Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

Н. А. Карагодин

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ БРОУНОВСКОГО ЛИСТА

§1. Введение

Для случайного процесса $B(t), t \in [0, T]$, энергетически эффективной аппроксимацией называют функцию $f(t)$, которая в некотором смысле близка к $B(t)$, но при этом обладает низкой энергией. В классической постановке вопроса сочетаются расстояние до $B(t)$ в среднем квадратическом и соболевская норма(энергия), то есть

$$f_{\mathrm{opt}}(t) = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathbb{W}_2^1[0,T]} \int_0^T \left(f'(t)^2 + (f(t) - B(t))^2 \right) \, dt.$$

В работе [3] изучены энергетически эффективные аппроксимации процессов со стационарными приращениями. Показано, что при стремлении $T \to \infty$ математическое ожидание энергии оптимальной аппроксимации к единице времени сходится к некоторому пределу, найденному явно. Для гауссовских процессов и процессов Леви результат дополнен сходимостью почти наверное и в L^1.

В работе [6] изучаются энергетически оптимальные аппроксимации $h(t)$ винеровского процесса $W(t)$, для которых качество аппроксимации задаётся принадлежностью некоторому окну ширины r, то есть

$$W(t) - r \leqslant h(t) \leqslant W(t) + r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при этом энергия $\int_0^T h'(t)^2 \, dt$ минимальна. Такая функция называется натянутой струной – это хорошо известный объект в вариационном анализе и статистике. Показано, что асимптотически, при $T \to \infty$, натянутая струна тратит $r^{-2}\mathcal{C}^2$ энергии на единицу времени.

Ключевые слова: энергетически эффективная аппроксимация, воспроизводящее ядро, броуновский лист, закон больших чисел.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00047.

В работе [5] продолжен результат работы [6] и изучена энергия натянутой струны, сопровождающей случайное блуждание. В обеих работах ширина окна $r = r_T$ постоянна для всего рассматриваемого отрезка, но меняется с ростом T.

В работе [8] результаты работ [5] и [6] обобщены на случай полосы переменной ширины $r = r_t$.

В работах [3] и [9] для стационарного процесса вопрос аппроксимации с оптимальной энергией рассматривается как обобщение задачи прогнозирования, где кроме качества предсказания также играют роль свойства прогнозирующей функции. В данных работах оптимизируемый функционал имеет вид

$$\mathbb{E}\,|f(0) - B(0)| + \mathbb{E}\left|\sum_{m=0}^{M} \ell_m f^{(m)}(0)\right|^2 \searrow \min_f .$$

За счёт того, что в стационарном случае зачастую применима эргодическая теорема, записанный выше функционал почти всегда совпадает с функционалом, похожим на описанный ранее и имеющим вид

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(|f(t) - B(t)|^2 + \left|\sum_{m=0}^{M} \ell_m f^{(m)}(t)\right|^2 \right) dt,$$

где $f^{(m)}$ – производная m-го порядка, а ℓ_m – фиксированные комплексные коэффициенты.

Таким образом, в задачах аппроксимации большинство результатов посвящено исследованиям различного рода случайных процессов и разным определениям качества аппроксимации. В данной работе мы переходим к изучению аппроксимаций случайных полей. Поскольку винеровский процесс является одним из самых известных и хорошо изученных случайных процессов, мы начнём с рассмотрения аппроксимаций одного из его многопараметрических обобщений – броуновского листа. Одним из ключевых вопросов является выбор определения качества аппроксимации, и здесь мы используем популярный подход из машинного обучения.

Для гауссовской случайной функции с ковариационной функцией $k(x, y)$ её воспроизводящим ядром называют минимальное гильбертово пространство H функций, такое, что при всех y функция $t \to k(t, y)$ лежит в H, со скалярным произведением задаваемым правилом

$$(k(t, x), k(t, y))_H = k(x, y).$$

Классической задачей машинного обучения является задача поиска целевой функции f в модели $y = f(x)+\xi$, где ξ является шумом, с данным набором данных (x_i, y_i) и метод KRR (от Kernel Ridge Regression) (см. [1] и [7]) ищет функцию в целевом пространстве H, которая оптимизирует функционал риска с регуляризацией

$$f_{\mathrm{opt}} = \arg\min_{f\in H} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 + \lambda^2 \|f\|_H^2 \right).$$

Здесь первая часть представляет собой функцию потерь, выражающую близость выбранной функции к реальной, а вторая является регуляризацией, необходимой, чтобы избежать переобучения. Одним из важнейших свойств нормы функции в воспроизводящем ядре является то, что она в некотором смысле контролирует гладкость функции – чем меньше $\|f\|_H$, тем более гладкой является функция. Поэтому константа λ^2 отвечает за гладкость предсказательной функции. Метод KRR не вероятностный, однако он очень тесно связан с байесовским машинным обучением, основанном на гауссовских процессах (см. [4]).

