Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

М. А. Лифшиц, С. Е. Никитин

СВЕРХБОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ТЕЛЕКОМ-ПРОЦЕССОВ

§1. Введение: Телеком-процессы

1.1. Система обслуживания. Телеком-процессы возникли в замечательной работе И. Кая и М. Такку [6], которые предложили унифицированный подход к моделированию "систем телетрафика" на основе интегральных представлений. Другие ссылки на близкие темы можно найти в обзорах [3–5] и книге [7, глава 3].

Работа системы представляет собой набор *процессов обслуживания*. Каждый процесс стартует в некоторый момент s, длится u единиц времени и занимает r единиц *ресурса*. Количество занятых ресурсов постоянно в течение процесса обслуживания, от момента s до момента $s+u$. Будем говорить, что процесс обслуживания *активен* в момент t, если $s \leqslant t \leqslant s+u$.

Мгновенная загрузка системы в момент t – это сумма занятых ресурсов по активным в момент t процессам:

$$W^\circ(t) := \sum_j r_j \mathbf{1}_{\{s_j \leqslant t \leqslant s_j+u_j\}}.$$

Нас будет интересовать *интегральная загрузка* на интервале времени $[0,t]$,

$$W^*(t) := \int_0^t W^\circ(\tau) d\tau.$$

Формальная модель системы обслуживания основана на пуассоновских случайных мерах. Пусть $\mathcal{R} := \{(s,u,r)\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Каждая точка $(s,u,r)\in\mathcal{R}$ отвечает возможному процессу обслуживания с начальным моментом s, длительностью u и занимаемым ресурсом r.

Система характеризуется следующими параметрами: $\lambda > 0$ – *интенсивность* потока процессов обслуживания; F_U – распределение

Ключевые слова: вероятности больших уклонений, Телеком-процесс, пуассоновская случайная мера, нагрузка.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00047.

длительности обслуживания; F_R – распределение количества занимаемых ресурсов.

Пусть U и R – случайные величины с распределениями F_U и F_R соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbb{P}(R > 0) = \mathbb{P}(U > 0) = 1$. Обычно предполагается, что эти величины имеют конечную дисперсию или регулярные хвосты. А именно, либо

$$\mathbb{P}(U > u) \sim \frac{c_U}{u^\gamma}\,, \qquad u \to \infty, \qquad 1 < \gamma < 2,\ c_U > 0,$$

либо $\mathbb{E}U^2 < \infty$. В последнем случае мы формально полагаем $\gamma := 2$. Аналогично, предполагается либо

$$\mathbb{P}(R > r) \sim \frac{c_R}{r^\delta}\,, \qquad r \to \infty, \qquad 1 < \delta < 2,\ c_R > 0,$$

либо $\mathbb{E}R^2 < \infty$. В последнем случае формально полагаем $\delta := 2$.

Поведение системы существенно зависит от параметров $\gamma, \delta \in (1, 2]$.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности

$$\mu(ds, du, dr) = \lambda\, ds\, F_U(du)\, F_R(dr).$$

Пусть N – соответствующая пуассоновская случайная мера. Многие характеристики системы можно записать в форме пуассоновских интегралов. В частности, мгновенная загрузка в момент t есть

$$W^\circ(t) = \int_{\mathcal{R}} r \mathbf{1}_{\{s \leqslant t \leqslant s+u\}} dN,$$

а интегральная загрузка на интервале $[0, t]$ записывается как

$$\begin{aligned} W^*(t) &= \int_0^t W^\circ(\tau) d\tau = \int_{\mathcal{R}} r \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leqslant \tau \leqslant s+u\}} d\tau dN \\ &= \int_{\mathcal{R}} r \cdot \Big| [s, s+u] \cap [0, t] \Big| dN := \int_{\mathcal{R}} r \ell_t(s, u) dN. \end{aligned}$$

Здесь $|\cdot|$ обозначает длину интервала, и $\ell_t(s, u) := \Big| [s, s+u] \cap [0, t] \Big|$.

1.2. Предельные теоремы для загрузки. Объектом исследования в предельных теоремах является центрированный и нормированный процесс интегральной загрузки на больших интервалах времени,

$$Z_a(t) := \frac{W^*(at) - \mathbb{E}R \cdot \mathbb{E}U \cdot a\lambda t}{b}\,, \qquad t \in [0, 1].$$

При этом исследуемый горизонт времени a и интенсивность λ рассматриваются как переменные (хотя бы одна из них должна стремиться к бесконечности), а нормирующий множитель $b = b(a, \lambda)$ зависит от них, причём форма зависимости определяется параметрами γ, δ. В различных ситуациях в качестве предельного процесса могут выступать винеровский процесс, дробное броуновское движение, устойчивый процесс Леви, устойчивый Телеком-процесс, пуассоновский Телеком-процесс. К сожалению, Телеком-процессы изучены ещё недостаточно. В этой статье исследуются свойства пуассоновского Телеком-процесса.

