Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

К. А. Трегубова, А. А. Хартов

СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ ДИКМАНА

§1. Введение

Данная статья посвящена нахождению простых критериев слабой сходимости распределений сумм независимых неотрицательных случайных величин к интересным представителям класса безгранично делимых законов, а именно к так называемым обобщенным законам Дикмана.

Напомним определение обобщенных законов Дикмана и некоторые факты, связанные с ними, следуя работам [9, 10] и [13]. Указанные законы распределения строятся на основе *функции Дикмана*, хорошо известной из аналитической теории чисел (см. [8] и [13]). Напомним, что *функцией Дикмана* называют такую функцию ρ на вещественной прямой $\mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$x\rho'(x) + \rho(x-1) = 0, \quad x \geqslant 1, \tag{1}$$

с начальными условиями: $\rho(x) = 0$ при $x < 0$, $\rho(x) = 1$ при $x \in [0,1]$. На $[1, +\infty)$ функция ρ может быть построена путем последовательного решения уравнения (1) на отрезках $[1,2]$, $[2,3]$ и т.д.:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - \ln x, & x \in [1,2], \\ (1-\ln 2) + \int\limits_2^x \frac{\ln(y-1)-1}{y} dy, & x \in [2,3], \\ \dots . & \end{cases}$$

Можно показать, что функция Дикмана на $[0, +\infty)$ является положительной, убывающей и логарифмически вогнутой. Также известно,

---

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, схема серий, предельные теоремы, распределение Дикмана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ–ННИО 20-51-12004.

что:
$$\int_0^\infty \rho(u)du = e^\gamma \approx 1,7811,$$
где γ — это константа Эйлера–Маскерони, $\gamma \approx 0,5772$.

Законом Дикмана называется абсолютно непрерывный закон с плотностью распределения
$$\rho_1(x) = e^{-\gamma}\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Ясно, что ρ_1 будет удовлетворять уравнению (1), если в последнем заменить ρ на ρ_1.

Под *обобщенными законами Дикмана* понимают абсолютно непрерывные законы с плотностями $\rho_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, которые удовлетворяют следующему уравнению, обобщающему (1):
$$(x^{1-\alpha}\rho_\alpha(x))' + \alpha x^{-\alpha}\rho_\alpha(x-1) = 0, \quad x \geqslant 1, \tag{2}$$
с начальными условиями: $\rho_\alpha(x) = 0$ при $x < 0$, $\rho_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}$ при $x \in [0,1]$, здесь $\Gamma(\,\cdot\,)$ – гамма-функция. Видно, что при $\alpha = 1$ уравнение (2) описывает введенную выше плотность ρ_1.

Для обобщенных законов Дикмана при каждом $\alpha > 0$ определим функции распределения
$$D_\alpha(x) := \int_0^x \rho_\alpha(u)du, \quad x \in \mathbb{R},$$
и соответствующие характеристические функции
$$\omega_\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\rho_\alpha(x)dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Оказывается (см. [9]), ω_α имеют весьма простое представление
$$\omega_\alpha(t) = \exp\biggl\{\alpha \int_0^1 \frac{e^{iut}-1}{u}\,du\biggr\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$
из которого легко видеть, что для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$
$$\omega_{\alpha+\beta}(t) = \omega_\alpha(t)\,\omega_\beta(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Отсюда имеем
$$D_{\alpha+\beta}(x) = (D_\alpha * D_\beta)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и также

$$\rho_{\alpha+\beta}(x) = (\rho_\alpha * \rho_\beta)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где “$*$” обозначает свертку. Обобщенные версии закона Дикмана можно было бы вполне естественно определить и с помощью формулы (3).

В настоящее время к закону Дикмана и его обобщениям проявляется большой интерес. Это объясняется их применениями в различных областях математики (теории чисел, комбинаторика, теория графов), в финансах и страховании (теория экстремальных значений), в моделях биологии (рост и эволюция одноклеточных популяций) и физики (случайные уровни энергии), см. обзорную статью [10] и ссылки в ней.

