Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

А. А. Хартов

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ АНДЕРСОНА–ДАРЛИНГА

§1. Введение

Данная статья посвящена рассмотрению нестандартного примера многопараметрической аппроксимации в среднеквадратической постановке для одного специального семейства случайных полей.

Пусть $X = \{X(t),\, t \in [0,1]\}$ – это гауссовский случайный процесс на некотором вероятностном пространстве, имеющий нулевое математическое ожидание и следующую ковариационную функцию

$$\mathcal{K}_\mu(t,s) = \left(\frac{\min\{t,s\} - ts}{\sqrt{t(1-t)}\sqrt{s(1-s)}}\right)^\mu, \quad t,s \in [0,1],$$

с параметром $\mu > 0$. Здесь $\mathcal{K}_\mu(t,s)$ полагается равной нулю, если t или s принимают 0 или 1. В случае $\mu = 1$ данный случайный процесс известен как *процесс Андерсона–Дарлинга* (см. [2] и [18]). Он связан с предельным распределением для специальных интегралов от равномерных эмпирических процессов. Для произвольных значений $\mu > 0$ мы приходим к *обобщенным процессам Андерсона–Дарлинга*. Последние связаны с предельными распределениями статистик типа Крамера-Мизеса (см. [16]). Несложно заметить, что $\mathcal{K}_\mu(t,s) \to 0$ при $\mu \to \infty$, если $t \neq s$. Поэтому можно сказать, что параметр μ характеризует близость процесса X к гауссовскому белому шуму.

Рассмотрим d-параметрическую версию процесса X со сколь угодно большим $d \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел. Более точно, на некотором вероятностном пространстве определим гауссовское случайное поле $Y_d = \left\{Y_d(t),\, t \in [0,1]^d\right\}$ с нулевым средним и

Ключевые слова: сложность аппроксимации в среднем, гауссовские случайные поля, многопараметрические проблемы, процесс Андерсона–Дарлинга.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ–ННИО 20-51-12004.

следующей ковариационной функцией

$$\mathcal{K}^{Y_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}_{\mu_j}(t_j,s_j) = \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{\min\{t_j,s_j\} - t_j s_j}{\sqrt{t_j(1-t_j)}\sqrt{s_j(1-s_j)}} \right)^{\mu_j}, \tag{1}$$

где $t = (t_1,\dots,t_d)$ и $s = (s_1,\dots,s_d)$ из $[0,1]^d$. Здесь $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – это заданная последовательность параметров, принимающих, вообще говоря, различные значения. Если каждая функция $\mathcal{K}_{\mu_j}$ соответствует некоторому гауссовскому процессу $X_j = \{X_j(t),\, t \in [0,1]\}$ с нулевым средним, $j \in \mathbb{N}$, то Y_d называется *тензорным произведением* $X_1, \dots, X_d$ и обозначается $Y_d = X_1 \otimes \ldots \otimes X_d$ (см. [5]).

При каждом $d \in \mathbb{N}$ случайное поле Y_d рассматривается как элемент пространства $L_2([0,1]^d)$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,d}$ и нормой $\|\cdot\|_{2,d}$. Мы изучаем *сложность аппроксимации в постановке в среднем* (*сложность аппроксимации* для краткости) для Y_d:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} :\, e^{Y_d}(n) \leqslant \varepsilon\, e^{Y_d}(0)\bigr\}. \tag{2}$$

Здесь

$$e^{Y_d}(n) := \inf\Bigl\{ \Bigl(\mathbb{E}\,\bigl\|Y_d - \widetilde{Y}_d^{(n)}\bigr\|_{2,d}^2\Bigr)^{1/2} :\, \widetilde{Y}_d^{(n)} \in \mathcal{A}_n^{Y_d} \Bigr\}$$

есть наименьшая среднеквадратическая ошибка аппроксимации случайного поля Y_d, по всем линейным аппроксимациям $\widetilde{Y}_d^{(n)}$, ранга $n \in \mathbb{N}$ из класса

$$\mathcal{A}_n^{Y_d} := \Bigl\{ \sum_{m=1}^{n} \langle Y_d, \psi_m\rangle_{2,d}\, \psi_m : \psi_m \in L_2([0,1]^d) \Bigr\},$$

число $\varepsilon \in (0,1)$ – *порог ошибки*. Мы работаем с *нормализованной ошибкой*, беря в учет “размер” поля Y_d:

$$e^{Y_d}(0) := \bigl(\mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2\bigr)^{1/2} < \infty.$$

Для заданной последовательности $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ параметров в (1) величина $n^{Y_d}(\varepsilon)$ рассматривается как функция двух переменных $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$, и основной общей задачей здесь является оценка роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при сколь угодно больших d. Это пример так называемой *многопараметрической задачи аппроксимации* для Y_d, $d \in \mathbb{N}$ (см. [12]). В подобных задачах (даже со значительно более общими постановками) представляет интерес получение критериев принадлежности к классам *трактабильности* (англ. *tractability*), которые задаются видом верхней оценки для сложности аппроксимации при любых $d \in \mathbb{N}$ и

