Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

**Л. Б. Клебанов**

# ОДНА ЗАДАЧА О БЕЗГРАНИЧНОЙ ДЕЛИМОСТИ

## §1. Введение

Предположим, что $X$ – случайная величина, обладающая конечным моментом четного порядка $2k$, а $f(t)$ – ее характеристическая функция. Тогда $g_{2k}(t) = f^{(2k)}(t)/f^{(2k)}(0)$ снова является характеристической функцией. В случае, когда $X$ является положительной (или отрицательной) случайной величиной, можно рассматривать $g_k(t) = f^{(k)}(t)/f^{(k)}(0)$, когда существует $k$-ый момент. Возникает простой вопрос. При каких условиях $g_{2k}(t)$ является безгранично делимой характеристической функцией? Или же когда обе функции $f(t)$ и $g_{2k}(t)$ являются безгранично делимыми?[1] Ясно, что аналогичный вопрос можно рассматривать не только для фиксированного $k$, но и для конечного или бесконечного множества таких чисел. Цель данной публикации – рассмотреть эти вопросы более подробно и предложить гипотетические ответы.

## §2. Отрицательные результаты

Начнем с отрицательных результатов.

**Теорема 2.1.** *Пусть $f(t)$ – характеристическая функция случайной величины $X$, имеющей симметричное (относительно начала координат) распределение. Предположим, что $\mathbb{E}X^{2m} < \infty$ для целого числа $m \geqslant 1$. Тогда характеристические функции $g_{2k}(t) = f^{(2k)}(t)/f^{(2k)}(0)$ $(k = 1, \dots, m)$ не безгранично делимы.*

**Доказательство.** Рассмотрим случай $m = 1$. Предположим противное. Если $g_2(t)$ безгранично делимая, то она должна быть положительной на всей прямой. Следовательно, $f(t)$ должна быть вогнутой на всей прямой. В этой ситуации ее график должен находиться под

*Ключевые слова*: характеристические функции, безгранияная делимость, особенности.

[1]В 1986 году в беседе с И. В. Островским автору стало известно, что и Иосифа Владимировича интересовал этот вопрос. На тот момент мы оба считали правдоподобной гипотезу, что ответом должна быть характеризация гамма-распределения.

касательной, проведенной к нему в произвольной точке $(t_o, f(t_o))$. Однако это противоречит ограниченности $f(t)$. Следовательно, $g_2$ имеет нули и не может быть безгранично делимой.

Аналогичные рассуждения применимы к каждой паре $g_{2k-2}(t)$, $g_{2k}(t)$ при $k = 1, \dots, m$. □

Очевидно, доказательство существенно использует вещественность симметричной характеристической функции на прямой. Однако факт остается верным для целых характеристических функций[2]. Точнее, имеет место следующий результат.

**Теорема 2.2.** *Пусть $f(t)$ – целая характеристическая функция невырожденного распределения. Никакая пара $g_{2k}(t)$, $g_{2s}(t)$ $(0 \leqslant k < s \leqslant m)$ не может состоять из безгранично делимых характеристических функций.*

**Доказательство.** Утверждение является простым следствием результата Тумуры и Клуни (см. [2]). Действительно, если $f(t)$ – целая характеристическая функция, то все $g_{2k}$ – целые функции. Известно (см., например, [1]), что целая безгранично делимая характеристическая функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. Из теоремы 3.8 [2] следует, что $f(t) = \exp(At + B)$, что противоречит невырожденности распределения. □

Из теоремы 2.2 следует, что характеристические функции нормального и пуассоновского распределений не обладают свойством безграничной делимости $g_{2k}(t)$.

## §3. Положительные примеры

Здесь мы приводим несколько примеров безгранично делимых характеристических функций $f(t)$, для которых одна или несколько функций $g_{2k}(t)$ $(k > 0)$ также являются безгранично делимыми.

**Пример 3.1.** Главный положительный пример – характеристическая функция гамма-распределения

$$f(t) = \frac{1}{(1 - iat)^{\gamma}}, \quad a > 0, \quad \gamma > 0, \tag{3.1}$$

безгранично делимая при всех значениях параметров. Ясно, что $g_k(t)$ также является характеристической функцией гамма-распределения

[2]Определения и свойства см. в [1]

с другим параметром $\gamma$ и поэтому безгранично делима. Заметим, что $k$ не должно быть четным числом, если вместо характеристических функций рассматривать преобразования Лапласа.

Ясно, что $f(-t)$ обладает теми же свойствами, что и $f(t)$. Однако произведение $f(-t)f(t)$ в силу Теоремы 2.1 такими свойствами не обладает.

Очевидно, что $f(t)$ является аналитической функцией в полосе $|\operatorname{Im} t| < 1/a$ и может быть аналитически продолжена вне ее, но не является мероморфной для нецелого $\gamma$. *Таким же свойством обладает и функция* $f(-t)$.

Добавление параметра сдвига в распределение с характеристической функцией $f(t)$ не влияет на его безграничную делимость, но меняет вид $g_{2k}(t)$.

**Пример 3.2.** Предположим теперь, что

$$f(t) = \frac{\exp\{ibt\}}{1-it}, \quad (b>0) \tag{3.2}$$

является характеристической функции сдвинутого экспоненциального распределения (частный случай сдвинутого гамма-распределения). Тогда и $f(t)$, и $g_2(t)$ бесконечно делимы.