Полный спектр предельных теорем подробно рассмотрен в [7, глава 3]. Здесь мы напомним лишь один результат, связанный именно с пуассоновским Телеком-процессом (см. [7, теорема 13.16]) и относящийся к случаю *критической интенсивности*

$$\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to L, \qquad 0 < L < \infty. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < \gamma < \delta \leqslant 2$, $a \to \infty$ *и выполнено* (1). *Положим* $Q := L\, c_U\, \gamma$. *Тогда при нормировке* $b := a$ *конечномерные распределения процесса* Z_a *сходятся к аналогичным распределениям пуассоновского Телеком-процесса* $Y_{Q,\gamma}$, *допускающего интегральное представление*

$$Y_{Q,\gamma}(t) = \int_{\mathcal{R}} r\, \ell_t(s,u) \bar{N}_{Q,\gamma}(ds, du, dr). \tag{2}$$

Здесь $\bar{N}_{Q,\gamma}$ – *центрированная пуассоновская мера с интенсивностью* $Q\, \mu_\gamma$, *где*

$$\mu_\gamma(ds, du, dr) := \frac{ds\, du}{u^{\gamma+1}}\ F_R(dr).$$

Пуассоновский Телеком-процесс $(Y_{Q,\gamma}(t))_{t\geqslant 0}$ корректно определён, если $\mathbb{E}\,(R^\gamma) < \infty$. Он является процессом со стационарными приращениями, однако, в отличие от многих других предельных для нагрузки процессов, не самоподобен. Некоторые его свойства изучены в работах [1, 2].

1.3. Большие уклоненния. В этой работе нас интересуют *большие уклонения* $(Y_{Q,\gamma}(t))_{t\geqslant 0}$. В силу свойств Телеком-процесса вероятность больших уклонений имеет вид

$$\mathbb{P}(Y_{Q,\gamma}(t) \geqslant \varrho) \quad \text{при} \quad \varrho = \varrho(t) \gg t^{1/\gamma}.$$

В нашей предыдущей работе [8] было выяснено, что поведение этой вероятности существенно различно в разных зонах изменения уровня ϱ и может зависеть от распределения R. Были выделены три существенных зоны: умеренные большие уклонения $t^{1/\gamma} \ll \varrho \ll t$, промежуточные большие уклонения $\varrho \sim c\,t$ и сверхбольшие уклонения $\varrho \gg t$. Поведение вероятностей больших уклонений в первых двух зонах в [8] было исследовано полностью, а для сверхбольших уклонений получен только следующий частичный результат.

Теорема 2. *Пусть $\varrho = \varrho(t) \gg t$. Предположим, что хвостовая вероятность $\bar{F}_R(y) := \mathbb{P}(R \geqslant y)$ является правильно меняющейся с отрицательным индексом $-m$, причём $m > \gamma$. Тогда*

$$\mathbb{P}(Y_{Q,\gamma}(t) \geqslant \varrho) = Q\,D\,t^{-(\gamma-1)}\bar{F}_R(\varrho/t)\,(1+o(1)), \qquad \text{\textit{при}} \;\; t \to \infty,$$

где

$$D := \frac{m(m-1)}{\gamma(\gamma-1)(m-\gamma+1)(m-\gamma)}.$$

В этой теореме, по сути, рассматриваются распределения R с тяжёлыми (полиномиальными) хвостами. Как и в других результатах [8], большое уклонение здесь возникает при появлении одного единственного долгого и интенсивного процесса обслуживания.

Для распределений R с лёгкими хвостами ситуация совершенно иная. Здесь сверхбольшое уклонение всегда возникает из сочетания нагрузок от множества процессов обслуживания. Этому случаю и посвящена данная статья. Мы докажем один достаточно общий результат (теорема 3), рассмотрим типичный пример его применения, а затем детально разберём два важных случая, которые, к сожалению, не укладываются в общую схему.

1.4. Предварительные вычисления. Мы хотим найти асимптотическое выражение для

$$\mathbb{P}(Y_{Q,\gamma}(t) \geqslant y_t), \qquad y_t \gg t.$$

С помощью замены переменной $\varkappa_t := \frac{y_t}{t}$ оно переходит в

$$\mathbb{P}(t^{-1}Y_{Q,\gamma}(t) \geqslant \varkappa_t) \qquad \varkappa_t \gg 1.$$

Дадим интегральное представление преобразованного процесса $\widetilde{Y}(t) := t^{-1}Y_{Q,\gamma}(t)$, которое, в отличие от (2), не содержит неудобного для вычислений ядра ℓ_t.

Сначала определим меру $\nu_t^{(\ell)}$ на $[0,1]$ соотношением

$$\begin{aligned}\nu_t^{(\ell)}[x,1] &= \frac{t^{-(\gamma-1)}x^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{(2-\gamma)t^{-(\gamma-1)}x^{-(\gamma-1)}}{(\gamma-1)\gamma}\\ &\leqslant \frac{t^{-(\gamma-1)}}{(\gamma-1)\gamma}x^{-\gamma},\ 0<x<1,\\ \nu_t^{(\ell)}\{1\} &= \frac{t^{-(\gamma-1)}}{(\gamma-1)\gamma}.\end{aligned}$$

