Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

В. Н. Солев

СРАВНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ВЕСОМ

§1. Введение

Пусть $x(t)$ – гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью (далее всюду с.п.) f_*, допускающей при некотором $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\,du < \infty. \tag{1}$$

Примем обозначение

$$f_0(u) = \frac{1}{(1+u^2)^n}. \tag{2}$$

Мы всюду далее будем предполагать, что для неотрицательной функции f выполнено условие Макенхаупта (см. подробнее [4])

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_{u,\varepsilon>0} f_\varepsilon(u) \times \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (u) < \infty. \tag{3}$$

Здесь для $\varepsilon > 0$ через $f_\varepsilon(u)$ обозначено "среднее" значение функции f в точке u,

$$f_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,dx. \tag{4}$$

Пусть $\sigma_x(f_*)$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами из множества $\{x(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, $P_x(f_*)$ и $L^2(dP_x(f_*))$ – соответствующая мера на $\sigma_x(f_*)$ и L^2-пространство $\sigma_x(f_*)$-измеримых функций, построенное по мере $P_x(f_*)$. Обозначим через $\mathscr{X}(f_*)$ линейное подпространство пространства $L^2(dP_x(f_*))$, построенное по случайным величинам из $\{x(t),\, t \in \mathbb{R}\}$.

Ключевые слова: стационарный гауссовский процесс, условие Макенхаупта.
Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00273.

Примем обозначение $\mathcal{D}$ для линейного множества функций φ, удовлетворяющих условиям

$$\varphi \in L^2,\ |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2},\ \text{где}\ \ \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

Отметим, что индикаторы отрезков конечной длины лежат в $\mathcal{D}$. Для интервала I обозначим D_I множество функций φ из $\mathcal{D}$, выделяемое условием $\operatorname{supp}\varphi \subset I$. Если $\varphi \in \mathcal{D}$, величины

$$(x,\varphi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,x(t)\,dt$$

корректно определены и лежат в $\mathscr{X}(f_*)$. Так как процесс $x(t)$ непрерывен в среднеквадратичном, то для любого интервала I подпространство $\mathscr{X}_I$, порожденное случайными величинами из множества $\{x(t),\, t \in I\}$, совпадает с подпространством, порожденном случайными величинами из множества $\{(x,\varphi),\, \varphi \in \mathcal{D}_I\}$. Если $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, то (см. подробнее в [1])

$$\mathbf{E}\,(x,\varphi) = 0, \quad \mathbf{E}\,(x,\varphi)\overline{(x,\psi)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u)\,\overline{\widehat{\psi}(u)}\,f_*(u)\,du < \infty. \tag{6}$$

Так что отображение $U:\ \mathscr{X}(f_*) \to L^2_{f_*}$, заданное на случайных величинах (x,φ), $\varphi \in \mathcal{D}$, соотношением $U\,(x,\varphi) = \widehat{\varphi}$, является изометрией. Здесь $L^2_{f_*}$ – L^2-пространство, построенное по мере с плотностью f_*.

Для интервала I конечной длины обозначим $\mathscr{X}_I(f_*)$ – подпространство пространства $\mathscr{X}(f_*)$, порожденное случайными величинами из множества $\{x(t),\, t \in I\}$. Для $T > 0$ положим $\mathscr{X}_T(f_*) := \mathscr{X}_{[-T,T]}(f_*)$. Пусть $\mathcal{P}_T(f_*)$ – ортопроектор в $\mathscr{X}(f_*)$ на подпространство $\mathscr{X}_T(f_*)$.

Для $T > 0$ и неотрицательной функции h обозначим $\mathscr{H}_T(h)$ – подпространство пространства L^2_h, порожденное функциями

$$\frac{1-e^{iut}}{iu}, \quad |t| \leqslant T.$$

Пусть $\mathscr{P}_T(h)$ – ортопроектор в L^2_h на $\mathscr{H}_T(h)$. В следующем пункте (см. лемму 2.2) мы устанавливаем, что оператор $\mathscr{P}_T(f_0)$ определен на плотном множестве в L^2_f и его продолжение на все L^2_f является равномерно ограниченным оператором, точнее нормы операторов $\mathscr{P}_T(f_0)$, $T > 0$, равномерно ограничены. Заметим, что

$$U^{-1}\,L^2_{f_*} = \mathscr{X}(f_*), \quad U^{-1}\,\mathscr{H}_T(f_*) = \mathscr{X}_T(f_*). \tag{7}$$

Обозначим

$$\mathcal{P}_T(f_0) = U^{-1}\mathscr{P}_T(f_0)\,U.$$

Отметим, что оператор $\mathcal{P}_T(f_0)$ легко конструируется.