$\varepsilon \in (0,1)$ (см. [12]). К настоящему моменту в этом направлении существует довольно много результатов общего и частного характера (см., например, монографии [12–14] и статьи [4,8,9,11,15]). Мы, однако, будем изучать величину сложности $n^{Y_d}(\varepsilon)$ в ином ключе, а именно, будем исследовать асимптотическое поведение $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для любого сколь угодно малого фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. Такая постановка, помимо естественного теоретического интереса, является наиболее подходящей для некоторых прикладных областей (подробнее см. [12] с. 6 и 289). Нам неизвестны результаты, где обстоятельно рассматривались бы многопараметрические обобщенные процессы Андерсона–Дарлинга в указанной постановке. Безусловно, существуют общие результаты (см. [6] и [10]), которые здесь могут быть применены несложной техникой (см. примеры [1] и [7]), в частности, для случая $\mu_j \to 0$, $j \to \infty$. Однако, при $\mu_j \to c$, $j \to \infty$, где c – положительная константа, использование теоремы 3 из [6] видится неудобным (много условий для проверки для относительно простого случая), а при $\mu_j \to \infty$, $j \to \infty$, и вовсе может быть невозможным. Рассмотрению этих двух случаев и посвящена данная статья.

§2. Предварительные замечания

Величина $n^{Y_d}(\varepsilon)$ может быть выражена через собственные числа ковариационного оператора K^{Y_d}, действующего по формуле:

$$K^{Y_d} f(t) = \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}^{Y_d}(t,s) f(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]^d.$$

Пусть $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ обозначает последовательность собственных чисел, а $(\psi_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ соответствующую последовательность ортонормированных собственных функций оператора K^{Y_d}. Предполагается, что числа в последовательности $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ упорядочены по невозрастанию. Так мы имеем $K^{Y_d}\psi_m^{Y_d}(t) = \lambda_m^{Y_d}\psi_m^{Y_d}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]^d$. Пусть Λ^{Y_d} обозначает след оператора K^{Y_d}, т.е. $\Lambda^{Y_d} := \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{Y_d}$.

Хорошо известно (см. [3] и [17]), что для любого $n \in \mathbb{N}$ следующее n-ранговое случайное поле

$$\widetilde{Y}_d^{(n)}(t) := \sum_{k=1}^{n} \langle Y_d, \psi_k^{Y_d} \rangle_{2,d}\, \psi_k^{Y_d}(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{3}$$

минизирует среднеквадратическую ошибку. Следовательно, формула (2) принимает вид

$$n^{Y_d}(\varepsilon)=\min\Big\{n\in\mathbb{N}:\ \mathbb{E}\,\big\|Y_d-\widetilde{Y}_d^{(n)}\big\|_{2,d}^2\leqslant\varepsilon^2\,\mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2\Big\},\quad d\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in(0,1).$$

С учетом (3) и $\mathbb{E}\,\langle Y_d,\psi_m^{Y_d}\rangle_{2,d}^2=\langle\psi_m^{Y_d},K^{Y_d}\psi_m^{Y_d}\rangle_{2,d}=\lambda_m^{Y_d}$, $m\in\mathbb{N}$, мы получаем представление:

$$n^{Y_d}(\varepsilon)=\min\Big\{n\in\mathbb{N}:\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m^{Y_d}\leqslant\varepsilon^2\,\Lambda^{Y_d}\Big\},\quad d\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in(0,1). \tag{4}$$

Отметим, что для представления (4) мы не использовали специфику ковариационной функции (1) и гауссовость поля Y_d, оно справедливо для любого случайного поля второго порядка. Специфика (4) проявляется в последовательности $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$. Последняя допускает следующее описание. Пусть $(\lambda_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}}$ обозначает последовательность собственных чисел (упорядоченных в невозрастающем порядке) ковариационного оператора K_μ, соответствующего $\mathcal{K}_\mu$:

$$K_\mu f(t)=\int\limits_{[0,1]}\mathcal{K}_\mu(t,s)f(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

Числа $\lambda_{\mu,k}$ известны из [16]:

$$\lambda_{\mu,k}=\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)},\quad k\in\mathbb{N}.$$

В частности, имеем первое собственное число $\lambda_{\mu,1}=\frac{1}{\mu+1}$ и след

$$\Lambda_\mu:=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{\mu,k}=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\tfrac{\mu}{\mu+k-1}-\tfrac{\mu}{\mu+k}\Big)=1. \tag{5}$$

Хорошо известно (см. [8] и [14]), что в силу тензорной структуры (1), последовательность $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ есть упорядоченный по невозрастанию массив чисел

$$\prod_{j=1}^{d}\lambda_{\mu_j,k_j}=\prod_{j=1}^{d}\tfrac{\mu_j}{(\mu_j+k_j-1)(\mu_j+k_j)},\quad k_1,k_2,\ldots,k_d\in\mathbb{N}.$$

При этом

$$\Lambda^{Y_d}=\prod_{j=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda_{\mu_j,k}=1,\quad d\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, последовательность $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ полностью определяет $(\lambda_m^{Y_d})_{m\in\mathbb{N}}$ и, следовательно, поведение сложности $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для любых $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$.