Определим ключевую величину – атом меры интенсивности

$$q_t := Q\ \nu_t^{(\ell)}\{1\} = \frac{Q\,t^{-(\gamma-1)}}{(\gamma-1)\gamma}.$$

Для меры $\nu_t^{(\ell)}$ имеем следующие оценку и выражение для плотности:

$$\begin{aligned}Q\nu_t^{(\ell)}[x,1] &\leqslant q_t\, x^{-\gamma},\\ \frac{Qd\nu_t^{(\ell)}}{dx} &= q_t\left((\gamma-1)\gamma x^{-1-\gamma} + (2-\gamma)(\gamma-1)x^{-\gamma}\right).\end{aligned}$$

Наконец, определим преобразованную меру интенсивности $\nu_t^{(\ell,r)}$ через

$$\nu_t^{(\ell,r)}[x,\infty) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \nu_t^{(\ell)}\left[\frac{x}{r},1\right] F_R(dr).$$

В этих обозначениях замена переменной $v = r\ell_t$ позволяет записать интегральное представление

$$\widetilde{Y}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} v\widetilde{N}_{Q,\gamma}(dv),$$

где $\widetilde{N}$ – центрированная пуассоновская случайная мера с мерой интенсивности $Q\,\nu_t^{(\ell,r)}$.

1.5. Переход к дискретной части спектра. Можем применить разбиение

$$\widetilde{Y}(t) = \int\limits_0^\infty v\widetilde{N_0}(dv) + \int\limits_0^\infty vN_1(dv) - q_t\,\mathbb{E}\,R := Y^\circ(t) + Y^\dagger(t) - E_t,$$

где $\widetilde{N_0}$ – центрированная пуассоновская случайная мера с интенсивностью, соответствующей непрерывной части меры $\nu_t^{(\ell)}$, а N_1 – дискретной. При этом N_1 нецентрирована, $-q_t \,\mathbb{E}\, R$ – часть, соответствующая центрированию дискретной части.

Далее, при оценке уклонений хотим перейти к интегралу по дискретной части спектра $\widetilde{Y}(t)$, то есть хотим доказать, что в зависимости от требуемого в теореме, выполняется либо

$$\log \mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) > \varkappa_t) = \log \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t)(1 + o(1)), \tag{3}$$

либо

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) > \varkappa_t) = \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t)(1 + o(1)).$$

Это следует из оценок

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) > \varkappa_t) &\geqslant \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t + \delta) + \mathbb{P}(Y^{\circ}(t) > -\delta + E_t)\\ &= \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t + \delta)(1 + o(1))\\ &= \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t)(1 + o(1)).\end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся тем, что

$$\operatorname{Var} Y^{\circ}(t) \leqslant \int_0^{\infty} v^2 \nu_t^{(\ell)}(dv) \leqslant C q_t \to 0,\ t \to \infty,$$

а также предполагаем, что для любого $\delta > 0$ верно при $t \to \infty$ соответственно либо

$$\mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t + \delta) = \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t)(1 + o(1)),$$

либо

$$\log \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t + \delta) = \big(\log \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) > \varkappa_t)\big)\,(1 + o(1)). \tag{4}$$

Нужное условие будет выполняться во всех последующих ситуациях, и его проверка будет в дальнейшем опускаться.

Нижнюю оценку получаем аналогично, пользуясь тем, что

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) < \varkappa_t) \geqslant \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) < \varkappa_t - \delta)\mathbb{P}(Y^{\circ}(t) < \delta + E_t).$$

Аналогично, утверждение (3) следует из предположения (4).

§2. Общий результат

Определим λ_t согласно следующему уравнению

$$q_t\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R}) = \varkappa_t. \tag{5}$$

Оно имеет единственное решение при достаточно больших t, если $\mathbb{E}\,e^{\lambda_t R} < \infty$ и $\mathbb{P}(R = 0) < 1$, так как левая часть непрерывно, монотонно и неограниченно сверху возрастает по λ_t.

Будем обозначать X^λ случайную величину λ-сопряжённую к X, то есть такую, что распределение X^λ имеет вид

$$P_X^\lambda(dx) := e^{\lambda x}P_X(dx)/\mathbb{E}\,e^{\lambda X}.$$

Теорема 3. *Если выполняются условия*

$$\mathbb{E}\,e^{\lambda R} < \infty, \quad \forall\lambda > 0;$$
$$q_t\mathbb{E}\,e^{\lambda_t R} \to \infty, \qquad t \to \infty; \tag{6}$$
$$\mathbb{P}(R \geqslant M) > 0, \quad \forall M > 0;$$
$$\mathbb{E}\,(R^\lambda)^2 = O((\mathbb{E}\,R^\lambda)^2), \qquad \lambda \to \infty, \tag{7}$$

то верно

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) = \exp(-\lambda_t\varkappa_t(1 + o(1))).$$

Доказательство. Верхняя оценка:

Перепишем вероятность уклонения как

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \varkappa_t) &= e^{-q_t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!}\mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t)\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!}\frac{\mathbb{E}\,e^{\lambda S_n}}{e^{\lambda\varkappa_t}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!}\frac{\left(\mathbb{E}\,e^{\lambda R}\right)^n}{e^{\lambda\varkappa_t}}\\ &\leqslant \exp\left(-(\lambda\varkappa_t) - q\mathbb{E}\,e^{\lambda R}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Оптимизируя оценку по λ, получаем уравнение

$$q_t\mathbb{E}\,(Re^{\lambda R}) = \varkappa_t,$$

что в точности эквивалентно (5), решением которого является λ_t.