Предлагается в качестве энергии аппроксимации положить её норму в ядре исследуемого поля. Такой подход к определению аппроксимации можно рассматривать как экстремальный случай алгоритма KRR, когда в тренировочных данных известны все значения (x_i, y_i) и они имеют вид $(x_i, B(x_i))$, то есть настоящая предсказываемая функция является траекторией броуновского листа. Тогда оптимизируемый функционал превращается в

$$f_{\mathrm{opt}} = \arg\min_{f\in H} \left(\int_0^T (f(x) - B(x))^2 \, dx + \lambda^2 \|f\|_H^2 \right).$$

В частности, исследуемая ошибка будет минимальной возможной ошибкой, которая может получиться при использовании KRR с воспроизводящим ядром броуновского листа.

Дадим строгое описание исследумой задачи. Пусть $B(t_1, \ldots, t_d)$ – броуновский лист в $\mathbb{R}_+^d$, то есть центрированное гауссовское случайное поле с ковариационной функцией

$$\mathrm{Cov}(B(t_1, \ldots, t_d), B(s_1, \ldots, s_d)) = \min(t_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \min(t_d, s_d).$$

Обозначим $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ и $[0, \bar{t}] = [0, t_1] \times \ldots \times [0, t_d]$. В новых обозначениях

$$\mathrm{Cov}(B(\bar{t}), B(\bar{s})) = \lambda^d([0, \bar{t}] \cap [0, \bar{s}]).$$

Хорошо известно, что для броуновского листа, суженного на $[0, \overline{T}]$, ядром является пространство функций

$$H([0, \overline{T}]) = \left\{ f(\bar{t}), \bar{t} \in [0, \overline{T}] \,:\, f(\bar{t}) = \int\limits_{[0,\bar{t}]} \ell(\bar{u}) d\bar{u},\ \ell(\bar{u}) \in L_2(\mathbb{R}_+^d) \right\}.$$

Иными словами, это функции, чья обобщённая смешанная производная $\frac{\partial^d f}{\partial t_1 \ldots \partial t_d}$ квадратично интегрируема. Скалярное произведение в ядре определяется как

$$(f_1(\bar{t}), f_2(\bar{t}))_{H([0,\overline{T}])} = \int\limits_{[0,\overline{T}]} \frac{\partial f_1}{\partial t_1 \ldots \partial t_d}(\bar{t}) \frac{\partial f_2}{\partial t_1 \ldots \partial t_d}(\bar{t})\, d\bar{t}.$$

Нас интересует аппроксимация броуновского листа функцией из ядра, которая при этом имеет относительно малую норму (энергию). Объединим эти два требования в один общий функционал, контролируя важность одной из компонент при помощи параметра λ. Ошибкой аппроксимации назовём

$$\mathcal{E}_{\overline{T}}(f, B) = \min_{f \in H([0,\overline{T}])} \int\limits_{[0,\overline{T}]} \left(|f(\bar{t}) - B(\bar{t})|^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial^d f}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} \right)^2 (\bar{t}) \right) d\bar{t}.$$

§2. Основной результат

Теорема 1. *С ростом объёма параметрического множества* $T = T_1 \ldots T_d$ *нормированная ошибка аппроксимации сходится в* L_2

$$\frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f, B)}{T(\ln T)^{d-1}} \xrightarrow{L_2} \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!} \quad \textit{при } T \to \infty.$$

Если при этом $\min(T_1, \ldots, T_d)$ *отделён от* 0*, то есть*

$$\exists c > 0 \,:\, \min(T_1, \ldots, T_d) > c,$$

то имеет место сходимость почти наверное

$$\frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f, B)}{T(\ln T)^{d-1}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!} \quad \textit{при } T \to \infty.$$