Теорема 1.1. *Пусть функция f удовлетворяет условию Макенхаупта, тогда*

$$\mathbf{E}\,|\xi - \mathcal{P}_T(f_0)\,\xi|^2 \leqslant C\,\mathbf{E}\,|\xi - \mathcal{P}_T(f_*)\,\xi|^2, \quad \xi \in \mathscr{X}(f_*), \tag{8}$$

где константа C не зависит от T.

Доказательство. Заметим, что оператор $\mathcal{P}_T(f_0)$, действующий в пространстве $\mathscr{X}(f_*)$, унитарно эквивалентен оператору $\mathscr{P}_T(f_0)$, действующему в пространстве $L^2_{f_*}$, при этом

$$\mathcal{P}_T(f_0)\,\mathscr{X}_T(f_*) = \mathscr{X}_T(f_*).$$

Далее, нормы ореараторов $\mathcal{P}_T(f_0)$, $T > 0$ равномерно ограничены, так как по лемме 2.2 равномерно ограничены нормы ореараторов $\mathcal{P}_T(f_0)$, $T > 0$. Пусть

$$\xi_T = \mathcal{P}_T(f_*)\,\xi, \quad \xi^T = \xi - \mathcal{P}_T(f_*)\,\xi.$$

Тогда

$$(1 - \mathcal{P}_T(f_0))\,\xi = \mathcal{P}_T(f_0)\,\xi^T = \mathcal{P}_T(f_0)\,(1 - \mathcal{P}_T(f_*))\,\xi.$$

Поэтому

$$\|(1 - \mathcal{P}_T(f_0))\,\xi\| \leqslant \|\mathcal{P}_T(f_0)\|\,\|(1 - \mathcal{P}_T(f_*))\,\xi\|.$$

Отсюда следует (8). $\square$

§2. Условие Макенхаупта и проекторы в пространстве с весом

Для неотрицательной локально суммируемой функции h и $\varepsilon > 0$ мы ввели следующее “среднее” значение в точке u

$$h_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(u+x)\, dx. \tag{9}$$

Будем говорить, что неотрицательная локально суммируемая функция h удовлетворяет условию Макенхаупта, если

$$\lambda = \lambda(h) := \sup_{\varepsilon,\, u} h_\varepsilon(u) \times \left[\frac{1}{h}\right]_\varepsilon (u) < \infty. \tag{10}$$

Напомним (см. подробнее [4]), что для неотрицательной локально суммируемой функции h при условии (10) величины

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h(u)(1+u^2)}\, du < \infty, \tag{11}$$

в частности, при условии (10) функция h отлична от нуля почти всюду. Мы обозначили при $\varepsilon > 0$ и $T = 1/\varepsilon$

$$h^\varepsilon(u) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Tx}{\pi T x^2}\, h(u+x)\, dx.$$

Легко выводится (подробнее см. в [5]), что при условии (10) существуют такие константы $0 < c \leqslant C < \infty$, зависящие только от $\lambda(h)$, что

$$c\, h_\varepsilon(u) \leqslant h^\varepsilon(u) \leqslant C\, h_\varepsilon(u), \tag{12}$$

$$c \left[\frac{1}{h}\right]_\varepsilon (u) \leqslant \left[\frac{1}{h}\right]^\varepsilon \leqslant C \left[\frac{1}{h}\right]_\varepsilon (u). \tag{13}$$

Для неотрицательной функции h обозначим L^2_h пространство L^2 на вещественной прямой, построенное по мере с плотностью h, принимая обозначения $(\cdot,\cdot)_{L^2_h}$ и $\|\cdot\|_{L^2_h}$ для скалярного произведения и нормы в L^2_h.