Существует интересные факты теоретико-вероятностного характера о случайных величинах, распределенных в соответствии с обобщенными законами Дикмана (см. [11]). Пусть Y имеет функцию распределения D_α с выбранным $\alpha > 0$. Тогда

$$Y \stackrel{d}{=} U_0^{1/\alpha}(1+Y),$$

где U_0 – случайная величина, равномерно распределенная на $[0,1]$ и независимая от Y (в формуле символ $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство по распределению). Справедливо и такое представление:

$$Y \stackrel{d}{=} (U_1)^{\frac{1}{\alpha}} + (U_1 \cdot U_2)^{\frac{1}{\alpha}} + (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3)^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots,$$

где U_1, U_2, U_3, $\ldots$– независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0,1]$.

Из формулы (3) можно увидеть, что все обобщенные законы Дикмана являются безгранично делимыми и саморазложимыми (см. [3], теорема 5 на с. 48 и теорема 7 на с. 121). Существуют примеры предельных теорем для сумм независимых случайных величин, где обобщенные законы Дикмана выступают в качестве предельных распределений. Самым простым и известным примером является слабая сходимость к закону Дикмана ($\alpha = 1$) последовательности распределений нормированных сумм

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kX_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

с независимыми бернуллиевскими случайными величинами X_k с параметрами $1/k$, т.е. $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0) = 1/k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел. Если рассмотреть те же суммы, но с пуассоновскими величинами X_k с параметрами $\frac{\alpha}{k}$

соответственно, где $\alpha > 0$, то предельным распределением будет обобщенный закон Дикмана с параметром α (см. [6] и [12]). Существуют и более общие версии данных предельных теорем, где рассматриваются суммы (4), но с заменой чисел k перед X_k на случайные величины с конечными математическими ожиданиями (или дисперсиями), и приводятся достаточные условия слабой сходимости распределений таких сумм к законам Дикмана (подробнее см. [7] и [12]).

Рассмотрим вопрос о существовании критериев слабой сходимости распределений сумм независимых случайных величин к обобщенным законам Дикмана. Здесь, как мы видим, нет специальных результатов даже в классической постановке (с условием равномерной предельной пренебрегаемости), если не учитывать известные общие необходимые и достаточные условия сходимости к заданному безгранично делимому распределению (см. [1] и [3]). Последние для специальных случаев требуют, вообще говоря, весьма непростого дополнительного анализа для получения более простых форм условий. Это, например, показывают случаи сходимости к вырожденному, нормальному и другим устойчивым законам. В данной статье мы сделаем этот анализ для случая сходимости к обобщенным законам Дикмана распределений сумм независимых неотрицательных случайных величин в рамках схемы серий в классической постановке.

§2. Постановка задачи и предварительные замечания

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ задана последовательность серий из независимых в каждой серии случайных величин:

$$X_{n,1},\ X_{n,2},\ \dots,\ X_{n,l_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – произвольная последовательность из $\mathbb{N}$. Пусть $F_{n,k}$ обозначает функцию распределения $X_{n,k}$. Предполагается, что все величины неотрицательны, т.е. $X_{n,k} \geqslant 0$ для всех n и k, и удовлетворяют классическому *условию равномерной предельной пренебрегаемости*:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant l_n} \mathbb{P}\big(X_{n,k} > \varepsilon\big) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{UN}$$

Рассматривается последовательность функций распределения следующего вида:

$$G_n(x) := \mathbb{P}\Bigg(\sum_{k=1}^{l_n} X_{n,k} \leqslant x\Bigg), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Как известно (см. [3]), слабыми пределами для (6) могут выступать только безгранично делимые функции распределения, у которых множество точек роста будет содержаться в $[0,\infty)$ за счет предположения неотрицательности случайных величин $X_{n,k}$. Функции распределения D_α, $\alpha>0$, обобщенных законов Дикмана являются представителями этого семейства, и нас интересует задача нахождения (в рамках сделанных предположений) специальных критериев слабой сходимости последовательности $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ к D_α с заданным α.

