

Л. В. Розовский

О ПОЛНОЙ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ В ТОЧНЫХ АСИМПТОТИКАХ

§1. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем, $X, X_n, n \geq 1$, являются последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}X^2 = 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Liu и Lin [1] доказали следующее утверждение:

(а) Для любого $r \in [0, 2)$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{2-r} \sum_{n \geq 1} n^{-r} \mathbf{E}|S_n|^r I[|S_n| \geq \varepsilon n] = \frac{2}{2-r}. \quad (1.1)$$

(б) Для любого $\delta \in (0, 1]$ при оптимальном моментном условии $\mathbf{E}X^2 \log^\delta |X| < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{2\delta} \sum_{n \geq 2} \frac{\log^{\delta-1} n}{n^2} \mathbf{E}(S_n^2 I[|S_n| \geq \varepsilon \sqrt{n \log n}]) = \frac{1}{\delta} \mathbf{E}|\xi|^{2+2\delta}, \quad (1.2)$$

где ξ обозначает стандартную нормально распределенную случайную величину.

История вопроса подробно изложена в [2], где при дополнительном предположении $\mathbf{E}|X|^q < \infty$ при некотором $q \in (2, 3]$, была вычислена скорость сходимости в (1.1) и (1.2).

Основная цель нашей заметки состоит в представлении следующего довольно общего результата, который позволяет найти точную скорость сходимости в (1.2) и, частично, в (1.1).

В дальнейшем, $r \geq 0$, $\mu_r = \mathbf{E}|\xi|^r$ и $\bar{S}_n = S_n/\sqrt{n}$.

Предложение 1. Пусть положительная функция $g(u)$, $u \geq 1$, имеет неотрицательную непрерывную слева производную $g'(u)$ ограниченной вариации. Мы также предполагаем, что $g'(\infty) = 0$, $g(\infty) = \infty$

Ключевые слова: скорость сходимости, точная асимптотика, полная сходимость моментов.

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ No. 19-01-00356.

u

$$\mathbf{E}\omega(|X|) |X|^3 I[X > 1] < \infty, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{E}\tau(X) X^r I[X > 1] < \infty, \quad (1.4)$$

где

$$\omega(u) = \int_u^\infty \frac{g(y^2)}{y^2} dy, \quad \tau(u) = \int_1^u u^{1-r} g(u^2) du. \quad (1.5)$$

Пусть функция $f(u)$ строго возрастает на $(0, \infty)$, $f(0+) = 0$, $f(\infty) = \infty$.

Тогда, если $\int_1^\infty f^{r-1}(t) e^{-f^2(t)/2} dt < \infty$, то

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 1} g'(n) \mathbf{E} \bar{S}_n^r I[\bar{S}_n \geq f(\varepsilon g(n))] - (2\varepsilon)^{-1} \mathbf{E} |\xi|^r f^{-1}(|\xi|) \right) \\ & = 2^{-1} \mu_r \gamma_g + V, \end{aligned} \quad (1.6)$$

и, если $\int_0^1 \frac{f^{r+1}(t)}{t} dt + \int_1^\infty \frac{f^{r-1}(t)}{t} e^{-f^2(t)/2} dt < \infty$, то

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 1} g'(n) \mathbf{E} \bar{S}_n^r I[\bar{S}_n \geq f(\varepsilon e^{g(n)})] + 2^{-1} \log \varepsilon \right) \\ & = 2^{-1} \mathbf{E} |\xi|^r \log f^{-1}(|\xi|) + 2^{-1} \mu_r \gamma_g + V_{gr}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где постоянные γ_g , V_{gr} определяются равенствами

$$\gamma_g = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N g'(n) - g(N) \right), \quad V_{gr} = \sum_{n \geq 1} g'(n) (\mathbf{E} \bar{S}_n^r I[S_n > 0] - 2^{-1} \mu_r).$$

Обращаем внимание на то, что из (1.3) следует условие $\omega(1) < \infty$ и на то, что условие $\mathbf{E} X^r I[X > 0] < \infty$ вытекает из условия (1.4) и совпадает с ним в случае $r \geq 3$.