§3. Результаты

Прежде всего мы выясним, для каких последовательностей $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ выполнено

$$\lim_{d\to\infty} n^{Y_d}(\varepsilon)=\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon\in(0,1). \tag{6}$$

Лишь этот случай нас будет интересовать далее.

Утверждение 1. *Для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *соотношение* $\sup_{d\in\mathbb{N}} n^{Y_d}(\varepsilon)<\infty$ *эквивалентно* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu_j<\infty$*, а соотношение* $\lim\limits_{d\to\infty} n^{Y_d}(\varepsilon)=\infty$ *эквивалентно* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu_j=\infty$.

Из приведенного утверждения, в частности, видно, что (6) имеет место для последовательностей $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$, которые сходятся к нулю, но «не слишком быстро» (так, чтобы при этом $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu_j=\infty$). Этот случай может быть разрешен с помощью теорем 2 и 3 из [6], т.к. здесь $\lambda_{\mu_j,1}/\Lambda_{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j+1}\to 1$, $j\to\infty$, и условие (25) будет выполнено в силу замечания 3 для любых констант $b_d\to\infty$, $d\to\infty$ (все из [6]). Техника применения указанных теорем известна, например, она была продемонстрирована в работах [1, 6] и [7]. Результатом являются логарифмические асимптотики для $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$, вид которых существенно зависит от скорости сходимости к нулю последовательности $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$. В данной статье с этим случаем мы работать не будем.

Рассмотрим ситуацию, когда $\mu_j\to c$, $j\to\infty$, где $0<c<\infty$. Это фактически *однородный случай*, где μ_j были бы в точности равными c, а случайное поле Y_d представляло бы *тензорную степень* некоторого обобщенного процесса Андерсона-Дарлинга с параметром $\mu=c$. Однородный случай подробно рассматривался в работах [6] и [10], результаты и методы в нем известны. Аналогичные выводы ожидаются и для ситуации $\mu_j\to c$, $j\to\infty$. Однако, последняя формально не является однородной, и методы однородного случая применять нельзя. Будет корректным использование тех же теорем 2 и 3 из [6], но это видится избыточным для такого относительно несложного случая.

Поэтому следует рассматривать ситуацию, когда $\mu_j \to c$, $j \to \infty$, отдельно, что мы и сделаем ниже в данной статье.

Нестандартным в практике многопараметрических задач аппроксимации является случай $\mu_j \to \infty$, $j \to \infty$. Дело в том, что здесь $\Lambda_{\mu_j}/\lambda_{\mu_j,1} = \mu_j + 1 \to \infty$, $j \to \infty$, что указывает на "возрастающую важность" при растущем j маргинальных процессов X_j в тензорных произведениях $Y_d = X_1 \otimes \ldots \otimes X_d$, $d \in \mathbb{N}$. Обычно же рассматривают случаи "убывающей важности" для процессов, составляющих поле Y_d (см. [8] с. 550), что связано, как правило, с естественной областью определения ключевых параметров (аналогов μ_j), а также со стремлением получить не слишком быстрый рост $n^{Y_d}(\varepsilon)$. Специфика же обобщенных процессов Андерсона-Дарлинга допускает такой нестандартный случай, и нам было интересно его рассмотреть.

Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, определим величины, которые будут в них фигурировать. При каждом $\mu > 0$ введем константы

$$\begin{aligned} E_\mu &:= \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) \cdot \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}, \\ D_\mu &:= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big)^2 \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}. \end{aligned}$$

Функция $\Phi : \mathbb{R} \to (0,1)$ будет обозначать функцию распределения стандартного гауссовского закона, а $\Phi^{-1}(p)$ – ее квантиль порядка $p \in (0,1)$.

Теорема 1. *Пусть $\mu_j \to c$ при $j \to \infty$, где $0 < c < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{D_c \cdot d} + o(\sqrt{d}), \quad d \to \infty, \tag{7}$$

где $a_d := \sum\limits_{j=1}^{d} E_{\mu_j}$, $d \in \mathbb{N}$, при этом $a_d = E_c \cdot d + o(d)$ при $d \to \infty$.

Видно, что асимптотика (7) имеет фактически такую же форму как в однородном случае $\mu_j = c$ (см. [6] и [10]), отличие состоит в появлении остаточного члена $o(d)$, асимптотическое поведение которого может быть уточнено за счет дополнительных предположений о скорости сходимости $\mu_j \to c$ при $j \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $\mu_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2) \cdot 2\sqrt{d} + o(\sqrt{d}), \quad d \to \infty, \tag{8}$$

где $a_d := \sum\limits_{j=1}^{d} E_{\mu_j}$, $d \in \mathbb{N}$, при этом $a_d = \sum\limits_{j=1}^{d} \ln(1+\mu_j) + 2d + o(d)$ при $d \to \infty$.