Предварительно мы рассмотрим критерий, который сразу получается из общих результатов классической теории суммирования независимых случайных величин. Сначала запишем представление Леви для характеристических функций (3), соответствующих D_α:

$$\omega_\alpha(t)=\exp\left\{it\gamma-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(e^{itx}-1-\tfrac{itx}{1+x^2}\right)dL(x)\right\},\quad t\in\mathbb{R},$$

где $L(x)=\alpha\ln x$ при $x\in(0,1]$, и $L(x)=0$ при $x<0$ и $x>1$, $\sigma^2=0$, и

$$\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\frac{x}{1+x^2}\,dL(x)=\int\limits_0^1\frac{x}{1+x^2}\,d(\alpha\ln x)=\int\limits_0^1\frac{\alpha}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi\alpha}{4}.$$

Как известно, триплет (γ,σ^2,L) определяется однозначно по характеристической функции. Для получения интересующего критерия применим теорему 6 из [3] (Глава IV, с. 117) с учетом приведенных формул для компонент триплета, равенств $F_{n,k}(x)=L(x)=0$ при $x<0$, непрерывности L на $(0,\infty)$ и отсутствия центрирующих констант для сумм (т.е. полагаем $b_n:=0$ в теореме 6). В предположении (UN) последовательность $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к D_α с заданным $\alpha>0$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$(\mathrm{A}_+)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l_n}\big(1-F_{n,k}(\tau)\big)=-\alpha\ln\tau\cdot\mathbb{1}\big(\tau\in(0,1]\big),\quad \tau>0;$$

$$(\mathrm{B}_+)\qquad \lim_{\tau\to0}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l_n}\left[\int\limits_{(0,\tau]}x^2\,dF_{n,k}(x)-\left(\int\limits_{(0,\tau]}x\,dF_{n,k}(x)\right)^2\right]$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \left[\int\limits_{(0,\tau]} x^2\, dF_{n,k}(x) - \left(\int\limits_{(0,\tau]} x\, dF_{n,k}(x) \right)^2 \right] = 0;$$

$$(\mathrm{C}_+) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \int\limits_{(0,\tau]} x\, dF_{n,k}(x) = \alpha \min\{\tau, 1\}, \quad \tau > 0.$$

Отметим, что величина в правой части (C_+) при каждом $\tau > 0$ в точности равна величине

$$m(\tau) := \gamma + \int\limits_{(0,\tau]} \frac{x^3}{1+x^2}\, dL(x) - \int\limits_{(\tau,\infty)} \frac{x}{1+x^2}\, dL(x),$$

которая фигурирует в соответствующем условии применяемой теоремы 6. Действительно, при $\tau \in (0,1]$

$$m(\tau) = \frac{\pi\alpha}{4} + \int\limits_{(0,\tau]} \frac{\alpha x^2}{1+x^2}\, dx - \int\limits_{(\tau,1]} \frac{\alpha}{1+x^2}\, dx$$
$$= \frac{\pi\alpha}{4} + (\alpha\tau - \alpha \operatorname{arctg}\tau) - \left(\frac{\pi\alpha}{4} - \alpha \operatorname{arctg}\tau \right) = \alpha\tau,$$

а при $\tau > 1$

$$m(\tau) = \frac{\pi\alpha}{4} + \int\limits_{(0,1]} \frac{\alpha x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi\alpha}{4} + \left(\alpha - \frac{\pi\alpha}{4} \right) = \alpha.$$

Итак, набор условий (A_+), (B_+) и (C_+) составляет имеющийся к настоящему моменту критерий слабой сходимости распределений сумм независимых случайных величин к обобщенным законам Дикмана в указанной постановке. В следующем пункте мы покажем, что его можно заметно упростить, а именно свести к одному условию (C_+), добавив лишь *относительную компактность* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (см. [5] с. 407–409).

§3. Результаты

Сформулируем главный результат данной статьи.

Теорема 1. *Пусть для случайных величин* (5) *выполнено условие* (UN). *Последовательность* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *слабо сходится к* D_α *с заданным* $\alpha > 0$ *тогда и только тогда, когда* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *относительно компактна и выполнено условие* (C_+).

Доказательство. *Необходимость.* Если $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к D_α, то она, как и любая слабо сходящаяся последовательность функций распределения, является относительно компактной. Как показано выше, условие (C_+) в числе необходимых для сходимости.

Нам нужно показать, что условие (C_+) и относительная компактность $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вместе влекут справедливость (A_+) и (B_+).