Запишем отношение

$$\frac{q_t\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})}{\lambda_t\varkappa_t} = \frac{\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})}{\lambda_t\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R})}\ . \tag{9}$$

Далее воспользуемся неограниченностью распределения R. Для любого $M > 0$ имеем

$$\frac{\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})}{\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R})} = \frac{\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})(\mathbf{1}_{\{R\leqslant M\}} + \mathbf{1}_{\{R>M\}})}{\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R})}$$
$$\leqslant \frac{e^{\lambda_t M}}{\mathbb{P}(R \geqslant 2M)e^{2\lambda_t M}} + \frac{1}{M} = \frac{e^{-\lambda_t M}}{\mathbb{P}(R \geqslant 2M)} + \frac{1}{M}.$$

Устремляя λ_t к бесконечности, находим

$$\limsup_{\lambda_t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})}{\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R})} \leqslant \frac{1}{M}\ .$$

Устремляя M к бесконечности, получаем

$$\limsup_{\lambda_t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})}{\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R})} = 0.$$

Подставляя это в отношение (9), имеем

$$\lim_{\lambda_t\to\infty} \frac{q_t\mathbb{E}\,(e^{\lambda_t R})}{\lambda_t \varkappa_t} = 0.$$

С учётом (8) приходим к верхней оценке

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) \leqslant \exp(-\lambda_t\varkappa_t(1 + o(1))).$$

Нижняя оценка:

Введём обозначение $U_\delta(n_0) = \{n : (1-\delta)n_0 \leqslant n \leqslant (1+\delta)n_0\}$. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Запишем оценку

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant (1-\varepsilon)\varkappa_t) = e^{-q_t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!}\mathbb{P}(S_n \geqslant (1-\varepsilon)\varkappa_t)$$
$$= (1+o(1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n\mathbb{E}\,e^{\lambda_t S_n}}{n!}\frac{\mathbb{P}(S_n \geqslant (1-\varepsilon)\varkappa_t)}{\mathbb{E}\,e^{\lambda_t S_n}}$$
$$= (1+o(1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n(\mathbb{E}\,e^{\lambda_t R})^n}{n!}\frac{\mathbb{P}(S_n \geqslant (1-\varepsilon)\varkappa_t)}{\mathbb{E}\,e^{\lambda_t s_n}}$$
$$\geqslant (1+o(1))\sum_{n\in U_\delta(n_0)}\frac{q_t^n(\mathbb{E}\,e^{\lambda_t R})^n}{n!}\frac{\mathbb{P}(S_n \geqslant (1-\varepsilon)\varkappa_t)}{\mathbb{E}\,e^{\lambda_t s_n}},$$

где n_0 выбрано так, что $n_0 \sim q_t\mathbb{E}\,e^{\lambda_t R}$, а $\delta \in (0,1)$. В силу закона больших чисел, примененного к пуассоновским случайным величинам, для любого $\delta \in (0,1)$ имеем

$$\sum_{n\in U_\delta(n_0)} e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!} \to 1, \text{ при } \mu\to\infty.$$

Применяя это утверждение к $\mu = q_t\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R}$, $\mu\to\infty$ по условию (6) теоремы, находим

$$\sum_{n\in U_\delta(n_0)} \frac{q_t^n(\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R})^n}{n!} = (1+o(1))\exp\left(q_t\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R}\right), t\to\infty.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t)\geqslant(1-\varepsilon)\varkappa_t)\geqslant(1+o(1))\exp\left(q_t\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R}\right)\min_{n\in U_\delta(n_0)}\frac{\mathbb{P}(S_n\geqslant(1-\varepsilon)\varkappa_t)}{\mathbb{E}\, e^{\lambda_t S_n}}.$$

Далее по отдельности рассмотрим следующие выражения для $n\in U_\delta(n_0)$

$$\frac{\mathbb{P}(S_n\geqslant(1-\varepsilon)\varkappa_t)}{\mathbb{E}\, e^{\lambda_t S_n}} = \int\limits_{(1-\varepsilon)\varkappa_t}^{\infty} e^{-\lambda_t s}P_{n,\lambda_t}(ds),$$

где P_{n,λ_t} - распределение $S_n^{\lambda_t}$. Отметим, что в нашем диапазоне n

$$\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t} = n\mathbb{E}\, R_n^{\lambda_t} = n\frac{\mathbb{E}\, R_n}{\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R}} = n\frac{\varkappa_t}{q_t\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R}} = \frac{n\varkappa_t}{n_0(1+o(1))}\in U_{2\delta}(\varkappa_t).$$

Выберем δ таким, что $(1-2\delta)^2>\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{(1-\varepsilon)\varkappa_t}^{\infty} e^{-\lambda_t s}P_{n,\lambda_t}(ds) &\geqslant \int\limits_{(1-2\delta)^2\varkappa_t}^{(1+2\delta)^2\varkappa_t} e^{-\lambda_t s}P_{n,\lambda_t}(ds)\\ &\geqslant \exp(-(1+2\delta)^2\varkappa_t\lambda_t)\mathbb{P}\left(S_n^{\lambda_t}\in[(1-2\delta)^2\varkappa_t,(1+2\delta)^2\varkappa_t]\right)\\ &\geqslant \exp(-(1+2\delta)^2\varkappa_t\lambda_t)\mathbb{P}\left(S_n^{\lambda_t}\in U_{2\delta}\left(\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t}\right)\right)\\ &\geqslant \exp(-(1+2\delta)^2\varkappa_t\lambda_t)\mathbb{P}\left(|S_n^{\lambda_t}-\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t}|\leqslant 2\delta\,\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t}\right).\end{aligned}$$