Сформулируем “двустороннее” следствие предложения 1.

Теорема 1. Пусть функция $g(u)$, $u \geq 1$, такая, как в предложении 1 и пусть $s > 0$. Если

$$\mathbf{E}(\omega(|X|) |X|^3 + \tau(|X|) |X|^r) I[|X| > 1] < \infty, \quad (1.8)$$

то

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 1} g'(n) \mathbf{E} |\bar{S}_n|^r I[|\bar{S}_n| \geq \varepsilon g^s(n)] - \varepsilon^{-1/s} \mathbf{E} |\xi|^{r+1/s} \right) \\ & = \mu_r \gamma_g + \tilde{V}_{gr} \end{aligned} \quad (1.9)$$

и

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 1} g'(n) \mathbf{E} |\bar{S}_n|^r I[|\bar{S}_n| \geq \varepsilon e^{g(n)}] + \log \varepsilon \right) \\ & = \mathbf{E} |\xi|^r \log |\xi| + \mu_r \gamma_g + \tilde{V}_{gr}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\tilde{V}_{gr} = \sum_{n \geq 1} g'(n) (\mathbf{E} |\bar{S}_n|^r - \mu_r - \mathbf{P}(S_n = 0) I[r = 0]). \quad (1.11)$$

Замечание 1. Пусть $g(u) \leq \tilde{g}(u)$, $u > u_0$, и пусть $0 < c_1, c_2 < 1$. Если

$$\tilde{g}(u^2)/u^{c_1} \searrow, u > u_0, \quad (1.12)$$

то $u \omega(u) \leq g(u^2)/(1 - c_1)$, $u > u_0$;

если $2 + c_2 - r > 0$ и

$$\tilde{g}(u^2)/u^{c_2} \nearrow, u > u_0, \quad (1.13)$$

то $\tau(u) \leq \tilde{g}(u^2) y^{2-r}/(2 + c_2 - r)$.

Таким образом, если $g(y^2)$ правильно меняется на ∞ с показателем $c \in (\max(0, r - 2), 1)$, то (1.3), (1.4) и (1.8) вытекают из условия $\mathbf{E}g(X^2) X^2 < \infty$.

Учитывая замечание 1, нетрудно, например, проверить что все результаты, недавно полученные в [3], следуют из (1.9) при $r = 0$.

Приведем следствия теоремы 1 ((1.9)) в контексте соотношений (1.1) и (1.2).

Обозначим суммы в (1.1) и (1.2) через $\lambda_1(\varepsilon, r)$ и $\lambda_2(\varepsilon, \delta)$ соответственно.

Следствие 1. Пусть $s > 0$, $0 < \beta < 1$ и $g(u) = u^{\beta/2}$. Предположим, что $\mathbf{E}|X|^{2+\beta} < \infty$ ($\beta > r - 2$), $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ ($\beta < r - 2$) $\mathbf{E}|X|^r \log |X| < \infty$ ($\beta = r - 2$). Тогда выполняется (1.9).

Выбирая здесь $\beta = 2 - r$, при $r \in (1, 2)$ и $\mathbf{E}|X|^{4-r} < \infty$, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lambda_1(\varepsilon, r) - \frac{2}{2-r} \varepsilon^{r-2} \right) = \frac{2}{2-r} (\mu_r \gamma_g + \tilde{V}_{gr}).$$

Следствие 2. Пусть $s > 0$ и $\delta > 0$. Предположим, что

$$\mathbf{E}X^2 \log^\delta (1 + |X|) < \infty \quad (r < 2), \mathbf{E}|X|^r < \infty \quad (r > 2)$$