Доказательство. Сначала оценим асимптотику среднего и дисперсии ошибки. Воспользуемся самоподобием броуновского листа

$$B(s_1, \ldots, s_d) \overset{\mathcal{D}}{=} (T_1 \ldots T_d)^{-1/2} B(s_1 T_1, \ldots, s_d T_d),$$

чтобы сделать замену переменной в интеграле

$$(t_1, \dots, t_d) = (s_1 T_1, \dots, s_d T_d).$$

Обозначим $T = T_1 \dots T_d$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{\overline{T}}(f, B) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{E}^*_{\overline{T}}(g, B) \\
&= \min_{g \in H([0,1]^d)} \int\limits_{[0,1]^d} \left(T^2 |g(\bar{s}) - B(\bar{s})|^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial^d g}{\partial s_1 \dots \partial s_d} \right)^2 (\bar{s}) \right) d\bar{s}.
\end{aligned}$$

Функции $e_n(s) = \sqrt{2} \sin((n-1/2)\pi s)$ образуют ортогональную систему в $L_2([0,1])$ из собственных функций ковариационного оператора стандартного броуновского движения, $\gamma_n = ((n-1/2)\pi)^{-2}$ – соответствующие e_n собственные числа. Тогда $e_{\bar{n}}(\bar{s}) = \prod\limits_i e_{n_i}(s_i)$ образуют ортогоналную систему в $L_2([0,1]^d)$ из собственных функций ковариационного оператора броуновского листа, а $\gamma_{\bar{n}} = \prod\limits_i \gamma_{n_i}$ являются соответствующими $e_{\bar{n}}$ собственными числами.

Воспользуемся разложением Кархунена–Лоэва поля B в $[0,1]^d$. Для последовательности гауссовских случайных величин $\omega_{\bar{n}}$ с $\mathbb{E}\,\omega_{\bar{n}} = 0$ и $\operatorname{Var} \omega_{\bar{n}} = \gamma_{\bar{n}}$ имеет место представление

$$B(\bar{s}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{N}^d} \omega_{\bar{n}} e_{\bar{n}}(\bar{s}), \;\; \bar{s} \in [0,1]^d.$$

В то же время, набор функций $(e_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{N}^d}$ является ортогональным базисом пространства H, причём $\|e_{\bar{n}}\|_H = \gamma_{\bar{n}}^{-1/2}$. Поэтому можно разложить функцию g в ряд в пространстве H

$$g(\bar{s}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{N}^d} g_{\bar{n}} e_{\bar{n}}(\bar{s}),$$

и представить норму в виде

$$\|g\|_H^2 = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{N}^d} \gamma_{\bar{n}}^{-1} g_{\bar{n}}^2.$$

Пространство H непрерывно вложено в $L_2([0,1]^d)$, поэтому то же разложение для g имеет место и в $L_2([0,1]^d)$, откуда

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 T^2 |g(\bar{s}) - B(\bar{s})|^2 \, ds_1 \dots ds_d = T^2 \sum_{\bar{n} \in \mathbb{N}^d} (g_{\bar{n}} - \omega_{\bar{n}})^2.$$

Получается, что общая ошибка записывается в виде

$$\mathcal{E}^*_T(g,B) = \sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \left(T^2(g_{\bar n}-\omega_{\bar n})^2 + \lambda^2\gamma_{\bar n}^{-1} g_{\bar n}^2\right).$$

Поэтому достаточно оптимизировать каждое слагаемое отдельно по $g_{\bar n}$. Слагаемое с $g_{\bar n}$ квадратично, поэтому принимает минимальное значение при

$$g_{\bar n} = \frac{\omega_{\bar n}}{1+\frac{\lambda^2}{T^2\gamma_{\bar n}}}$$

и это значение равно

$$\frac{\omega_{\bar n}^2}{\frac{\gamma_{\bar n}}{\lambda^2}+\frac{1}{T^2}}.$$

Следовательно, оптимальная функция g имеет вид

$$g_{\mathrm{opt}}(\bar s) = \sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \frac{\omega_{\bar n}}{1+\frac{\lambda^2}{T^2\gamma_{\bar n}}} e_{\bar n}(\bar s),$$