Для оценки вероятности уклонения применим неравенство Чебышева

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_n^{\lambda_t}-\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t}|>2\delta\mathbb{E}\, s_n^{\lambda_t}) \leqslant \frac{\mathbb{D}S_n^{\lambda_t}}{(2\delta)^2(\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t})^2} &= \frac{\mathbb{E}\,(S_n^{\lambda_t})^2}{(2\delta)^2(\mathbb{E}\, S_n^{\lambda_t})^2 n}\\ &\to 0, \text{ при } \lambda_t\to\infty,\end{aligned}$$

так как $n \in U_\delta(n_0) \to \infty$ при $t \to \infty$, а оставшееся выражение ограничено по условию (7) теоремы. Поэтому

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant (1-\varepsilon)\varkappa_t) \geqslant \exp(-(1+o(1))\varkappa_t\lambda_t). \tag{10}$$

Далее нужно перейти от $(1-\varepsilon)\varkappa_t$ к $\varkappa_t$. Сделаем замену переменной $\widetilde{\varkappa_t} := (1-\varepsilon)\varkappa_t$. Тогда (10) можно переформулировать в виде

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \widetilde{\varkappa_t}) \geqslant \exp(-(1+o(1))\varkappa_t\lambda_t),$$

где λ_t – решение уравнения

$$\mathbb{E}\,(Re^{\lambda_t R}) = \frac{\widetilde{\varkappa_t}}{(1-\varepsilon)q_t}.$$

Сравним это λ_t с $\widetilde{\lambda}_t$ – решением уравнения

$$\mathbb{E}\,(Re^{\widetilde{\lambda_t} R}) = \frac{\widetilde{\varkappa_t}}{q_t}. \tag{11}$$

Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть h таково, что $\mathbb{P}(R \geqslant 4h) > 0$. Тогда для любого $\theta > 0$ при $\lambda \to \infty$ верно*

$$\mathbb{E}\left(Re^{(\lambda+\theta)R}\right) \geqslant \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\right)(1+\theta h)(1+o(1)). \tag{12}$$

Доказательство. Преобразуем левую часть (12) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Re^{(\lambda+\theta)R}\right) &= \mathbb{E}\left(Re^{(\lambda+\theta)R}\mathbf{1}_{\{R<2h\}}\right) + \mathbb{E}\left(Re^{(\lambda+\theta)R}\mathbf{1}_{\{R\geqslant 2h\}}\right)\\
&\geqslant \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R<2h\}}\right) + \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R\geqslant 2h\}}\right)e^{2\theta h}\\
&= \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\right) + \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R\geqslant 2h\}}\right)(e^{2\theta h}-1)\\
&\geqslant \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\right) + \mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R\geqslant 2h\}}\right)2\theta h.
\end{aligned}$$

Достаточно доказать, что

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R\geqslant 2h\}}\right)}{\mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\right)} \geqslant \frac{1}{2}\ .$$

Это эквивалентно

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R<2h\}}\right)}{\mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\right)} \leqslant \frac{1}{2}\ .$$

Преобразуя левую часть, получаем нужное

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\mathbf{1}_{\{R<2h\}}\right)}{\mathbb{E}\left(Re^{\lambda R}\right)} \leqslant \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{2\,h\,e^{2h\lambda}}{4\,c\,h\,e^{4\,h\,\lambda}} = 0 \leqslant \frac{1}{2},$$

где $c = \mathbb{P}(R \geqslant 4h)$. □

Применим лемму, заменив λ_t на $\widetilde{\lambda}_t$, и выбрав θ достаточно большим, чтобы $1 + \theta h > \frac{1}{1-\varepsilon}$. Тогда, в силу (11) и (12),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Re^{(\widetilde{\lambda_t}+\theta)R}\right) &\geqslant \mathbb{E}\left(Re^{\widetilde{\lambda_t}R}\right)(1+\theta h)(1+o(1)) \\ &= \frac{\widetilde{\varkappa_t}}{q_t}(1+\theta h)(1+o(1)) > \frac{\widetilde{\varkappa_t}}{q_t(1-\varepsilon)},\end{aligned}$$

откуда следует, что $\lambda_t < \widetilde{\lambda}_t + \theta = \widetilde{\lambda}_t(1 + o(1))$, при $\widetilde{\lambda}_t \to \infty$, так как θ фиксировано. В результате получаем

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \widetilde{\varkappa_t}) \geqslant \exp(-\varkappa_t \widetilde{\lambda}_t(1 + o(1))),$$

что и даёт требуемую оценку при обратной смене обозначений $\widetilde{\varkappa_t}$ на $\varkappa_t$ и $\widetilde{\lambda}_t$ на λ_t:

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \varkappa_t) \geqslant \exp(-\varkappa_t \lambda_t(1 + o(1))). \qquad \square$$

Рассмотрим типичный пример применения теоремы 3.