и $\mathbf{E}X^2 \log^{1+\delta} (1 + |X|) < \infty \quad (r = 2)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 2} \delta \frac{\log^{\delta-1} n}{n} \mathbf{E}|\bar{S}_n|^r I[|\bar{S}_n| \geq \varepsilon \log^{s\delta} n] - \varepsilon^{-1/s} \mathbf{E}|\xi|^{r+1/s} \right) \\ &= \mu_r \bar{\gamma}_g + \bar{V}_{gr}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \bar{\gamma}_g = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=2}^N g'(n) - g(N) \right) \text{ и}$$

$$\bar{V}_{gr} = \sum_{n \geq 2} g'(n) (\mathbf{E}|\bar{S}_n|^r - \mu_r - \mathbf{P}(S_n = 0) I[r = 0]) \text{ в предположении}$$

$$g(u) = \log^\delta u.$$

В частности ($r = 2$, $1/s = 2\delta$), если $\mathbf{E}X^2 \log^{1+\delta} (1 + |X|) < \infty$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lambda_2(\varepsilon, \delta) - \frac{1}{\delta} \varepsilon^{-2\delta} \mathbf{E}|\xi|^{2+2\delta} \right) = \frac{1}{\delta} \bar{\gamma}_g.$$

Следующие результаты вытекают из теоремы 1 ((1.10)).

Следствие 3. Пусть $s > 0$ и $g(u) = s \log u$ (т.е. $e^{g(u)} = u^s$). Предположим, что $\mathbf{E}X^2 \log (1 + |X|) < \infty \quad (r < 2)$, $\mathbf{E}|X|^r < \infty \quad (r > 2)$ и $\mathbf{E}X^2 \log^2 (1 + |X|) < \infty \quad (r = 2)$. Тогда выполняется (1.10).

Отсюда ($s = 1/2$), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_1(\varepsilon, 2) + 2 \log \varepsilon) = 2 \mathbf{E}\xi^2 \log |\xi| - 2\gamma$, где γ постоянная Эйлера.

Следствие 4. Пусть $s > 0$ и $g(u) = s \log \log u$, $u \geq 3$ (т.е. $e^{g(u)} = \log^s u$). Предположим, что $\mathbf{E}X^2 \log \log (e + |X|) < \infty \quad (r < 2)$, $\mathbf{E}|X|^r < \infty \quad (r > 2)$, и $\mathbf{E}X^2 \log (1 + |X|) \log \log (e + |X|) < \infty \quad (r = 2)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n \geq 3} \frac{s}{n \log n} \mathbf{E}|\bar{S}_n|^r I[|\bar{S}_n| \geq \varepsilon \log^s n] + \log \varepsilon \right) \\ &= \mathbf{E}|\xi|^r \log |\xi| + \mu_r \bar{\gamma}_g + \bar{V}_{gr}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Пусть $\{Y_n\}$ независимые случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_n^2 . Предположим, что существуют

положительные постоянные $C_1 - C_3$ и случайная величина X с конечной дисперсией такая, что

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \geq C_1 n, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(|Y_j| \geq x) \leq C_2 \mathbf{P}(|X| \geq x) \quad (1.14)$$

при всех n и $x \geq C_3$.

Тогда теорема 1 и следствия 1-4 остаются в силе, если \bar{S}_n заменить на $(Y_1 + \dots + Y_n)/B_n$.

Заметим, что из (1.14) следует оценка $C_1 n \leq B_n^2 \leq C_2 \mathbf{E}X^2 n$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Ниже мы используем обозначения из п. 1.

Положим $\Phi(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$, $\Delta_n(x) = \mathbf{P}(\bar{S}_n < x) - \Phi(x)$, $V(x) = \mathbf{P}(X < x)$ и $\lambda(x) = \mathbf{E}X^2 (1 \wedge |X|/x)$, $x > 0$. Заметим, что

$$\lambda(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \bar{D}(y) dy, \quad (2.1)$$

где $\bar{D}(x) = \mathbf{E}X^2 I[|X| \geq x]$ (очевидно, $\lambda(x) \searrow$, $x \lambda(x) \nearrow$).

Известно (см. [4, (1.9)]), что

$$\Delta_n = \sup_x |\Delta_n(x)| \leq C \lambda(\sqrt{n}), \quad (2.2)$$

где C абсолютная постоянная. Кроме того, имеет место следующая оценка.