При $T > 0$ для неотрицательной функции h, суммируемой с весом $(1+u^2)^{-1}$, примем обозначение $\mathscr{H}_T(h)$ для подпространства пространства L^2_h, порожденного функциями

$$\frac{1-e^{iut}}{iu}, \quad |t| \leqslant T,$$

Ортопроектор в L^2_h на $\mathscr{H}_T(h)$ будет обозначаться $\mathscr{P}_T(h)$. Положим

$$\mathscr{H}^+_{2T}(h) := \epsilon_T\, \mathscr{H}_T(h), \quad \mathscr{H}^-_{2T}(h) := \epsilon^*_T\, \mathscr{H}_T(h). \tag{14}$$

Здесь и далее для вещественного τ мы используем обозначение $\epsilon_\tau(v) := e^{i\tau v}$ и сохраняем обозначение ϵ_τ для оператора умножения на функцию ϵ_τ. Так что сопряженный оператор ϵ^*_τ – это оператор умножения на функцию $\overline{\epsilon_\tau}$.

В случае, когда $h(u) \equiv 1$, мы будем для соответствующих объектов использовать обозначения L^2, $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{L^2}$, $\|\cdot\|_{L^2}$, $\mathscr{H}_T$, $\mathscr{P}_T$, $\mathscr{H}^+_T$, $\mathscr{H}^-_T$. Так что подпространство $\mathscr{H}_T$ состоит (в силу теоремы Пэли–Винера) из функций φ,

$$\varphi(u) = \int_{-T}^{T} a(t)\, e^{itu}\, du, \quad a \in L^2,$$

а ортопроектор в L^2 на $\mathscr{H}_T$ задается соотношением

$$\mathscr{P}_T\psi\,(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(v-u)}{\pi(v-u)}\, \psi(v)\, dv, \quad \psi \in L^2. \tag{15}$$

Пусть H^2_+ – пространство Харди в верхней полуплоскости, отождествляемое далее с подпространством пространства L^2 на вещественной прямой, состоящим из функций ψ, представимых в виде

$$\psi(u) = \int_{0}^{\infty} a(v)\, e^{iuv}\, dv, \quad a \in L^2,$$

а P_+ – ортопроектор в L^2 на H^2_+. Оператор $P_- := I - P_+$ является ортопроектором в L^2 на пространство Харди в нижней полуплоскости, обозначаемое H^2_- и отождествляемое далее с подпространством пространства L^2 на вещественной прямой, состоящим из функций ψ, представимых в виде

$$\psi(u) = \int\limits_{-\infty}^{0} a(v)\, e^{iuv}\, dv, \quad a \in L^2.$$

Так что, если $\psi \in H^2_+$, то $\overline{\psi} \in H^2_-$. Здесь и далее $\overline{\psi}(u) := \overline{\psi(u)}$. Преобразование Гильберта

$$H\varphi(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t-s| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-s}\, dt,$$

представимо (см. [4]) в виде $H = -iP_+ + i(I - P_+)$. Следующая лемма есть простое следствие теоремы Ханта– Макенхаупта–Видена об ограниченности преобразования Гильберта в пространстве с весом (см. подробнее в [4]).

Лемма 2.1. *Пусть h неотрицательная функция, локально суммируемая и удовлетворяющая условию Макенхаупта. Тогда оператор $\mathscr{P}_T$, определенный на плотном множестве в L^2_h, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора. При этом нормы полученных таким образом операторов $\mathscr{P}_T$ ограничены равномерно по T.*

Доказательство. По теореме Ханта–Макенхаупта–Видена в условиях леммы 2.1 оператор H – ограниченный оператор в пространстве L^2_h. Точнее, будучи определен на плотном в L^2_h множестве, оператор H продолжается до ограниченного оператора в L^2_h. Точно так же оператор P_+ продолжается до ограниченного оператора в L^2_h. Для вещественного τ мы обозначаем $\epsilon_\tau(v) := e^{i\tau v}$ и сохраняем обозначение ϵ_τ для оператора умножения на функцию ϵ_τ. Оператор ϵ_τ – унитарный оператор при вещественном τ в любом весовом пространстве. Сопряженый оператор ϵ^*_τ совпадает с оператором умножения на функцию $\epsilon^*_\tau := \overline{\epsilon_\tau}$. В разъясненном выше смысле при $T > 0$ ограниченными в пространстве L^2_h будут также операторы $\epsilon^*_T\, P_+\, \epsilon_T$ и $\epsilon_T (I - P_+)\, \epsilon^*_T$ с нормами, не зависящими от T. Так как

$$\mathscr{P}_T = \left[\epsilon^*_T\, P_+\, \epsilon_T\right] \left[\epsilon_T\, P_-\, \epsilon^*_T\right],$$