Пример 5. Пусть R имеет плотность распределения p_R с асимптотическим поведением

$$p_R(r) = A\exp(-Br^\beta)(1 + o(1)), \text{ при } r \to \infty,$$

где $A, B > 0, \beta > 1$. Можно показать, что при $\lambda_t \to \infty$

$$\mathbb{E}\, e^{\lambda_t R} \sim \int_0^\infty A\exp\left(\lambda_t r - Br^\beta\right) dr \sim K\lambda_t^{\frac{2-\beta}{2(\beta-1)}} \exp\left(L\lambda_t^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right), \quad t \to \infty,$$

а также

$$\mathbb{E}\, Re^{\lambda_t R} \sim K_1\lambda_t^{\frac{2-\beta/2}{\beta-1}} \exp\left(L\lambda_t^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right), \quad t \to \infty,$$

где $L := \frac{\beta-1}{\beta(B\beta)^{1/(\beta-1)}}$, а константы K, K_1 несущественны для дальнейшего. Решение уравнения (5) имеет асимптотику

$$\lambda_t \sim \left(\frac{1}{L}\log\frac{\varkappa_t}{q_t}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}, \quad t \to \infty.$$

Заметим, что все условия теоремы 3 выполнены. Применив её, получаем

$$\log \mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) = \left(\frac{1}{L}\log\frac{\varkappa_t}{q_t}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \varkappa_t\,(1 + o(1)).$$

§3. Особые случаи

В этом разделе рассматриваются два важных особых случая, которые не покрываются теоремой 3: экспоненциальное и δ-распределение ресурса R.

Теорема 6. *Если* $R \equiv 1$, *то*

$$\log \mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) = -\varkappa_t \log\left(\frac{\varkappa_t}{q_t}\right)(1 + o(1)).$$

Доказательство. Верхняя оценка:

При $R \equiv 1$ мы имеем $\nu_t^{(\ell)} = \nu_t^{(\ell,r)}$. При достаточно малых u имеем оценку $e^u - u - 1 \leqslant u^2$, откуда

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}\, \exp(\lambda \widetilde{Y}(t)) &= Q \int\limits_0^\infty (e^{\lambda v} - 1 - \lambda v)\nu_t^{(\ell,r)}(dv) \\
&\leqslant Q \int\limits_0^\delta \lambda^2 v^2 \nu_t^{(\ell)}(dv) + Q \int\limits_\delta^1 e^\lambda \nu_t^{(\ell)}(dv) \\
&\leqslant C_1 q_t \lambda^2 + C_2 q_t e^\lambda \leqslant C q_t e^\lambda.
\end{aligned}$$

По экспоненциальному неравенству Чебышева получаем

$$\log \mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) \leqslant \inf_{\lambda > 0}\, (C q_t e^\lambda - \lambda \varkappa_t).$$

Подставим $\lambda := \log(\frac{\varkappa_t}{q_t})$. Получим

$$\log \mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) \leqslant C\varkappa_t - \varkappa_t \log\left(\frac{\varkappa_t}{q_t}\right) = -\varkappa_t \log\left(\frac{\varkappa_t}{q_t}\right)(1 + o(1)).$$

Нижняя оценка:

Уклонение $Y^\dagger(t)$ уровня $\varkappa_t$ достигается при осуществлении больше $n := [\varkappa_t] + 1$ процессов. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \varkappa_t) &\geqslant e^{-q_t} \frac{q_t^n}{n!}, \\
\log \mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \varkappa_t) &\geqslant -q_t + n \log q_t - \log(n!) \\
&= (-n \log n + n \log q_t)\,(1 + o(1)) \\
&= -\varkappa_t \log\left(\frac{\varkappa_t}{q_t}\right)(1 + o(1)) \quad \text{при } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Пользуемся тем, что $q_t \to 0$ при $t \to \infty$. Это совпадает с верхней оценкой. $\square$

Теорема 7. *Если* $R \sim \exp(1)$, *то*

(1) *при* $\varkappa_t q_t \to 0$ *верно*

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) = q_t e^{-\varkappa_t}(1+o(1)).$$

(2) *при* $\varkappa_t q_t \to C > 0$ *верно*

$$q_t e^{-\varkappa_t}(1+o(1)) \leqslant \mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) \leqslant (e^C - 1) q_t e^{-\varkappa_t}(1+o(1)).$$

(3) *при* $\varkappa_t q_t \to \infty$ *верно*

$$\mathbb{P}(\widetilde{Y}(t) \geqslant \varkappa_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q^{1/4}}{\varkappa_t^{3/4}} \exp(-\varkappa_t + 2\sqrt{q_t \varkappa_t})(1+o(1)).$$

Доказательство. Обозначим $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} R_i$, где $R_i \sim R$, н.о.р. с.в. Тогда

$$P(t) := \mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) \geqslant \varkappa_t) = e^{-q_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_t^n}{n!} \mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t).$$

Распределение S_n имеет плотность

$$p_n(r) = \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} e^{-r}.$$

Хвосты такого распределения имеют вид

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t) = \int\limits_{\varkappa_t}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-r}\, dr = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varkappa_t^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\varkappa_t}.$$

Далее, рассмотрим соответствующие зоны изменения $\varkappa_t q_t$:

Случай 1: $\varkappa_t q_t \to 0$. Тогда

$$P(t) = e^{-q_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_t^n}{n!} \mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t)$$

Разобьём слагаемые на три группы. При $n = 1$ имеем $q_t e^{-\varkappa_t}$.