Лемма 1 [4, (1.8)]. Пусть $m > 0$, $b < m/(m+2)$, $\gamma = 1/(2+m)$. Существует положительное $A(b, m)$ такое, что для любого $x \geq 1$

$$|\Delta_n(x)| \leq A(b, m) (e^{-bx^2/2} \lambda(\sqrt{n}) + \lambda^{m/2}(\sqrt{n})/x^{2+m}) + n\bar{V}(\gamma x \sqrt{n}). \quad (2.3)$$

Здесь $\bar{V}(\cdot) = 1 - V(\cdot)$.

Обозначим $A_n(x) = \int_x^\infty y^r d\Delta_n(y)$, $x > 0$, $r > 0$.

Имеем,

$$|A_n(x)| \leq (\Delta_n \vee \sup_{x>1} x^r |\Delta_n(x)|) + \int_1^\infty |\Delta_n(y)| dy^r.$$

Отсюда и в силу (2.2) и (2.3), полагая, что $\int_0^\infty y^r dV(y) < \infty$, получим

$$|A_n(x)| \leq C_1 (\lambda(\sqrt{n}) + n^{1-r/2} \gamma^{-r} \int_{\gamma\sqrt{n}}^\infty y^r dV(y) + n \int_1^\infty \bar{V}(y\gamma\sqrt{n}) dy^r). \quad (2.4)$$

Также,

$$n \int_1^\infty \bar{V}(y\gamma\sqrt{n}) dy^r \leq n^{1-r/2} \gamma^{-r} \int_{\gamma\sqrt{n}}^\infty y^r dV(y) \quad (2.5)$$

и

$$n^{1-r/2} \int_{\gamma\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} y^{(r-3)+3} dV(y) \leq (1 \vee \gamma^{r-3}) \lambda(\sqrt{n}). \quad (2.6)$$

Принимая во внимание соотношение

$$g'(n) \leq \int_n^{n+1} g'(u) du + \int_n^{n+1} |dg'(u)|; \quad g'(n) \leq \int_{n-1}^n g'(u) du + \int_{n-1}^n |dg'(u)|$$

(так, $g'(n) = g'(u) - \int_n^u dg'(u) \leq g'(u) + \int_n^{n+1} |dg'(u)|$, $n \leq u \leq n+1$), из (2.4)–(2.6) получим

$$\sum_{n \geq 1} g'(n) \sup_{x > 0} |A_n(x)| \leq C_2 \left(1 + \int_1^\infty g'(u) \lambda(\sqrt{u}) du + \int_1^\infty \bar{\mu}_r(u) u^{2-r} dg(u^2) \right), \quad (2.7)$$

где $\bar{\mu}_r(u) = \int_u^\infty y^r dV(y)$.

Предполагая, что интеграл сходится, положим $\hat{\omega}(u) = \int_u^\infty \frac{dg(y^2)}{y}$.

Отметим (см. (1.5)), что $\hat{\omega}(u) + g(u^2)/u = \omega(u)$.

Имеем (см. (2.1))

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} g'(u) \lambda(\sqrt{u}) du &= \int_1^{\infty} \lambda(u) dg(u^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^{\infty} (1 \wedge \frac{|x|}{u}) dg(u^2) x^2 dV(x) \\ &\leq \int_{|u| \geq 1} \omega(|u|) |u|^3 dV(u) + \hat{\omega}(1) \mathbf{E}|X|^3 I[|X| \leq 1] - g(1) \bar{D}(1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теперь оценим $B = \int_1^{\infty} \bar{\mu}_r(u) u^{2-r} dg(u^2)$.

Если $0 \leq r \leq 2$, то (см. (2.1)) $\bar{\mu}_r(u) u^{2-r} \leq \lambda(\sqrt{u})$ и, следовательно,

$$B \leq \int_1^{\infty} \lambda(u) dg(u^2), \quad 0 \leq r \leq 2. \quad (2.9)$$

Обозначим $\tilde{\tau}(u) = \int_1^u u^{2-r} dg(u^2)$, $u > 1$.

Заметим (см. (1.5)), что $\tilde{\tau}(u) = u^{2-r} g(u^2) - g(1) + (r-2) \tau(u)$.