а ошибка равна

$$\mathcal{E}^*_T(g_{\mathrm{opt}},B) = \sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \frac{\omega_{\bar n}^2}{\frac{\gamma_{\bar n}}{\lambda^2}+\frac{1}{T^2}}.$$

Здесь стоит отметить, что все описанные ряды сходятся в L_2 и почти наверное по теореме Колмогорова о двух рядах. Напомним, что $\omega_{\bar n}^2$ – независимые случайные величины с

$$\mathbb{E}\,\omega_{\bar n}^2 = \gamma_{\bar n}, \qquad \operatorname{Var}\omega_{\bar n}^2 = 2\gamma_{\bar n}^2.$$

Поскольку $\gamma_{\bar n}^{-1} = \prod_i \pi^2(n_i-1/2)^2$, имеем

$$\mathbb{E}\,\mathcal{E}^*_T(g_{\mathrm{opt}},B) = \lambda^2 \sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{1+\prod_i \frac{\lambda^{2/d}\pi^2(n_i-1/2)^2}{T_i^2}},$$

$$\operatorname{Var}\mathcal{E}^*_T(g_{\mathrm{opt}},B) = 2\lambda^4 \sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\left(1+\prod_i \frac{\lambda^{2/d}\pi^2(n_i-1/2)^2}{T_i^2}\right)^2},$$

Докажем, что при $T\to\infty$ выполнено

$$\mathbb{E}\,\mathcal{E}^*_T(g_{\mathrm{opt}},B) \sim \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!} T(\ln T)^{d-1},$$

$$\operatorname{Var}\mathcal{E}^*_T(g_{\mathrm{opt}},B) \sim \frac{\lambda^3}{2\pi^{d-1}(d-1)!} T(\ln T)^{d-1}.$$

Для удобства обозначим $2r_i = \lambda^{1/d}\pi/T_i$. Тогда оба соотношения вытекают из следующей леммы.

Лемма 2. *При любых $r_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant d$, таких, что $\prod\limits_i r_i \to 0$, выполнены соотношения*

$$\sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{1+\prod\limits_i (4r_i^2(n_i-1/2)^2)} \sim \frac{\pi}{2(d-1)!} \frac{(-\sum\limits_i \ln r_i)^{d-1}}{\prod\limits_i 2r_i},$$

$$\sum_{\bar n\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{(1+\prod\limits_i (4r_i^2(n_i-1/2)^2))^2} \sim \frac{\pi}{4(d-1)!} \frac{(-\sum\limits_i \ln r_i)^{d-1}}{\prod\limits_i 2r_i}.$$

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по d. База при $d = 1$ верна, так как обе суммы практически являются суммами Дарбу сходящихся интегралов. При $r \to 0$ имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+4r^2(n-1/2)^2} \sim \frac{1}{2r}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4r}$$

и

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+4r^2(n-1/2)^2)^2} \sim \frac{1}{2r}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8r}.$$

Переход от меньших d к d. Из предположения индукции следует, что сумма по граничным гиперплоскостям асимптотически мала, а именно при $\prod r_i \to 0$ выполнено

$$\sum_{n_1=1,\bar n_{-1}\in\mathbb{N}^{d-1}} \frac{1}{1+\prod\limits_i (4r_i^2(n_i-1/2)^2)}$$
$$= \sum_{\bar n_{-1}\in\mathbb{N}^{d-1}} \frac{1}{1+r_1^2\prod\limits_{i\neq 1} 4r_i^2(n_i-1/2)^2} \sim \frac{\pi}{2(d-2)!} \frac{(-\sum\limits_i \ln r_i)^{d-2}}{1/2\prod\limits_i 2r_i},$$

Из монотонности функции

$$\bar x \to \frac{1}{1+x_1^2\dots x_d^2}$$

по каждой координате в положительном октанте $\mathbb{R}^d_+$ следует, что

$$\sum_{\bar{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{1+\prod\limits_i (4r_i^2(n_i-1/2)^2)} \geqslant \frac{1}{\prod\limits_i 2r_i} \int\limits_{r_1}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{r_d}^{\infty} dx_d \left(\frac{1}{1+x_1^2\ldots x_d^2}\right)$$