Сначала докажем выполнение (B_+). Рассмотрим величины

$$B_{n,k}(\tau) := \int\limits_{(0,\tau]} x^2\,dF_{n,k}(x) - \Bigg(\int\limits_{(0,\tau]} x\,dF_{n,k}(x)\Bigg)^2,$$

для любых $n\in\mathbb{N}$, $k=1,\ldots,l_n$, и $\tau>0$. С одной стороны, заметим, что

$$B_{n,k}(\tau) \leqslant \int\limits_{(0,\tau]} x^2\,dF_{n,k}(x) \leqslant \tau \int\limits_{(0,\tau]} x\,dF_{n,k}(x).$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\Bigg(\int\limits_{(0,\tau]} x\,dF_{n,k}(x)\Bigg)^2 \leqslant \int\limits_{(0,\tau]} x^2\,dF_{n,k}(x) \int\limits_{(0,\tau]} dF_{n,k}(x) \leqslant \int\limits_{(0,\tau]} x^2\,dF_{n,k}(x).$$

Тогда для любых $n\in\mathbb{N}$, $k=1,\ldots,l_n$, и $\tau>0$ получаем неравенства

$$0 \leqslant B_{n,k}(\tau) \leqslant \tau \int\limits_{(0,\tau]} x\,dF_{n,k}(x),$$

из которых вытекают следующие соотношения

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{l_n} B_{n,k}(\tau) \leqslant \tau \sum_{k=1}^{l_n} \int\limits_{(0,\tau]} x\,dF_{n,k}(x), \quad \text{для любых} \quad n\in\mathbb{N}, \quad \tau>0.$$

Отсюда с учетом условия (C_+) получаем, что для любого $\tau>0$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} B_{n,k}(\tau) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} B_{n,k}(\tau) \\ &\leqslant \tau \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n}, \int\limits_{(0,\tau]} x\,dF_{n,k}(x) = \tau\alpha\min\{\tau,1\}. \end{aligned}$$

Тогда легко видеть, что

$$\lim_{\tau\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l_n} B_{n,k}(\tau)=\lim_{\tau\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l_n} B_{n,k}(\tau)=0.$$

Таким образом, справедливость (B_+) доказана.

Теперь проверим выполнение (A_+). Сначала покажем, что выполнено:

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T)\bigr)=0. \tag{7}$$

Известно (см. [4]), что относительная компактность $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ влечет

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T+m_{n,k})\bigr)=0, \tag{8}$$

где $m_{n,k}$ обозначает медиану $F_{n,k}$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. В соответствии с (8) найдется $T'_\varepsilon>0$ такое, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T'_\varepsilon+m_{n,k})\bigr)<\varepsilon. \tag{9}$$

По предположению (UN) существует такое $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, что для любого натурального $n>n_\varepsilon$ верно $m_{n,k}\leqslant\varepsilon$ для каждого $k=1,\ldots,l_n$. Тогда при $n>n_\varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T'_\varepsilon+m_{n,k})\bigr)\geqslant\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T'_\varepsilon+\varepsilon)\bigr).$$

Следовательно, с учетом (9) получаем

$$\sup_{n>n_\varepsilon}\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T'_\varepsilon+\varepsilon)\bigr)<\varepsilon.$$

Для случаев $n=1,\ldots,n_\varepsilon$ заметим, что найдется такое $T''_\varepsilon>0$, что

$$\sup_{n\leqslant n_\varepsilon}\sum_{k=1}^{l_n}\bigl(1-F_{n,k}(T''_\varepsilon)\bigr)<\varepsilon.$$

Далее выбирая $T_\varepsilon := \max\{T'_\varepsilon + \varepsilon, T''_\varepsilon\}$, получаем, что при любом $T \geqslant T_\varepsilon$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(T)\bigr) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(T_\varepsilon)\bigr)$$
$$\leqslant \max\biggl\{ \sup_{n\leqslant n_\varepsilon} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(T''_\varepsilon)\bigr), \sup_{n>n_\varepsilon} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(T'_\varepsilon + \varepsilon)\bigr) \biggr\} < \varepsilon.$$

Итак, мы показали справедливость (7).

Далее зафиксируем $\tau > 0$ и рассмотрим суммы из условия (A$_+$):

$$\sum_{k=1}^{l_n} (1 - F_{n,k}(\tau)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $T_\varepsilon > \max\{\tau, 1\}$, что выполнено

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(T_\varepsilon)\bigr) < \varepsilon.$$

Заметим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \biggl| \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(\tau)\bigr) - \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(F_{n,k}(T_\varepsilon) - F_{n,k}(\tau)\bigr) \biggr|$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - F_{n,k}(T_\varepsilon)\bigr) < \varepsilon. \tag{10}$$