Заметим, что асимптотика (8) подобна по форме асимптотике (7). Как и ранее остаточный член $o(d)$ может быть уточнен за счет уточнения скорости стремления $\mu_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Однако, как несложно видеть, a_d имеет бóльший порядок роста чем d при $d \to \infty$. Более того, a_d может возрастать к бесконечности сколь угодно быстро при подходящем задании скорости стремления $\mu_j \to \infty$. Этот эффект не удивителен, т.к. составляющие поле Y_d процессы X_j становятся подобными гауссовским белым шумам, т.е., упрощенно говоря, объектам с отсутствующей внутренней ковариационной структурой и, следовательно, трудно поддающимся прогнозированию и приближению.

§4. Доказательства

Доказательство утверждения 1. По утверждению 5 из [6] условие $\sup_{d\in\mathbb{N}} n^{Y_d}(\varepsilon) < \infty$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$ эквивалентно сходимости следующего ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_{\mu_j,k}}{\lambda_{\mu_j,1}} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{\mu_j,k}}{\lambda_{\mu_j,1}}\right) - 1\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\Lambda_{\mu_j}}{\lambda_{\mu_j,1}} - 1\right),$$

т.е. ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\Lambda_{\mu_j}}{\lambda_{\mu_j,1}} - 1\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{\mu_j+1}} - 1\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j.$$

По утверждению 4 из [6] расходимость данного ряда эквивалентна $\lim\limits_{d\to\infty} n^{Y_d}(\varepsilon) = \infty$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$. □

Лемма 1. *Для любого $c \in (0,\infty)$ верно*

$$E_\mu \to E_c \quad \text{и} \quad D_\mu \to D_c \quad \text{при} \quad \mu \to c.$$

Доказательство леммы 1. Зафиксируем $c \in (0, \infty)$. Пусть μ принадлежит промежутку $I := [c/2, 2c]$, содержащему c. Рассмотрим

$$E_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\biggl(\frac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\biggr) \cdot \frac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}. \tag{9}$$

Написанный ряд сходится равномерно относительно $\mu \in I$. Действительно, он мажорируется сходящимся положительным рядом при $\mu \in I$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\biggl(\frac{(2c+k-1)(2c+k)}{\frac{c}{2}}\biggr) \cdot \frac{2c}{\bigl(\frac{c}{2}+k-1\bigr)\bigl(\frac{c}{2}+k\bigr)}.$$

Поэтому в ряде (9) допустим почленный предельный переход:

$$\lim_{\mu\to c} E_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\biggl(\frac{(c+k-1)(c+k)}{c}\biggr) \cdot \frac{c}{(c+k-1)(c+k)} = E_c.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} D_\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \Bigl(\ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr) - E_\mu\Bigr)^2 \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln^2\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr) \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} \\ &- 2E_\mu \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr) \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} \\ &+ E_\mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}. \end{aligned}$$

В силу (5) и (9) имеем

$$D_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \ln^2\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr) \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} - E_\mu^2. \tag{10}$$

Написанный ряд мажорируется следующим сходящимся положительным рядом при $\mu \in I$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln^2\biggl(\frac{(2c+k-1)(2c+k)}{\frac{c}{2}}\biggr) \cdot \frac{2c}{\bigl(\frac{c}{2}+k-1\bigr)\bigl(\frac{c}{2}+k\bigr)}.$$

Поэтому ряд в (10) сходится равномерно относительно $\mu \in I$, и в нем допустим почленный предельный переход при $\mu \to c$. Тогда будем иметь

$$\lim_{\mu\to c} D_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \ln^2\Big(\tfrac{(c+k-1)(c+k)}{c}\Big)\tfrac{c}{(c+k-1)(c+k)} - E_c^2 = D_c. \qquad \square$$

Лемма 2. *Справедлива асимптотика:*

$$E_\mu = \ln(\mu+1) + 2 + o(1), \quad \mu \to \infty.$$

Доказательство леммы 2. Зафиксируем $\mu > 0$ и запишем E_μ в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big)\cdot\Big(\tfrac{\mu}{\mu+k-1} - \tfrac{\mu}{\mu+k}\Big) \\ &= \ln(\mu+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big)\Big)\cdot\tfrac{\mu}{\mu+k} \\ &= \ln(\mu+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\ln\Big(1+\tfrac{2}{\mu+k-1}\Big)\tfrac{\mu}{\mu+k}. \end{aligned}$$

Далее с учетом (5) представим:

$$E_\mu = \ln(\mu+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{2\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} - r_\mu = \ln(\mu+1) + 2 - r_\mu,$$

где

$$r_\mu \quad := \quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\tfrac{2}{\mu+k-1} - \ln\Big(1+\tfrac{2}{\mu+k-1}\Big)\Big)\tfrac{\mu}{\mu+k}.$$

Пользуясь известным неравенством

$$u - \tfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u, \quad u \geqslant 0, \tag{11}$$