**Доказательство.** Определению (3.2) соответствует характеристическая функция

$$g_2(t) = \frac{e^{ibt}(2-2ib(i+t)-b^2(i+t)^2)}{(2+2b+b^2)(1-it)^3}. \tag{3.3}$$

Нам нужно показать, что (3.3) представляет бесконечную делимую характеристическую функцию. На первый взгляд это не так, потому что $g_2(t)$ имеет комплексные нули. Однако эти нули находятся вне полосы аналитичности $g_2(t)$, т.е. вне полосы $|\operatorname{Im}(t)| < 1$. Распределения с характеристической функцией $g_2$ сосредоточены на полуоси $x > b$. Для проверки безграничной делимости $g_2$ воспользуемся представлением А. Н. Колмогорова логарифма соответствующей характеристической функции:

$$\log g_2(t) = ict + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{itu} - 1 - itu\Big)\frac{dK(u)}{u^2},$$

где $c$ – вещественная константа, а $K(u)$ – неубывающая ограниченная функция, $K(-\infty) = 0$. Нахождение $K(u)$ основано на обращении преобразования Фурье

$$-\frac{d^2}{dt^2}\log g_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dK(u).$$

Однако,

$$-\frac{d^2}{dt^2}\log g_2(t) = -\frac{3}{(i+t)^2} + b^2\Big(\frac{1}{(-1+i+b(i+t))^2} + \frac{1}{(1+i+b(i+t))^2}\Big).$$

Обращая преобразование Фурье, находим

$$dK(x) = e^{-x}\big(3 - 2e^{-x/b}\cos(x/b)\big) \quad \text{для} \quad x > 0$$

и $dK(x) = 0$ в остальных случаях. Утверждение следует теперь из представления Колмогорова. □

Хотя мы рассмотрели случай сдвинутого экспоненциального распределения, вероятно, то же самое справедливо и для гамма-распределения в общем случае.

Следующий пример связан с характеристической функцией отрицательного биномиального распределения

$$f(t, r, p) = \Big(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\Big)^r, \quad 0 < p < 1, \quad r > 0. \tag{3.4}$$

Однако не все значения параметров дают подходящие условия. Приведем частный пример.

**Пример 3.3.** Рассмотрим функцию (3.4) для случая $p = 1/2$. Она имеет вид

$$f(t, r) = (2 - e^{it})^{-r}, \quad r > 0. \tag{3.5}$$

Соответствующая $g_2(t, r)$ равна

$$g_2(t, r) = \frac{e^{it}}{(r+1)(2-e^{it})^{r+1}} + \frac{e^{2it}}{(2-e^{it})^{r+2}}.$$

Для использования представления А. Н. Колмогорова нам понадобится вторая логарифмическая производная:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dt^2}\log g_2(t, r) &= \frac{2e^{it}(1+r)(8+4re^{it}+r(1+r)e^{2it})}{(-2+e^{it})^2(2+re^{it})^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(2+r-(-r)^k)}{2^k} e^{ikt}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если все коэффициенты последнего ряда неотрицательны, то его сумма соответствует неубывающей функции $K$. В противном случае $g_2$ не является безгранично делимой. Ясно, что все коэффициенты неотрицательны тогда и только тогда, когда $0 < r \leqslant 1$.

Пример 3.3 в частности показывает, что если характеристическая функция $f(t)$ безгранично делима и $g_2(t)$ также безгранично делима, то это уже может быть неверно для некоторой ее степени $s > 1$. Действительно, достаточно взять функцию из примера 3.3 и $s > 1/r$. Отметим, что при $r = 1$ функция $g_2(t)$ дает пример безгранично делимой характеристической функции, имеющей бесконечно много нулей вне полосы аналитичности.

Возможно, что утверждение Примера 3.3 остается верным и для более общего случая произвольных $p \in (0, 1)$ и $g_{2k}$.

Приведем еще один пример.

**Пример 3.4.** Определим
$$f(t) = \exp\left\{\frac{1}{1-it} - 1\right\} = \exp\left\{\frac{it}{1-it}\right\}.$$
Очевидно, $f(t)$ – безгранично делимая характеристическая функция. Соответствующая $g_2(t)$ имеет вид
$$g_2(t) = \frac{e^{-t/(i+t)}(2it-3)}{(i+t)^4}.$$
$g_2(t)$ – безгранично делимая характеристическая функция.

**Доказательство.** Применим представление А. Н. Колмогорова снова. Как было сказано выше, достаточно определить соответствующую функцию $K(x)$ по ее преобразованию Фурье:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} K(x) = -\frac{d^2}{dt^2} \log g_2(t).$$
Имеем
$$-\frac{d^2}{dt^2} \log g_2(t) = -\frac{2i}{(i+t)^3} - \frac{4}{(i+t)^2} + \frac{4}{(3i+2t)^2}.$$
Применяя обратное преобразование Фурье, получаем
$$\frac{dK}{dx} = xe^{-3x/2}\big((4+x)e^{x/2} - 1\big) \quad \text{при} \quad x \geqslant 0$$
и $dK(x) = 0$ для $x < 0$. □

Приведенные примеры показывают, что для того, чтобы $g_{2k}$ была безгранично делимой, $f(t)$ должна иметь особенности. Как следует из приведенных примеров, типы их могут быть принципиально разными. Проблема полного описания соответствующих функций остается открытой.

## Список литературы

1. Ю. В. Линник, И. В. Островский, *Разложения случайных величин и векторов.* Наука, Москва (1972).
2. У. Хейман *Мероморфные фунции.* Мир, Москва (1966).

Klebanov L. B. On a problem of infinite divisibility.

Let $f(t)$ be a characteristic function. The question on infinite divisibility of $g_{2k}(t) = f^{(2k)}(t)/f^{(2k)}(0)$ is considered. There are given the condition for that function not to be infinite divisible. Some examples of infinite divisibility of $g_{2k}(t)$ are given.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики,
Карлов университет,
Прага, Чешская республика
*E-mail*: levbkl@gmail.com

Поступило 4 октября 2022 г.