Далее рассмотрим:

$$\sum_{k=1}^{l_n} \bigl(F_{n,k}(T_\varepsilon) - F_{n,k}(\tau)\bigr) = \sum_{k=1}^{l_n} \int\limits_{(\tau, T_\varepsilon]} dF_{n,k}(x) = \int\limits_{(\tau, T_\varepsilon]} \frac{1}{x}\, dV_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

где

$$V_n(x) := \sum_{k=1}^{l_n} \int\limits_{(0,x]} u\, dF_{n,k}(u), \quad x \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функции V_n, $n \in \mathbb{N}$, являются неубывающими на $[0, +\infty)$, и по условию (C$_+$) для них верна сходимость $V_n(x) \to V(x) := \alpha \min\{x, 1\}$ при $n \to$

∞ для каждого $x \geqslant 0$. Заметим также, что V_n, $n \in \mathbb{N}$, равномерно ограничены на отрезке $[0, T_\varepsilon]$. Действительно,

$$V_n(x) \leqslant \sum_{k=1}^{l_n} \int\limits_{(0,T_\varepsilon]} u\, dF_{n,k}(u), \quad x \in [0, T_\varepsilon], \quad n \in \mathbb{N},$$

где суммы в правой части сходятся к $V(T_\varepsilon) = \alpha \min\{T_\varepsilon, 1\} = \alpha$ при $n \to \infty$, а значит ограничены некоторой константой.

Рассмотрим интегралы по V_n в правой части (11). Функция $x \mapsto \frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $[\tau, T_\varepsilon]$, а τ и T_ε являются точками непрерывности функции V. Тогда по известной теореме Хелли (см. [2], с. 64–65) имеем

$$\int\limits_{(\tau,T_\varepsilon]} \frac{1}{x}\, dV_n(x) \to \int\limits_{(\tau,T_\varepsilon]} \frac{1}{x}\, dV(x), \quad n \to \infty.$$

Заметим, что $V(x) = \alpha x$, $x \in (0, 1]$ и $V(x) = \alpha$, $x \in (1, +\infty)$. Тогда при $\tau \in (0, 1]$

$$\int\limits_{(\tau,T_\varepsilon]} \frac{1}{x}\, dV(x) = \alpha \int\limits_{(\tau,1]} \frac{1}{x}\, dx = \alpha \ln 1 - \alpha \ln \tau = -\alpha \ln \tau,$$

а при $\tau > 1$ имеем

$$\int\limits_{(\tau,T_\varepsilon]} \frac{1}{x}\, dV(x) = 0.$$

Тогда в соответствии с (11) получаем

$$\sum_{k=1}^{l_n} \big(F_{n,k}(T_\varepsilon) - F_{n,k}(\tau)\big) = \int\limits_{(\tau,T_\varepsilon]} \frac{1}{x}\, dV_n(x) \to -\alpha \ln(\min\{\tau, 1\}), \quad n \to \infty,$$

т.е. найдется такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ выполнится

$$\Big| \sum_{k=1}^{l_n} \big(F_{n,k}(T_\varepsilon) - F_{n,k}(\tau)\big) + \alpha \ln(\min\{\tau, 1\}) \Big| < \varepsilon.$$

Отсюда и из (10) имеем при любых $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\Big|\sum_{k=1}^{l_n}\big(1-F_{n,k}(\tau)\big)+\alpha\ln(\min\{\tau,1\})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{l_n}\big(1-F_{n,k}(\tau)\big)-\sum_{k=1}^{l_n}\big(F_{n,k}(T_\varepsilon)-F_{n,k}(\tau)\big)\Big|$$

$$+\Big|\sum_{k=1}^{l_n}\big(F_{n,k}(T_\varepsilon)-F_{n,k}(\tau)\big)+\alpha\ln(\min\{\tau,1\})\Big|<2\varepsilon.$$

В силу произвольного выбора $\varepsilon > 0$, это и будет означать, что при любом $\tau > 0$

$$\sum_{k=1}^{l_n}\big(1-F_{n,k}(\tau)\big)\to-\alpha\ln(\min\{\tau,1\}),\quad n\to\infty.$$

Таким образом, справедливость (A_+) доказана. □

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 условие относительной компактности можно заменить на равенство (7).

Справедливость этого замечания видна из доказательства теоремы 1.