получаем

$$0 \leqslant r_\mu \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{2\mu}{(\mu+k)(\mu+k-1)^2} \leqslant \tfrac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{2\mu}{(\mu+k)(\mu+k-1)} = \tfrac{2}{\mu}.$$

Отсюда заключаем, что $r_\mu \to 0$ при $\mu \to \infty$. В итоге имеем требуемую асимптотику для E_μ. $\square$

Лемма 3. *Справедлива сходимость $D_\mu \to 4$ при $\mu \to \infty$.*

Доказательство леммы 3. Рассмотрим при фиксированном $\mu > 0$ величину

$$D_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big)^2 \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}.$$

Запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big)^2 \cdot \Big(\tfrac{\mu}{\mu+k-1} - \tfrac{\mu}{\mu+k}\Big) \\
&= \big(\ln(\mu+1) - E_\mu\big)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big)^2 \\
&\qquad - \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big)^2\Big) \cdot \tfrac{\mu}{\mu+k} \\
&= \big(\ln(\mu+1) - E_\mu\big)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(1 + \tfrac{2}{\mu+k-1}\Big) \cdot \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) \\
&\qquad + \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - 2E_\mu\Big) \cdot \tfrac{\mu}{\mu+k} \\
&= \big(\ln(\mu+1) - E_\mu\big)^2 + S_\mu - r_{\mu,1},
\end{aligned}$$

где

$$S_\mu := \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) + \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - 2E_\mu\Big) \cdot \tfrac{2\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)},$$

$$\begin{aligned}
r_{\mu,1} := \sum_{k=1}^{\infty} &\Big(\tfrac{2}{\mu+k-1} - \ln\Big(1 + \tfrac{2}{\mu+k-1}\Big)\Big) \\
&\times \Big(\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) + \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - 2E_\mu\Big) \cdot \tfrac{\mu}{\mu+k}.
\end{aligned}$$

Сначала оценим $r_{\mu,1}$. Пользуясь неравенством (11), получаем

$$\begin{aligned}
|r_{\mu,1}| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) + \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - 2E_\mu\Big| \cdot \tfrac{2\mu}{(\mu+k-1)^2(\mu+k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\ln\big((\mu+k)(\mu+k+1)\big) + \ln\big((\mu+k-1)(\mu+k)\big)
\end{aligned}$$

$$-\,2(E_\mu+\ln\mu)\Big|\cdot\tfrac{2\mu}{(\mu+k-1)^2(\mu+k)}.$$

Далее с учетом (5) имеем

$$\begin{aligned}|r_{\mu,1}| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\ln\big((\mu+k)(\mu+k+1)\big)+\ln\big((\mu+k-1)(\mu+k)\big)\Big)\\ &\times\tfrac{2\mu}{(\mu+k-1)^2(\mu+k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4|E_\mu+\ln\mu|\cdot\mu}{(\mu+k-1)^2(\mu+k)}\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}4\ln(\mu+k+1)\cdot\tfrac{2\mu}{(\mu+k-1)^2(\mu+k)}\\ &+\tfrac{4|E_\mu+\ln\mu|}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{8\ln(\mu+k+1)\mu}{(\mu+k-1)^2(\mu+k)}+\tfrac{4|E_\mu+\ln\mu|}{\mu}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\mu+k+1)}{\mu+k-1}&=\frac{\ln\mu+\ln\big(1+\frac{k+1}{\mu}\big)}{\mu+k-1}\\ &\leqslant\frac{|\ln\mu|}{\mu}+\frac{1+\frac{k+1}{\mu}}{\mu+k-1}=\frac{|\ln\mu|}{\mu}+\frac{\mu+k+1}{\mu(\mu+k-1)}\\ &=\frac{|\ln\mu|}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu(\mu+k-1)}\leqslant\frac{|\ln\mu|}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu^2}.\end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}|r_{\mu,1}|&\leqslant 8\Big(\tfrac{|\ln\mu|}{\mu}+\tfrac{1}{\mu}+\tfrac{2}{\mu^2}\Big)\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}+\tfrac{4|E_\mu+\ln\mu|}{\mu}\\ &=8\Big(\tfrac{|\ln\mu|}{\mu}+\tfrac{1}{\mu}+\tfrac{2}{\mu^2}\Big)+\tfrac{4|E_\mu+\ln\mu|}{\mu}.\end{aligned}$$

С учетом леммы 2 несложно убедиться, что $r_{\mu,1}\to 0$ при $\mu\to\infty$.