и вместе с этим

$$\sum_{\bar{n}\in(\mathbb{N}\setminus\{1\})^d} \frac{1}{1+\prod\limits_i (4r_i^2(n_i-1/2)^2)} \leqslant \frac{1}{\prod\limits_i 2r_i} \int\limits_{r_1}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{r_d}^{\infty} dx_d \left(\frac{1}{1+x_1^2\ldots x_d^2}\right).$$

Мы показали, что разность двух приведённых сумм асимптотически мала по сравнению с предполагаемым ответом. Поэтому достаточно доказать, что при $\prod_i r_i \to 0$ выполнено

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{r_d}^{\infty} dx_d \left(\frac{1}{1+x_1^2\ldots x_d^2}\right) \sim \frac{\pi(-\sum\limits_i \ln r_i)^{d-1}}{2(d-1)!}.$$

Аналогично, чтобы разобраться с суммой для дисперсии, нужно проверить что при $\prod_i r_i \to 0$ выполнено

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{r_d}^{\infty} dx_d \left(\frac{1}{1+x_1^2\ldots x_d^2}\right)^2 \sim \frac{\pi(-\sum\limits_i \ln r_i)^{d-1}}{4(d-1)!}.$$

Проинтегрируем оба интеграла по x_d и получим

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{r_{d-1}}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_1\ldots x_{d-1}r_d)\right) \frac{dx_{d-1}\ldots dx_1}{x_1\ldots x_{d-1}}$$

и

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{r_{d-1}}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_1\ldots x_{d-1}r_d) - \frac{x_1\ldots x_{d-1}r_d}{1+x_1^2\ldots x_{d-1}^2 r_d^2}\right) \frac{dx_{d-1}\ldots dx_1}{x_1\ldots x_{d-1}}.$$

Сразу разберёмся с лишней частью во втором интеграле. По предположению индукции при $\prod_i r_i \to 0$ верно

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{r_{d-1}}^{\infty} \frac{r_d dx_{d-1}\ldots dx_1}{1+x_1^2\ldots x_{d-1}^2 r_d^2} \sim \frac{\pi(-\sum\limits_i \ln r_i)^{d-2}}{2(d-1)!} = o\left((-\sum_i \ln r_i)^{d-1}\right).$$

Таким образом, нам остаётся доказать следующее утверждение

Лемма 3. *При* $r_i \geqslant 0, \prod_i r_i \to 0$ *выполнено*

$$\int_{r_1}^{\infty} \dots \int_{r_{d-1}}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_1 \dots x_{d-1} r_d)\right) \frac{dx_{d-1} \dots dx_1}{x_1 \dots x_{d-1}} \sim \frac{\pi(-\sum_i \ln r_i)^{d-1}}{2(d-1)!}.$$

Для доказательства нам пригодится явное значение следующего интеграла. Проверку этого равенства можно найти в разделе 3.

Предложение 4. *Для непустой области*

$$S = \{x \,|\forall i x_i \geqslant r_i,\ x_1 \dots x_k \leqslant A\}$$

имеет место равенство

$$\int_S \frac{1}{x_1 \dots x_k}\, dx_1 \dots dx_k = \frac{1}{k!}\left(\ln A - \sum_i \ln r_i\right)^k.$$

Сделаем замену $p = x_1 \dots x_{d-1} r_d$. Тогда

$$dp dx_1 \dots dx_{d-2} = x_1 \dots x_{d-2} r_d dx_1 \dots dx_{d-2}.$$

Область $\{\bar{x} \,|\, x_i \geqslant r_i, 1 \leqslant i \leqslant d-1\}$ переходит в

$$\left\{\bar{x} \,|\, x_i \geqslant r_i, 1 \leqslant i \leqslant d-2, x_1 \dots x_{d-2} \leqslant \frac{p}{r_{d-1} r_d}\right\}.$$

Интеграл переписывается в виде

$$\int_{r_1 \dots r_d}^{\infty} dp \left(\frac{\pi/2 - \arctan(p)}{p} \int_S \frac{dx_1 \dots dx_{d-2}}{x_1 \dots x_{d-2}}\right),$$

где область S имеет вид

$$\left\{\bar{x} \,|\, x_i \geqslant r_i, x_1 \dots x_{d-2} \leqslant \frac{p}{r_{d-1} r_d}\right\}.$$