Теперь мы рассмотрим случай, когда каждая величина $X_{n,k}$ в (5) имеет конечное математическое ожидание $E_{n,k}$. Тогда с помощью теоремы 1 можно получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть для случайных величин* (5) *выполнено условие* (UN). *Пусть также при заданном* $\alpha > 0$ *верно*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l_n}E_{n,k}=\alpha. \tag{12}$$

Тогда $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *слабо сходится к* D_α*, если и только если справедливо*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l_n}\int\limits_{(\tau,\infty)}x\,dF_{n,k}(x)=\alpha\max\{0,1-\tau\}\quad\text{при любом}\quad\tau>0. \tag{13}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1. Сначала покажем, что в сделанных предположениях $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ относительно компактна. Пусть зафиксировано $\alpha > 0$. В силу (12) найдется константа $A > 0$ такая, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} E_{n,k} \leqslant A.$$

Тогда заметим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\biggl(\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} > R\biggr) \leqslant \frac{1}{R} \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} E_{n,k} \leqslant \frac{A}{R}.$$

Отсюда видно, что левый супремум стремится к нулю при $R \to \infty$, т.е. последовательность $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ плотна. Следовательно, по теореме Прохорова она относительно компактна. В соответствии с теоремой 1 выходит, что слабая сходимость $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ к D_α равносильна выполнению (C_+). Далее, вычитая равенство (C_+) из равенства в (12), где представляем $E_{n,k} = \int_{(0,\infty)} x\, dF_{n,k}(x)$, приходим к (13). $\square$

Следует отметить, что условие (12) указывает на естественный способ нормирования сумм независимых неотрицательных случайных величин для слабой сходимости к D_α, тем более что математическое ожидание случайной величины с функцией распределения D_α равно в точности α (легко видеть из (3)). Такой способ всегда осуществим, поэтому предположение (12) фактически не является ограничивающим. Действительно, если заданы серии случайных величин $X'_{n,1}, X'_{n,2}, \ldots, X'_{n,l_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и каждая $X'_{n,k}$ имеет математическое ожидание $E'_{n,k}$, то, определив $E_n := \sum\limits_{k=1}^{l_n} E'_{n,k}$ и $X_{n,k} := \alpha X'_{n,1}/E_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1, \ldots, l_n$, получим выполнение (12).

Замечание 2. В формулировке теоремы 2 вместо (UN) достаточно предполагать, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant l_n} E_{n,k} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Действительно, с учетом того, что $X_{n,k} \geqslant 0$, это вытекает из неравенства

$$\max_{1\leqslant k\leqslant l_n} \mathbb{P}\bigl(X_{n,k} > \varepsilon\bigr) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \max_{1\leqslant k\leqslant l_n} E_{n,k}, \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

С учетом сделанного замечания теорему 2 можно воспринимать, до некоторой степени, как аналог известной теоремы Линдеберга–Феллера, но для случая сходимости к обобщенным законам Дикмана.

Относительную простоту применения полученных критериев мы продемонстрируем на примере из введения. Рассмотрим последовательность сумм (4), в которых каждая X_k распределена по закону Пуассона с параметром $\frac{\alpha}{k}$, где $\alpha > 0$. Покажем, что функции распределения (4) слабо сходятся к D_α. Обозначим $X_{n,k} := kX_k/n$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. (4) принимают вид $\sum\limits_{k=1}^{n} X_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $E_{n,k} = \mathbb{E}\, X_{n,k} = \alpha/n$ при всех указанных k и n. Ясно, что (12) и (14) выполнены (здесь и далее полагается $l_n := n$). Осталось проверить (13), где каждая $F_{n,k}$ обозначает функцию распределения $X_{n,k}$. Произвольно зафиксируем $\tau > 0$ и запишем

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(\tau,\infty)} x\, dF_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}: \\ km/n > \tau}} \frac{km}{n} e^{-\alpha/k} \frac{(\alpha/k)^m}{m!} = S_{n,1} + S_{n,2}, \quad (15)$$