При $2 \leqslant n \leqslant \varkappa_t \to \infty$ имеем для любого $K > 1$

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varkappa_t^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\varkappa_t} \leqslant \frac{\varkappa_t^n - 1}{\varkappa_t - 1} e^{-\varkappa_t} \leqslant K \varkappa_t^{n-1} e^{-\varkappa_t}.$$

Пользуясь этим, получаем

$$\sum_{n=2}^{\varkappa_t} \frac{q_t^n}{n!}\mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t) \leqslant K\sum_{n=2}^{\varkappa_t} \frac{q_t^n}{n!}\varkappa_t^{n-1}e^{-\varkappa_t} \leqslant Kq_te^{-\varkappa_t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(q_t\varkappa_t)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= K(e^{q_t\varkappa_t}-1)q_te^{-\varkappa_t} = q_te^{-\varkappa_t}(1+o(1)),$$

так как $\varkappa_t q_t \to 0$.

Для $n > \varkappa_t$ имеем

$$\sum_{n=\varkappa_t+1}^{\infty} \frac{q_t^n}{n!}\mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t) \leqslant \sum_{n=\varkappa_t+1}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!} \leqslant q_t^{\varkappa_t}e^{q_t} \ll q_te^{-\varkappa_t},$$

так как $q_t \to 0$. Суммируя оценки по трём интервалам, получаем

$$\mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \varkappa_t) = q_te^{-\varkappa_t}(1+o(1)).$$

Случай 2: $\varkappa_t q_t \to C > 0$.

Пользуясь оценками из предыдущего случая, устремляя K к 1, получаем, что

$$q_te^{-\varkappa_t} \leqslant \mathbb{P}(Y^\dagger(t) \geqslant \varkappa_t) \leqslant (C_1+o(1))q_te^{-\varkappa_t},$$

где $C_1 := e^C - 1$.

Случай 3: $\varkappa_t q_t \to \infty$.

(1) Преобразуем имеющееся выражение для вероятности уклонения:

$$P(t) = e^{-q_t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!}\mathbb{P}(S_n \geqslant \varkappa_t) = e^{-q_t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_t^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varkappa_t^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\varkappa_t}\right)$$
$$= e^{-q_t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{q_t^n}{n!}\frac{\varkappa_t^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\varkappa_t}\right) =: e^{-q_t}\sum_{k=1}^{\infty}P_k(t) \overset{t\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty}P_k(t).$$

Оценим $P_k(t)$ для каждого $k \geqslant 1$

$$P_k(t) = q_te^{-\varkappa_t}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(q_t\varkappa_t)^{n-k}}{((n-k)!)^2 n^{\underline{k}}} = q_te^{-\varkappa_t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q_t\varkappa_t)^n}{(n!)^2(n+1)^{\overline{k}}}.$$

(2) Полагая $W_t^2 := q_t\varkappa_t$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_t^{2n}}{(n!)^2(n+1)^{\overline{k}}} \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_t^{2n}}{(n/e)^{2n}2\pi n^{\overline{k+1}}}, \text{ при } t \to \infty\ (W_t \to \infty).$$

Чтобы обосновать эквивалентность, обозначим правую часть $\sum a_nb_n(t)$, а левую – $\sum(a_n+c_n)b_n(t)$, где $c_n \ll a_n$ при больших t. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ при больших t верно

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n(t) < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(t). \tag{13}$$

Зафиксируем такое N, что $c_n < \varepsilon a_n$ при $n > N$, и соответственно

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n b_n(t) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n b_n(t). \tag{14}$$

Для начальной суммы левой части пользуемся ограниченностью c_n

$$\sum_{n=0}^{N} c_n b_n(t) \sim c_N W_t^{2N}, \text{ при } t \to \infty.$$

Как будет показано далее, правая часть имеет порядок $e^{2W_t} W_t^{-2k+1/2}$, что даёт

$$\sum_{n=0}^{N} c_n b_n(t) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(t),\ t \to \infty. \tag{15}$$

Суммируя (14) и (15), получаем (13).