Согласно предложению 4 внутренний интеграл по области S можно найти явно. Подставляя, получаем

$$\frac{1}{(d-2)!} \int_{r_1 \dots r_d}^{\infty} \left(\frac{\pi/2 - \arctan(p)}{p} \left(\ln p - \sum_{i=1}^{d} \ln r_i\right)^{d-2}\right) dp.$$

Обозначим $r = r_1 \ldots r_d$. Сделаем замену $p = re^t, dp = pdt$ и получим

$$\frac{1}{(d-2)!}\int\limits_0^\infty (\pi/2 - \arctan(re^t))t^{d-2}\,dt.$$

Чтобы найти асимптотику при $r \to 0$, обозначим $g(r) = \sqrt{-\ln r}$ и разобьём луч $[0,\infty)$ на три части $[0, -\ln r - g(r)]$, $[-\ln r - g(r), -\ln r + g(r)]$, $[-\ln r + g(r), \infty)$. Интегралы по соответствующим частям обозначим I_1, I_2, I_3.

На первом участке $0 \leqslant re^t \leqslant e^{-g(r)} \to 0$, поэтому

$$\pi/2 - \arctan(re^t) = \pi/2(1 + o(1))$$

равномерно по участку, откуда

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^{-\ln r - g(r)} (\pi/2 - \arctan(re^t))t^{d-2}\,dt \\
&= (1+o(1))\int\limits_0^{-\ln r - g(r)} \frac{\pi}{2}t^{d-2}\,dt = (1+o(1))\frac{\pi}{2(d-1)}(-\ln r - g(r))^{d-1} \\
&= (1+o(1))\frac{\pi}{2(d-1)}(-\ln r)^{d-1}.
\end{aligned}$$

На втором участке используем элементарную верхнюю оценку

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{-\ln r - g(r)}^{-\ln r + g(r)} (\pi/2 - \arctan(re^t))t^{d-2}\,dt \\
&\leqslant \pi g(r)(-\ln r + g(r))^{d-2} = o((-\ln r)^{d-1}).
\end{aligned}$$

На третьем участке $re^t \geqslant e^{g(r)} \to \infty$, откуда

$$\pi/2 - \arctan(re^t) = (1+o(1))\frac{1}{re^t}$$

равномерно по участку, а значит

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int\limits_{-\ln r + g(r)}^{\infty} (\pi/2 - \arctan re^t)t^{d-2}\,dt \leqslant \frac{1+o(1)}{r}\int\limits_{-\ln r + g(r)}^{\infty} e^{-t}t^{d-2}\,dt \\
&= \frac{1+o(1)}{r}e^{\ln r - g(r)}(-\ln r + g(r))^{d-2} = o((-\ln r)^{d-1}).
\end{aligned}$$

Таким образом, только I_1 вносит значимый вклад. Остаётся подставить $r = r_1 \dots r_d$ и получить требуемое. □

Таким образом,

$$\mathbb{E}\,\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{opt}, B) = \mathbb{E}\,\mathcal{E}^*_{\overline{T}}(g_{\text{opt}}, B) \sim \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!} T(\ln T)^{d-1} \tag{1}$$

и

$$\operatorname{Var}\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\text{opt}}, B) = \operatorname{Var}\mathcal{E}^*_{\overline{T}}(g_{\text{opt}}, B) \sim \frac{\lambda^3}{2\pi^{d-1}(d-1)!} T(\ln T)^{d-1}. \tag{2}$$

Докажем теперь сходимость нормированной оптимальной ошибки почти наверное и в L_2.

Сходимость в L_2 следует автоматически, ведь для случайной величины

$$Q = \frac{1}{T(\ln T)^{d-1}} \mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\text{opt}}, B) - \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!}$$

имеем $\mathbb{E}\,Q = o(1)$ и $\operatorname{Var} Q = o(1)$, откуда

$$\mathbb{E}\,Q^2 = (\mathbb{E}\,Q)^2 + \operatorname{Var} Q = o(1).$$

Теперь докажем сходимость почти наверное.