где

$$S_{n,1} := \sum_{\substack{k=1,\ldots,n: \\ k/n > \tau}} \frac{k}{n} \cdot \left(m e^{-\alpha/k} \frac{(\alpha/k)^m}{m!} \right)\Bigg|_{m=1} = \sum_{\substack{k=1,\ldots,n: \\ k/n > \tau}} \frac{\alpha}{n} e^{-\alpha/k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$S_{n,2} := \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sum_{\substack{m=2,3,\ldots: \\ km/n > \tau}} m e^{-\alpha/k} \frac{(\alpha/k)^m}{m!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сначала рассмотрим величины $S_{n,2}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{n,2} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sum_{m=2}^{\infty} m e^{-\alpha/k} \frac{(\alpha/k)^m}{m!} \\ &= \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha/k} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\alpha/k)^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n} \bigl(1 - e^{-\alpha/k}\bigr). \end{aligned}$$

Тогда, применяя известное неравенство $1 - e^{-x} \leqslant x$, $x \in \mathbb{R}$, будем иметь $S_{n,2} \leqslant \frac{\alpha^2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. При $n \to \infty$ последняя сумма эквивалентна $\ln n$, поэтому заключаем, что $S_{n,2} \to 0$, $n \to \infty$. Теперь рассмотрим

$S_{n,1}$. Ясно, что при $\tau \geqslant 1$ имеем $S_{n,1} = 0$, а при $\tau < 1$ верно

$$S_{n,1} = \frac{\alpha}{n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ n\tau<k\leqslant n}} e^{-\alpha/k} \sim \frac{\alpha}{n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ n\tau<k\leqslant n}} 1 = \frac{\alpha}{n} \cdot (n - \lfloor n\tau \rfloor) \to \alpha(1-\tau), \qquad n \to \infty.$$

Таким образом, $S_{n,1} \to \alpha \max\{0, 1-\tau\}$ при $n \to \infty$, для каждого $\tau > 0$. Сводя полученные выводы для $S_{n,1}$ и $S_{n,2}$ в формуле (15), видим справедливость (13). По теореме 2 с учетом замечания 2 имеем слабую сходимость функций распределения заданных сумм (4) к D_α.

Список литературы

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, Гостехиздат, М.-Л., 1949.
2. Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979.
3. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Наука, М., 1987.
4. А. А. Хартов, *Критерии относительной и стохастической компактности распределений сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. прилож. **63**, No. 1 (2018), 70–88.
5. А. Н. Ширяев, *Вероятность - 1*, МЦНМО, М., 2004.
6. R. Arratia, A. Barbour, and S. Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures: A Probabilistic Approach.* EMS Monographs in Mathematics, EMS, Zurich, (2003).
7. C. Bhattacharjee, L. Goldstein, *Dickman approximation in simulation, summations and perpetuities.* — Bernoulli **25** (4A) (2019), 2758–2792.
8. K. Dickman, *On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude*, Ark. for Mat., vol. **22** (1930), 1–14.
9. D. Hensley, *The convolution powers of the Dickman function.* — J. London Math. Soc. **33**, No. 2 (1986), 395–406.
10. S. A. Molchanov, V. A. Panov, *The Dickman–Goncharov distribution.* — Russ. Math. Surv. **75**, No. 6 (2020), 1089–1132.
11. M. D. Penrose, A. R. Wade *Random minimal directed spanning trees and Dickman-type distributions.* — Adv. Appl. Probab. **36**, No. 3 (2004), 691—714.
12. R. G. Pinsky, *On the strange domain of attraction to generalized Dickman distributions for sums of independent random variables.* — Electron. J. Probab. **23**, No. 3 (2018), 1–17.
13. G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory.* — Graduate Studies Math.**163**, AMS, Providence, Rhode Island, 2015.

Tregubova K. A., Khartov A. A. Sums of independent random variables and the generalized Dickman laws.

The probabilistic Dickman law, defined by the known Dickman function, and its generalized versions are considered. In the paper, we obtain a general criterion of the weak convergence to these laws for the distributions of sums of independent non-negative random variables within the series scheme in the classical setting. Moreover, we get a special criterion of the convergence for the case when the summing random variables have finite expectations.

Поступило 19 октября 2022 г.

Лаборатория
вероятностных проблем аппроксимации,
Смоленский Государственный Университет,
ул. Пржевальского д. 4,
214000, Смоленск, Россия
E-mail: ksen.schwedun2017@yandex.ru

Лаборатория вероятностных
проблем аппроксимации,
Смоленский Государственный Университет,
ул. Пржевальского д. 4,
214000, Смоленск, Россия;
Научно-Образовательный Центр Математики,
Университет ИТМО,
Кронверкский проспект 49,
197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alexeykhartov@gmail.com