Имеем,

$$\begin{aligned} B &= \int_1^{\infty} \tilde{\tau}(u) u^r dV(u) \\ &\leq \int_1^{\infty} g(u^2) u^2 dV(u) (r-2) \int_1^{\infty} \tau(u) u^r dV(u). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Следовательно, если $\tau(\infty) < \infty$ и $r > 2$, то

$$B \leq \int_1^{\infty} g(u^2) u^2 dV(u) + \omega(1) \bar{\mu}_r(1). \quad (2.11)$$

А если $\tau(\infty) = \infty$ (в силу $\tau(u) \leq \omega(1)$ это может иметь место только при $3 > r > 2$), то

$$B \leq \int_1^{\infty} g(u^2) u^2 dV(u) + (r-2) \int_1^{\infty} \tau(u) u^r dV(u). \quad (2.12)$$

В этом случае, $(r-2) \tau(u) \geq g((cu)^2) (cu)^{2-r} (1 - c^{r-2})$, $0 < c < 1$ ($r > 2$).

Из (2.7)–(2.12) следует, что условия (1.3) и (1.4) влекут

$$\sum_{n \geq 1} g'(n) \sup_{x > 0} |A_n(x)| < \infty,$$

и, следовательно, если $f_n(\varepsilon) > 0$ и $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_n(\varepsilon) = 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \geq 1} g'(n) A_n(f_n(\varepsilon)) &= \sum_{n \geq 1} g'(n) A_n(+0) \\ &= \sum_{n \geq 1} g'(n) (\mathbf{E} \bar{S}_n^r I[S_n > 0] - \frac{1}{2} \mathbf{E} |\xi|^r). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Продолжим рассуждения. Пусть $f_n(\varepsilon) = f(\varepsilon g(n))$ или $f(\varepsilon e^{g(n)})$. Тогда,

$$\sum_{n \geq 1} g'(n) \mathbf{E} \bar{S}_n^r I[\bar{S}_n \geq f_n(\varepsilon)] = \sum_{n \geq 1} g'(n) A_n(f_n(\varepsilon)) + I(\varepsilon) \quad (2.14)$$

где $I(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} g'(n) \mathbf{E} \xi^r I[\xi \geq f_n(\varepsilon)]$.

Для вычисления $I(\varepsilon)$ воспользуемся [5, предложение 1], положив там

$$F_n(x) = F(x) = \frac{2}{\mu_r} \int_0^x y^r d\Phi(y) \vee 0.$$

Тогда требуемый результат (т.е. предложение 1) следует из [5, Предложение 1] и (2.14), (2.13).

Для проверки замечания 2 нужно вместо леммы 1 использовать ее более общий вариант в [4, (1.8)] и оценки вида (см. (2.1))

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} Y_j^2, I[|Y_j| \geq y B_n] \leq \frac{C_2}{C_1} \bar{D}(y B_n), \quad y B_n \geq C_3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. D. Liu, Z. Y. Lin, *Precise asymptotics for a new kind of complete moment convergence*. — Stat. Probab. Lett. **76** No. 16 (2006), 1787–1799.
2. L. T. Kong, H. S. Dai, *Convergence rates in precise asymptotics for a kind of complete moment convergence*. — Stoch. Dynamics **17**, No. 2 (2017), 1750015.
3. Y. Zhang, *A note on the convergence rates in precise asymptotics*. — J. Ineq. Appl. **15** (2019).

4. Л. В. Розовский, *Суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями – умеренные отклонения и неравномерные оценки в ЦПТ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 242–259.
5. L. V. Rozovsky, *One more on the convergence rates in precise asymptotics.* Statist. Prob. Lett., **171**, 2021, 109023.

Rozovsky L. V. On a complete moment convergence in precise asymptotics.

Liu and Lin (Statist. Probab. Lett. 2006) introduced a kind of complete moment convergence which includes the traditional one as a special case. We continue these investigations to make them somewhat more general and sharp.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования С.-П. гос.
химико-фармацевтический университет
Министерства здравоохранения Российской
Федерации (ФГБОУ ВО СПбХФУ Минздрава России)
ул. Проф. Попова, д. 14, Санкт-Петербург
197376, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 3 октября 2022 г.