Сначала докажем сходимость для некоторого дискретного набора прямоугольников, а затем произвольный прямоугольник зажмём между двумя прямоугольниками из этого набора. Зафиксируем произвольное $a > 1$ и $c > 0$. Рассмотрим серию прямоугольников со сторонами $\bar{R} = (ca^{\alpha_1}, \dots, ca^{\alpha_d})$, где $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. Покажем, что при стремлении объёма $R = c^d a^{\alpha_1 + \dots \alpha_d} \to \infty$ имеет место сходимость п.н.

$$\frac{\mathcal{E}_{\overline{R}}(f_{\text{opt}}, B)}{R(\ln R)^{d-1}} \to \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!}.$$

Рассмотрим центрированную последовательность

$$Q_{\overline{R}} = \frac{\mathcal{E}_{\overline{R}}(f_{\text{opt}}, B)}{R(\ln R)^{d-1}} - \mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{E}_{\overline{R}}(f_{\text{opt}}, B)}{R(\ln R)^{d-1}}\right).$$

Поскольку из соотношения (1) следует

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{E}_{\overline{R}}(f_{\text{opt}}, B)}{R(\ln R)^{d-1}}\right) \to \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!},$$

достаточно доказать, что $Q_{\overline{R}} \to 0$ почти наверное. Из соотношения (2) следует, что для некоторой константы C

$$\mathbb{P}(|Q_{\overline{R}}| > R^{-1/3}) < \operatorname{Var} Q_{\overline{R}} R^{2/3} < CR^{-1/3}.$$

Вспомним, что $R = c^d a^{\sum_i \alpha_i}$, где вектор степеней $\bar\alpha$ пробегает $\mathbb{N}_0^d$. Тогда

$$\sum_{\bar\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \mathbb{P}(|Q_{\overline{R}}| > R^{-1/3}) < C \sum_{\bar\alpha\in\mathbb{N}_0^d} c^{-d/3} a^{-\sum_i \alpha_i/3}$$
$$= Cc^{-d/3}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0} a^{-\alpha/3}\right)^d < \infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли, почти наверное выполнено лишь конечное число событий $\{|Q_{\overline{R}}| > R^{-1/3}\}$. Таким образом, при $R \to \infty$ выполнено $Q_{\overline{R}} \to 0$ почти наверное. Теперь вернёмся к изначальной последовательности. Поскольку $\min(T_i)$ отделён от 0, мы можем выбрать $c < \min(T_i)$. Тогда прямоугольник из последовательности со сторонами $\bar T$ зажимается между прямоугольником со сторонами $\bar R$ и прямоугольником со сторонами $a\bar R$. Поскольку с ростом параметрического множества ошибка аппроксимации растёт, получаем

$$\frac{\mathcal{E}_{\overline{R}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{a^d R(\ln a^d R)^{d-1}} \leqslant \frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{T(\ln T)^{d-1}} \leqslant \frac{\mathcal{E}_{a\overline{R}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{R(\ln R)^{d-1}}.$$

Отсюда, применяя уже доказанную сходимость, получаем что при $T \to \infty$ почти наверное

$$\limsup \frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{T(\ln T)^{d-1}} \leqslant \frac{a^d\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!},$$
$$\liminf \frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{T(\ln T)^{d-1}} \geqslant \frac{a^{-d}\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!}.$$

Поскольку это утверждение верно для произвольного рационального $a > 1$, получаем, что при $T \to \infty$ почти наверное

$$\liminf \frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{T(\ln T)^{d-1}} = \limsup \frac{\mathcal{E}_{\overline{T}}(f_{\mathrm{opt}}, B)}{T(\ln T)^{d-1}} = \frac{\lambda}{2\pi^{d-1}(d-1)!}. \qquad \square$$

От ограничения на отделимость $\min(T_1, \dots, T_d)$ от нуля отказаться нельзя. Без него можно брать каждый следующий прямоугольник гораздо более вытянутым, чем предыдущий. Тогда ошибки на них будут практически независимы, из-за чего не будет сходимости почти наверное.