Далее мы рассмотрим величину S_μ:

$$\begin{aligned}
S_\mu &= \sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Bigr) + \ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr) - 2E_\mu\biggr) \\
&\times \left(\tfrac{2\mu}{\mu+k-1} - \tfrac{2\mu}{\mu+k}\right) \\
&= 2\biggl(\ln\Bigl(\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)}{\mu}\Bigr) + \ln(\mu+1) - 2E_\mu\biggr) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k+1)(\mu+k+2)}{\mu}\Bigr) + \ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Bigr) \\
&\quad - \ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Bigr) - \ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr)\biggr)\cdot\tfrac{2\mu}{\mu+k} \\
&= 2\biggl(\ln\Bigl(1+\tfrac{2}{\mu}\Bigr) + 2\ln(\mu+1) - 2E_\mu\biggr) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\ln\Bigl(1+\tfrac{2}{\mu+k}\Bigr) + \ln\Bigl(1+\tfrac{2}{\mu+k-1}\Bigr)\biggr)\cdot\tfrac{2\mu}{\mu+k}.
\end{aligned}$$

С учетом (5) представим

$$\begin{aligned}
S_\mu &= 4\bigl(\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr) + \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{8\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} + r_{\mu,2} - r_{\mu,3} - r_{\mu,4} \\
&= 4\bigl(\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr) + 8 + r_{\mu,2} - r_{\mu,2} - r_{\mu,3},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
r_{\mu,2} &:= 2\ln\Bigl(1+\tfrac{2}{\mu}\Bigr), \\
r_{\mu,3} &:= \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} - \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4\mu}{(\mu+k)2}, \\
r_{\mu,4} &:= \sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\tfrac{2}{\mu+k} - \ln\Bigl(1+\tfrac{2}{\mu+k}\Bigr)\biggr)\tfrac{2\mu}{\mu+k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\tfrac{2}{\mu+k-1} - \ln\Bigl(1+\tfrac{2}{\mu+k-1}\Bigr)\biggr)\tfrac{2\mu}{\mu+k}.
\end{aligned}$$

Ясно, что $r_{\mu,2} \to 0$ при $\mu \to \infty$. Рассмотрим $r_{\mu,3}$:

$$
\begin{aligned}
r_{\mu,3} &= \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\tfrac{4\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} - \tfrac{4\mu}{(\mu+k)^2}\Bigr) = \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)^2} \\
&\leqslant \tfrac{4}{\mu+1}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} = \tfrac{4}{\mu+1}.
\end{aligned}
$$

Так как $r_{\mu,3} \geqslant 0$, заключаем, что $r_{\mu,3} \to 0$ при $\mu \to \infty$. Оценим $r_{\mu,4}$, используя (11):

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant r_{\mu,4} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4\mu}{(\mu+k)^3} + \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4\mu}{(\mu+k)(\mu+k-1)^2} \\
&\leqslant \tfrac{4}{\mu+1}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\mu}{(\mu+k)(\mu+k-1)} + \tfrac{4}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\mu}{(\mu+k)(\mu+k-1)} = \tfrac{4}{\mu+1} + \tfrac{4}{\mu}.
\end{aligned}
$$

Последнее равенство получено за счет (5). Ясно, что $r_{\mu,4} \to 0$ при $\mu \to \infty$. В итоге для S_μ имеем:

$$
S_\mu = 4\bigl(\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr) + 8 + o(1), \quad \mu \to \infty.
$$

Вернемся к D_μ:

$$
\begin{aligned}
D_\mu &= \bigl(\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr)^2 + S_\mu - r_{\mu,1} \\
&= \bigl(\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr)^2 + 4\bigl(\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr) + 8 + o(1), \quad \mu \to \infty.
\end{aligned}
$$

В соответствии с леммой 2 будем иметь

$$
D_\mu = \bigl(-2 + o(1)\bigr)^2 + 4\bigl(-2 + o(1)\bigr) + 8 + o(1) \to 4, \quad \mu \to \infty. \qquad \square
$$

Определим для любого $\mu > 0$ вспомогательную величину:

$$
A_\mu := \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl|\ln\Bigl(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Bigr) - E_\mu\Bigr|^3 \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)},
$$

которая будет использоваться ниже. В следующей лемме мы даем оценку для нее.

Лемма 4. *Для любого* $\mu > 0$ *верна оценка*

$$
A_\mu \leqslant \bigl|\ln(\mu+1) - E_\mu\bigr|^3 + 2D_\mu \cdot \Bigl(2 + \tfrac{2}{\mu} + \sqrt{1 + \tfrac{2}{\mu}}\Bigr).
$$

Доказательство леммы 4. Зафиксируем $\mu > 0$ и запишем:

$$\begin{aligned}
A_\mu &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^3 \cdot \Big(\tfrac{\mu}{\mu+k-1} - \tfrac{\mu}{\mu+k}\Big) \\
&= \big|\ln(\mu+1) - E_\mu\big|^3 \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^3 - \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^3\bigg)\tfrac{\mu}{\mu+k} \\
&= \big|\ln(\mu+1) - E_\mu\big|^3 \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big| - \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|\bigg) \\
&\cdot \bigg(\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^2 + \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^2 \\
&\quad + \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big| \cdot \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|\bigg)\tfrac{\mu}{\mu+k}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big| &- \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big| \leqslant \\
&\leqslant \ln\big((\mu+k)(\mu+k+1)\big) - \ln\big((\mu+k-1)(\mu+k)\big) \\
&\leqslant \ln\Big(1 + \tfrac{2}{\mu+k-1}\Big) \leqslant \tfrac{2}{\mu+k-1}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
A_\mu &\leqslant \big|\ln(\mu+1) - E_\mu\big|^3 \\
&+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^2 + \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^2 \\
&+ \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big| \cdot \Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|\bigg)\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big) - E_\mu\Big|^2 \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} = D_\mu,$$