то мы приходим к утверждению леммы. □

Пусть теперь f_* – неотрицательная функция, допускающая при некотором $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty, \tag{16}$$

и будем обозначать $f_0(u) = 1/(1+u^2)^n$. Так что $f_* = f_0 f$. Будем предполагать, что функция f, удовлетворяет условию Макенхаупта $\lambda(f) < \infty$.

Лемма 2.2. *Пусть локально суммируемая функция f удовлетворяет условию Макенхаупта. Тогда оператор $\mathscr{P}_T(f_0)$, определенный на плотном множестве в L^2_f, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора. При этом нормы (в метрике пространства L^2_f) полученных таким образом операторов $\mathscr{P}_T(f_0)$ ограничены равномерно по T.*

Доказательство. Примем обозначения

$$g(u) = u + i, \quad w(u) = \frac{u-i}{u+1},$$

и заметим, что w – внутренняя функция, то есть унимодулярная функция из пространства H^∞_+, а $1/g$ – внешняя функция из пространства H^2_+ (см. подробнее в [4]). Для нас важно будет знать следующий очевидный факт: система

$$\left\{\varphi_k(u) = \frac{1}{u+i}\left[\frac{u-i}{u+i}\right]^k,\ k = 0, 1, \ldots, n, \ldots\right\} \tag{17}$$

является с точностью до мультипликативной константы ортонормированным базисом в H^2_+.

Опишем (подробнее см. в [2]) подпространства $\mathscr{H}_T(f_0)$ и $\mathscr{H}^T(f_0)$, где $\mathscr{H}^T(f_0)$ – ортогональное дополнение в $L^2_{f_0}$ к подпространству $\mathscr{H}_T(f_0)$. Обозначим

$$D(f_0) := \mathscr{H}^+_T(f_0) \cap \mathscr{H}^-_T(f_0). \tag{18}$$

Как известно (см. [2]), подпространство $D(f_0)$ состоит из полиномов степени не выше $n-1$. Легко проверяется, что система

$$\left\{\psi_k(u) = (u+i)^{n-1}\left[\frac{u-i}{u+i}\right]^k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\} \tag{19}$$

является с точностью до мультипликативной константы ортонормированным базисом в $D(f_0)$ в метрике пространства $L^2_{f_0}$, так же как и система

$$\left\{\psi_k^*(u) = (u-i)^{n-1}\left[\frac{u+i}{u-i}\right]^k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}. \tag{20}$$

В то время как система

$$\left\{\varphi_k(u) = \frac{1}{u+i}\left[\frac{u-i}{u+i}\right]^k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\} \tag{21}$$

является с точностью до мультипликативной константы ортонормированным базисом в D в метрике пространства L^2, где

$$D = H^2_+ \ominus w^n H^2_+ \tag{22}$$

Здесь ортогональная разность $\ominus$ в метрике пространства L^2, w – оператор умножения на внутреннюю функцию w. Таким образом,

$$D(f_0) = g^n D.$$

Пусть A – некоторое множесто функций, заданных на вещественной прямой. Обозначим $\overline{A} = \{\overline{\varphi} :\ \varphi \in A\}$. При таком соглашении

$$\overline{D} = H^2_- \ominus \overline{w}^n H^2_- \tag{23}$$

и

$$D(f_0) = \overline{D(f_0)} = \overline{g}^n\, \overline{D}. \tag{24}$$

В [2] установлено, что подпространство $\mathscr{H}_T^+(f_0)$ является следующей ортогональной суммой в метрике пространства $L^2_{f_0}$

$$\mathscr{H}_T^+(f_0) = D(f_0) \oplus g^n w^n \mathscr{H}_T^+.$$

Поэтому подпространство $\mathscr{H}_T^+(f_0)$ является следующей ортогональной суммой в том же пространстве

$$\mathscr{H}_T^+(f_0) = g^n D \oplus g^n w^n \mathscr{H}_T^+. \tag{25}$$

Точно так же устанавливается, что в метрике пространства $L^2_{f_0}$

$$\mathscr{H}_T^-(f_0) = D(f_0) \oplus \overline{g}^n\, \overline{w}^n \mathscr{H}_T^-.$$

