\ \ p^{-b} \quad b<2/3 \qquad (40)$$

имеет место мажорируемость и, следовательно, гауссова оценка (37).

Гауссова оценка имеет место и при малых $|\gamma|$, но она следует из других рассуждений.

Имеет место оценка $|\sigma^{(1)}p^{1/3}|\leqq \mathrm{const}\,|\gamma|p^{1/3}$. Если $|\gamma|<p^{-b}\,\mathrm{const}$, где $b>1/3$, то это выражение стремится к нулю, если $p\to\infty$ и поэтому на любом интервале вида $(a_2,+\infty), p_0>1$ равномерно ограничено по модулю. Таким образом следствием учёта $\sigma^{(1)}$ является “возникновение” равномерно ограниченного множителя $\exp\{p^{1/3}\sigma^{(1)}\}$, см. формулу (36). Константу a_2 потребуется заменить на

$$a_2' = a_2 \max |\exp\{p^{1/3}\sigma^{(1)}\}|.$$

Это легко следует из аналитического выражения левой части неравенства (37).

Гауссова оценка (37) тем самым сохраняется. Пусть b какое-нибудь число из интервала $(1/3, 2/3)$, например $1/2$. Тогда имеет место при $|\gamma| \geqq \text{const}\ \ p^{-1/2}$ гауссова оценка, ибо при таких $|\gamma|$ форма $p\ Im\ \theta^{(2)}$ мажорирует линейную форму $p^{1/3}\sigma^{(1)}$.

При $|\gamma| \leqq \text{const}\ \ p^{-1/2}$ учёт этой формы не нарушает выполнения гауссовой оценки (37), только константу a_2 надо будет умножить на соответствующий постоянный множитель. Таким образом оценка (37) остаётся справедливой и при учёте линейной формы $p^{1/3}\sigma^{(1)}(\gamma)$.

Результаты работы подтверждают следующий общий тезис: если волна описывается ПВЛМ-разложением, то комплексный вариант этого разложения описывает соответствующие квазифотоны.

Список литературы

1. В. М. Бабич, *Пространственно-временной лучевой метод (ПВЛМ) для волн шепчущей галереи.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **506** (2021), 15–20.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (*метод эталонных задач*). — М.: Наука, 1972, 456с.
3. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* — Л.: Изд. ЛГУ 1974, 124с.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод* (*Линейные и нелинейные волны*). — Л.: Изд. ЛГУ 1984, 329с.
5. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для строго выпуклых поверхностей, вложенных в* R^3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 301–313.
6. A. P. Kiselev, *Localized light waves: paraxial and exact solutions of the wave equation* (*a review*), Opt. Spectrosc., **102**, No. 4, 2007, 603–622.
7. В. М. Бабич, В. Ф. Лазуткин, *О собственных функциях, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической* — Пробл. матем. физики. Вып. 2 Л.: Изд. ЛГУ (1967), 15–25.

Babich V. M., Babich M. V. Space-time ray method and quasiphotons of whispering gallery.

The article is devoted to the construction of the space-time ray method (STRM) in the whispering gallery case. The complex version of the STRM-expansion describing quasiphotons is also considered.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
192288 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: babich@pdmi.ras.ru

E-mail: mbabich@pdmi.ras.ru

Поступило 17 октября 2022 г.