а также

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|^2\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|^2\tfrac{\mu}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\cdot\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{(\mu+k-1)(\mu+k)}$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|^2\tfrac{\mu}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\cdot\Big(1+\tfrac{2}{\mu}\Big)$$
$$=D_\mu\cdot\Big(1+\tfrac{2}{\mu}\Big).$$

Далее заметим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|\cdot\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}$$
$$\leqslant\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|^2\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ln\Big(\tfrac{(\mu+k)(\mu+k+1)}{\mu}\Big)-E_\mu\Big|^2\tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}\Bigg)^{1/2}$$
$$=\Big(D_\mu^2\cdot\Big(1+\tfrac{2}{\mu}\Big)\Big)^{1/2}=D_\mu\cdot\sqrt{1+\tfrac{2}{\mu}}.$$

$$A_\mu\leqslant\big|\ln(\mu+1)-E_\mu\big|^3+2\Big(D_\mu+D_\mu\cdot\Big(1+\tfrac{2}{\mu}\Big)+D_\mu\cdot\sqrt{1+\tfrac{2}{\mu}}\Big)$$
$$\leqslant\big|\ln(\mu+1)-E_\mu\big|^3+2D_\mu\cdot\Big(2+\tfrac{2}{\mu}+\sqrt{1+\tfrac{2}{\mu}}\Big).\qquad\square$$

Доказательство теорем 1 и 2. Справедливость асимптотик (7) и (8) будет доказана с помощью следующего вероятностного подхода, который был придуман в [10] и развит в [6]. Для данной последовательности $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ на некотором вероятностном пространстве вводится последовательность независимых случайных величин с распределениями:

$$\mathbb{P}\big(U_j=|\ln\lambda_{\mu_j,k}|\big)=\lambda_{\mu_j,k},\quad k\in\mathbb{N},\quad j\in\mathbb{N},$$

т.е.

$$\mathbb{P}\Big(U_j = \ln\Big(\tfrac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\Big)\Big) = \tfrac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что в точности

$$\mathbb{E}\, U_j = E_{\mu_j}, \quad \mathbb{D}\, U_j = D_{\mu_j}, \quad \mathbb{E}\, |U_j - \mathbb{E}\, U_j|^3 = A_{\mu_j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Более того, при каждом $d \in \mathbb{N}$ справедливо представление (см. [6], Лемма 1, с. 845):

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{d} U_j - a_d}{b_d} \leqslant x\right) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \lambda_m^{Y_d} \geqslant e^{-a_d - b_d x}}} \lambda_m^{Y_d}, \quad x \in \mathbb{R},$$

с любыми константами $a_d \in \mathbb{R}$ и $b_d > 0$.

В соответствии с теоремой 1 из [6] (с. 841) сходимость

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \lambda_m^{Y_d} \geqslant e^{-a_d - b_d x}}} \lambda_m^{Y_d} \to \Phi(x), \quad d \to \infty, \quad \text{при каждом} \quad x \in \mathbb{R},$$

равносильна асимптотике

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2) b_d + o(b_d), \quad d \to \infty, \tag{12}$$

при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Поэтому, в частности, чтобы получить (12) с данными $a_d \in \mathbb{R}$ и $b_d > 0$, достаточно проверить:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{d} U_j - a_d}{b_d} \leqslant x\right) \to \Phi(x), \quad d \to \infty, \quad \text{при каждом} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Сделаем эту проверку в рамках предположений теорем. При каждом $d \in \mathbb{N}$ определим дробь Ляпунова:

$$L_d := \frac{\sum\limits_{j=1}^{d} A_{\mu_j}}{\big(\sum\limits_{j=1}^{d} D_{\mu_j}\big)^{3/2}}.$$

Пусть $\mu_j \to c$, где $c \in (0,\infty)$, при $j \to \infty$. Тогда по лемме 1 имеем $E_{\mu_j} \to E_c$ и $D_{\mu_j} \to D_c$, $j \to \infty$. В частности, это влечет ограниченность последовательностей $(E_{\mu_j})_{j\in\mathbb{N}}$ и $(D_{\mu_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Это, в свою очередь, дает ограниченность $(A_{\mu_j})_{j\in\mathbb{N}}$, т.е найдется число $C > 0$, что $A_{\mu_j} \leqslant C$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{d} A_{\mu_j} \leqslant C\cdot d, \quad d\in\mathbb{N}. \tag{14}$$

В то же время имеем

$$\sum_{j=1}^{d} E_{\mu_j} \sim E_c\cdot d, \quad \sum_{j=1}^{d} D_{\mu_j} \sim D_c\cdot d, \quad d\to\infty.$$

Видим, что $L_d = O(d^{-1/2}) \to 0$, $d\to\infty$. Тогда по центральной предельной теореме с условием Ляпунова справедлива сходимость (13), если положить $a_d := \sum\limits_{j=1}^{d} E_{\mu_j}$ и $b_d := \sqrt{D_c\cdot d}$, $d\in\mathbb{N}$ (здесь и ниже мы сразу заменяем классическую нормирующую последовательность $(\sum\limits_{j=1}^{d} D_{\mu_j})^{1/2}$, $d\in\mathbb{N}$, на эквивалентную, что, как известно, не нарушает сходимости).