Так как $\overline{g}^n\, \overline{w}^n = g^n$, то

$$\mathscr{H}_T^-(f_0) = D(f_0) \oplus g^n \mathscr{H}_T^-. \tag{26}$$

Отсюда мы выводим, что в метрике пространства $L^2_{f_0}$

$$\mathscr{H}_T(f_0) = g^n \mathscr{H}_T^- \oplus g^n D \oplus g^n w^n \mathscr{H}_T^+. \tag{27}$$

Здесь мы учли, что подространства $g^n\,\mathscr{H}_T^-$ и $g^n\,w^n\,\mathscr{H}_T^+$ ортогональны в метрике пространства $L^2_{f_0}$.

Наша ближайшая цель – доказать, что при $T>0$ ортопроекторы $\mathscr{P}_T(f_0)$ (в метрике пространства $L^2(f_0)$) на подпространство $\mathscr{H}_T(f_0)$, являются ограниченными операторами в пространстве $L^2_{f_*}$ с нормами, равномерно ограниченными по $T>0$. Заметим, что оператор умножения на функцию $1/g^n$ является унитарной изометрией из $L^2_{f_0}$ в L^2 и одновременно унитарной изометрией из $L^2_{f_*}$ в L^2_f. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{H}_T}(f_0)$ образ подпространства $\mathscr{H}_T(f_0)$ при этом отображении и через $\widetilde{\mathscr{P}_T}(f_0)$ – ортопроектор в L^2 на $\widetilde{\mathscr{H}_T}(f_0)$. Объявленная цель будет достигнута, если мы докажем что операторы $\widetilde{\mathscr{P}_T}(f_0)$ продолжаются в L^2_f до ограниченных операторов, нормы которых в L^2_f ограничены равномерно по $T>0$.

Из (27) следует, что в метрике пространства L^2

$$\widetilde{\mathscr{H}_T}(f_0)=\mathscr{H}_T^-\,\oplus\,D\,\oplus\,w^n\,\mathscr{H}_T^+. \tag{28}$$

Для ортогонального дополнения $\widetilde{\mathscr{H}^T}(f_0)$ к $\widetilde{\mathscr{H}_T}(f_0)$ в метрике пространства L^2 получаем ортогональное разложение в той же метрике

$$\widetilde{\mathscr{H}^T}(f_0)=\epsilon_T^*\,H^2_-\,\oplus\,\epsilon_T\,w^n\,H^2_+. \tag{29}$$

Для простоты обозначений положим $w_n:=w^n$. Соотношения (28), (29) подсказывает нам, что

$$\widetilde{\mathscr{P}_T}(f_0)=\big[\epsilon_T^*\,P_+\,\epsilon_T\big]\big[\epsilon_T w_n\,(I-P_+)\,\epsilon_T^* w_n^*\big]. \tag{30}$$

Так как при условии $\lambda(f)<\infty$ операторы $\big[\epsilon_T\,w_n\,(I-P_+)\,\epsilon_T^*\,w_n^*\big]$ и $\big[\epsilon_T^*\,P_+\,\epsilon_T\big]$, будучи унитарно эквивалентными в L^2_f операторам $(I-P_+)$ и P_+ соответственно, продолжаются до ограниченных операторов в L^2_f с нормами, не зависящими от n и T, то операторы из семейства $\{\widetilde{\mathscr{P}_T}(f_0),\ T>0\}$ также продолжаются до ограниченных операторов в L^2_f с нормами, равномерно ограниченными по $T>0$. $\square$

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* М., Мир, 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* М., Мир, 1974.
3. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* М., Наука, 1964.

4. B. J. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* N.-Y., Academic Press, 1981.
5. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.

Solev V. N. Comparison of projector operators in the weighted space.

In this paper, we give a simple approximation orthoprojector onto the subspace generated by the stationary Gaussian process observed on a finite interval.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия

Санкт-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург 199034, Россия

E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 10 ноября 2022 г.