§3. Доказательство предложения 4

Для непустой области

$$S = \{\bar{x} \mid \forall i\, x_i \geqslant r_i, x_1 \dots x_k \leqslant A\}$$

проверим, что

$$\int\limits_S \frac{1}{x_1 \dots x_k}\, dx_1 \dots dx_k = \frac{1}{k!}\left(\ln A - \sum_i \ln r_i\right)^k.$$

Доказательство. Сначала сделаем замену $y_i = x_i/r_i \geqslant 1$ и обозначим $B = A/\prod\limits_i r_i$. Тогда область S переходит в

$$S_1 = \Big\{\bar{y} \mid y_i \geqslant 1, \prod_i y_i \leqslant B\Big\}.$$

Учитывая, что $dx_1 \dots dx_k = \prod\limits_i r_i dy_1 \dots dy_k$, получим

$$\int\limits_S \frac{1}{x_1 \dots x_k} dx_1 \dots dx_k = \int\limits_{S_1} \frac{1}{y_1 \dots y_k} dy_1 \dots dy_k.$$

Теперь сделаем замену $t_j = \prod\limits_{i \leqslant j} y_i$. Область S_1 переходит в

$$S_2 = \big\{\bar{t} \mid 1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_k \leqslant B\big\},$$

при этом $dt_1 \dots dt_k{=}t_1 \dots t_{k-1} dy_1 \dots dy_k$. Поэтому

$$\int\limits_{S_1} \frac{1}{y_1 \dots y_k} dy_1 \dots dy_k = \int\limits_{S_2} \frac{1}{t_1 \dots t_k} dt_1 \dots t_k.$$

Наконец, последний интеграл симметричен по переменным $t_1, \dots, t_k$, а значит не зависит от порядка. Поэтому

$$\int\limits_{1 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_k \leqslant B} \frac{dt_1 \dots dt_k}{t_1 \dots t_k} = \frac{1}{k!} \int\limits_1^B \dots \int\limits_1^B \frac{dt_1 \dots dt_k}{t_1 \dots t_k}$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\int\limits_1^B \frac{1}{t}\, dt\right)^k = \frac{1}{k!}(\ln B)^k. \qquad \square$$

Автор благодарит попечительский совет и жюри конкурса Мёбиуса, победителем которого он является.

Список литературы

1. A. Berlinet, C. Thomas-Agnan, *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probab. Statist.* Kluwer, 2004.
2. I. Ibragimov, Z. Kabluchko, M. Lifshits, *Some extensions of linear approximation and prediction problems for stationary processes.* — Stoch. Proc. Appl. **129** (2019), 2758–2782.
3. Z. Kabluchko, M. Lifshits, *Least energy approximations for processes with stationary increments.* — J. Theor. Probab. **30**, No. 1 (2017), 268–296.
4. M. Kanagawa, P. Hennig, D. Sejdinovic, B. K. Sriperumbudur, *Gaussian Processes and Kernel Methods: A Review on Connect. Equivalences*, arXiv:1807.02582.
5. M. Lifshits, A. Siuniaev, *Energy of taut strings accompanying random walk.* — Probab. Math. Stat. **41**, No. 1 (2021), 9–23.
6. M. Lifshits, E. Setterqvist, *Energy of taut string accompanying Wiener process.* — Stoch. Proc. Appl. **125** (2015) 401–427.
7. C. E. Rasmussen, C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning.* — the MIT Press, 2006.
8. Д. И. Блинова, М. А. Лифшиц, *Энергия натянутых струн, сопровождающих винеровский процесс и случайное блуждание в полосе переменной ширины.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495**, 64–86.
9. М. А. Лифшиц, З. А. Каблучко, *Адаптивная энергетически эффективная аппроксимация стационарных процессов.* — Изв. РАН, сер. Математ. **83**, No. 5 (2019), 27–52.

Karagodin N. A. Energy efficient approximations of Brownian Sheet.

For a random field $B(t_1, \dots, t_d), t_i \in [0, T_i]$ with a reproducing kernel H and any function $f \in H$ define approximation error as

$$\mathcal{E}_{\bar{T}}(f, B) = \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_d} (f(\bar{t}) - B(\bar{t}))^2 \, d\bar{t} + \lambda^2 \|f\|_H^2.$$

The first term defines proximity of f to B and the second one defines energy efficiency of f. Coefficient λ allows to balance between these two parts. The best approximation is

$$f_{\mathrm{opt}} = \underset{f \in H}{\arg\min}\, \mathcal{E}_{\bar{T}}(f, B).$$

We prove the law of large numbers on convergence of optimal approximation error of Brownian Sheet in L^2 and almost surely.

СПбГУ, Университетская наб., д. 7–9
E-mail: nikitus20@gmail.com

Поступило 24 октября 2022 г.