(3) Перейдём от n к m, где $n = W_t + m$, то есть m будет пробегать значения от $-W_t$ до ∞. Обозначим эту сдвинутую целочисленную решётку $\mathbb{Z}_{W_t}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{W_t^{2n}}{(n/e)^{2n}} &= \left(\frac{We}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{We}{W+m}\right)^{2n} = e^{2n} \left(1 + \frac{m}{W_t}\right)^{-2n} \\
&\sim e^{2n} e^{-2n\frac{m}{W_t}}, \text{ если } W_t \text{ фиксировано, а } n \to \infty\, (m \to \infty) \\
&= e^{2W_t} e^{-2\frac{m^2}{W_t}}.
\end{aligned}$$

Далее заметим, что сумма $P(t)$ в основном накапливается при $m = O(\sqrt{W_t})$. Докажем это формально. Для этого введём

$$S_k(t) := \sum_{\mathbb{Z}_{W_t}} \frac{1}{n^{k+1}} e^{-2\frac{m^2}{W_t}}.$$

Хотим показать, что

$$R_k(t) := \frac{1}{W_t^k} \sum_{\mathbb{Z}_{W_t}}^{|m|<W_t^{3/4}} e^{-2\frac{m^2}{W_t}} \sim S_k(t),\ \text{при } t \to \infty\, (W_t \to \infty)$$

Это следует из того, что

$$\sum_{\mathbb{Z}_{W_t}}^{|m|\geqslant W_t^{3/4}} \frac{1}{n^{k+1}} e^{-2\frac{m^2}{W_t}} \leqslant Ce^{-2\sqrt{W_t}},$$

$$\sum_{\mathbb{Z}_{W_t}}^{|m|<W_t^{3/4}} \frac{1}{n^{k+1}} e^{-2\frac{m^2}{W_t}} \overset{t\to\infty}{\sim} R_k(t).$$

Рассуждение завершается тем, что, как будет показано далее,

$$R_k(t) \sim C' W_t^{-2k+1/2} \gg Ce^{-2\sqrt{W_t}},\ \text{при } W_t \to \infty.$$

(4) Далее имеем

$$P_k(t) \overset{t\to\infty}{\sim} q_t e^{-\varkappa_t} \frac{1}{2\pi} e^{2W_t} R_k(t).$$

Сумму из $R_k(t)$ можно оценить интегралом функции $f(r) := e^{-\frac{r^2}{2}}$, так как

$$\sum_{\mathbb{Z}_{W_t}}^{|m|<W_t^{3/4}} e^{-2\frac{m^2}{W_t}} = \sum_{\mathbb{Z}_{W_t}}^{|m|<W_t^{3/4}} f\left(\frac{2m}{\sqrt{W_t}}\right) \overset{W_t\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{W_t}}{2} \int\limits_{-2W_t^{1/4}}^{2W_t^{1/4}} f(r)dr$$

$$\overset{W_t\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{W_t}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(r)dr = \frac{\sqrt{W_t}\sqrt{2\pi}}{2}.$$

(5) Таким образом,

$$P_k(t) \overset{t\to\infty}{\sim} q_t e^{-\varkappa_t + 2W_t} \frac{1}{2\sqrt{2\pi} W_t^{2k-1/2}}.$$

Собирая вместе полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned}
P(t) &\overset{t\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \\
&\overset{t\to\infty}{\sim} q_t e^{-\varkappa_t+2W_t} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} W_t^{1/2-2k} \\
&= q_t e^{-\varkappa_t+2W_t} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}W_t^{3/2}} \frac{1}{1-W_t^{-2}} \\
&\overset{t\to\infty}{\sim} q_t e^{-\varkappa_t+2W_t} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}W_t^{3/2}}.
\end{aligned}$$

В конечном счёте получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y^{\dagger}(t) \geqslant \varkappa_t) &\overset{t\to\infty}{\sim} q_t e^{-\varkappa_t+2W_t} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}W_t^{3/2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q^{1/4}}{\varkappa_t^{3/4}} \exp(-\varkappa_t + 2\sqrt{q_t\varkappa_t}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Список литературы

1. S. Cohen, M. Taqqu, *Small and large scale behavior of the Poissonized Telecom Process.* — Methodol. Comput. Appl. Probab. **6** (2004), 363–379.
2. R. Gaigalas, *A Poisson bridge between fractional Brownian motion and stable Lévy motion.* – Stoch. Proc. Appl. **116** (2006), 447–462.
3. I. Kaj, *Stochastic Modeling in Broadband Communications Systems*, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Vol.8. Philadelphia, SIAM, 2002.
4. I. Kaj, *Limiting fractal random processes in heavy-tailed systems.*— Fractals in Engineering, New Trends in Theory and Applications, J. Levy-Vehel, E. Lutton (eds.), Springer-Verlag, London (2005), 199–218.
5. I. Kaj, *Aspects of Wireless Network Modeling Based on Poisson Point Processes.* — Fields Institute Workshop on Applied Probability. Ottawa, Carleton University, 2006.
6. I. Kaj, M. S. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach.* — In and Out of Equilibrium. II., ser.: Progress in Probability, Vol. 60, Basel, Birkhäuser (2008), 383–427.
7. М. А. Лифшиц, *Случайные процессы – от теории к практике.* Санкт-Петербург, Лань, 2016; M. Lifshits, *Random Processes by Example*, Singapore, World Scientific, 2014.
8. M. A. Lifshits, S. E. Nikitin, *Large deviations of Telecom processes.* — J. Appl. Probab. **60**, No. 1 (2023). Preprint `http://arxiv.org/abs/2107.11846`.

Lifshits M. A., Nikitin S. E. Ultralarge deviations of Poisson Telecom processes.

In the article, we consider the ultralarge deviations of Poisson Telecom processes which appear as limit distributions for the integral workload in a critical regime of a Poisson service system.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: mikhail@lifshits.org
E-mail: nikitin97156@mail.ru

Поступило 27 октября 2022 г.