Пусть теперь $\mu_j\to\infty$ при $j\to\infty$. По лемме 2 имеем $E_{\mu_j} = \ln(\mu_j + 1) + 2 + o(1)$, $j\to\infty$, и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{d} E_{\mu_j} = \sum_{j=1}^{d} \ln(\mu_j+1) + 2d + o(d), \quad d\to\infty.$$

В силу леммы 3 верно $D_{\mu_j}\to 4$, $j\to\infty$, и, значит,

$$\sum_{j=1}^{d} D_{\mu_j} = 4d + o(d), \quad d\to\infty.$$

При этом по неравенству леммы 4 последовательность $(A_{\mu_j})_{j\in\mathbb{N}}$ будет ограниченной некоторой константой $C > 0$ и будет выполняться (14). Тогда $L_d = O(d^{-1/2}) \to 0$, $d\to\infty$, и по центральной предельной теореме с условием Ляпунова будем иметь сходимость (13), если положить $a_d := \sum\limits_{j=1}^{d} E_{\mu_j}$ и $b_d := \sqrt{4\cdot d}$, $d\in\mathbb{N}$. $\square$

Список литературы

1. А. А. Кравченко, А. А. Хартов, *Асимптотики сложности аппроксимации в среднем для тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов*— Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 147–161.

2. T. W. Anderson, D.A. Darling, *A test of goodness of fit.* — J. Amer. Statist. Assoc. **49** (1954), 765–769.
3. J. L. Brown, *Mean Square truncation error in series expansions of random functions.* — J. Soc. Indust. Appl. Math. **8**, No. 1 (1960), 28–32.
4. J. Chen, H. Wang, J. Zhang, *Average case (s,t)-weak tractability of non-homogeneous tensor product problems.* — J. Complexity, **49** (2018), 27–45.
5. A. Karol, A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators.* — Trans. Amer. Math. Soc. **360**, No. 3 (2008), 1443–1474.
6. A. A. Khartov, *Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements.* — J. Complexity, **31** (2015), 835–866.
7. A. A. Khartov, I. A. Limar, *Asymptotic analysis in multivariate average case approximation with Gaussian kernels.* — J. Complexity, **70** (2022), 101631.
8. M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Average case tractability of non-homogeneous tensor product problems.* — J. Complexity, **28** (2012), 539–561.
9. M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes.* — Probab. Math. Stat., **32**, No. 1 (2012), 131–165.
10. M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimensionality in approximation of random fields.* — Probab. Math. Stat. **26**, No. 1 (2006), 97–112.
11. Y. Liu, G. Xu, *Average case tractability of a multivariate approximation problem.* — J. Complexity **43** (2017), 76–102.
12. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zürich, 2008.
13. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals*, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zürich, 2010.
14. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators*, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zürich, 2012.
15. A. Papageorgiou, I. Petras, G. Xu, D. Yanqi, *EC-(s,t)-weak tractability of multivariate linear problems in the average case setting.* — J. Complexity **55** (2019), 101425.
16. J.-R. Pycke, Multivariate extensions of the Anderson–Darling process, Stat. Probab. Letters, **63** (2003), 387–399.
17. K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems*, Lecture Notes in Math. No. 1733, Springer, Berlin, 2000.
18. G. R. Shorack, J. A. Wellner, *Empirical Processes with Applications to Statistics*, Wiley, New York, 1986.

Khartov A. A., Approximation of multiparametric Anderson-Darling processes.

We consider a sequence of Gaussian random fields that are growing tensor products of generalized Anderson-Darling processes with a given sequence of main parameters $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ that characterize a proximity to the Gaussian white noise. The average case approximation complexity for a given d-parametric random field is defined as the minimal number of values of continuous linear functionals that is needed to approximate the field with relative 2-average error not exceeding a given threshold ε. In the paper we obtain logarithmic asymptotics of the average case approximation complexity for such random fields for fixed $\varepsilon \in (0,1)$ and $d \to \infty$ for in fact homogeneous case $\mu_j \to c$, $j \to \infty$, where $c \in (0,\infty)$ is a constant, and for the case $\mu_j \to \infty$, $j \to \infty$, that is rather non-standard for the practice of the similar approximation problems.

Лаборатория вероятностных
проблем аппроксимации,
Смоленский Государственный Университет,
ул. Пржевальского д. 4,
214000, Смоленск, Россия;
Научно-Образовательный Центр Математики,
Университет ИТМО,
Кронверкский проспект 49,
197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alexeykhartov@gmail.com

Поступило 19 октября 2022 г.