Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

Я. С. Голикова, А. Ю. Зайцев

О ТОЧНОСТИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОЙ АППРОКСИМАЦИИ n-КРАТНЫХ СВЕРТОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В середине 50-х годов прошлого века А. Н. Колмогоров [22] поставил задачу о точности безгранично делимой аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Он доказал, что в смысле равномерного расстояния между функциями распределения ρ, называемого теперь расстоянием Колмогорова, точность аппроксимации можно записать в виде $c\,n^{-1/5}$, где c – некоторая абсолютная постоянная, а n – количество слагаемых. Оптимальная оценка вида $c\,n^{-2/3}$ была получена Т. Араком [2]. Тем самым,

$$\varphi(n) = \sup_{F\in\mathfrak{F}} \rho(F^n, \mathfrak{D}) \leqslant c\,n^{-2/3}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{F}$ – совокупность всех одномерных вероятностных распределений, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ – совокупность безгранично делимых распределений, а произведения и степени мер понимаются в смысле свертки: $GH = G * H$, $F^n = F^{n*}$, $F^0 = E = E_0$, где E_x – распределение, сосредоточенное в точке x. Символами c и $c_j(\,\cdot\,)$ мы обозначаем (вообще говоря, различные) положительные абсолютные константы и величины, зависящие только от аргументов в скобках. Для конкретных распределений F скорость убывания величины $\rho(F^n, \mathfrak{D})$ может быть значительно выше, чем $O(n^{-2/3})$. В середине 90-х годов А. Ю. Зайцев [41] сформулировал гипотезу о том, что для любого одномерного распределения F существует зависящая от F величина $c(F)$, такая что $\rho(F^n, \mathfrak{D}) \leqslant c(F)\,n^{-1}$ для любого натурального n. Ранее Э. Л. Пресман [33] показал, что это верно для биномиального распределения, когда распределение F сосредоточено в двух точках. Для некоторых распределений гипотеза была подтверждена в работах Арака [1], Чяканавичюса [5], [6] и Чяканавичюса и Вана [7].

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, безгранично делимая аппроксимация сверток вероятностных распределений, оценивание точности аппроксимации, функции концентрации, неравенства.

Работа поддержана грантом РФФИ–ННИО 20-51-12004.

Некоторые оптимальные оценки получены в работах А. Ю. Зайцева [39, 40] для равномерного расстояния в общем случае. В частности, удалось получить простые формулировки результатов, из которых одновременно вытекают как правильные по порядку оценки точности безгранично делимой аппроксимации сверток сопровождающими законами, так и весьма общие оценки в центральной предельной теореме. Применяя эти результаты к конкретным симметричным распределениям с медленно убывающими степенными хвостами, мы получим в настоящей работе степенные оценки точности безгранично делимой аппроксимации распределений сумм n независимых одинаково распределенных случайных величин вида $O(n^{-1+\varepsilon})$ с $\varepsilon > 0$, сколь угодно близким к нулю.

Функция концентрации вероятностного распределения F определяется формулой

$$Q(F,\lambda) = \sup_{x\in\mathbf{R}}\{F\{[x, x+\lambda]\}\}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Рассмотрим классический вопрос о скорости убывания $Q(F^n,\lambda)$ для фиксированного $\lambda > 0$ при $n \to \infty$. Свойства функций концентрации n-кратных сверток рассмотрены в монографиях [3], [19], [31] и [32]. Известно, что при фиксированном $\lambda > 0$ функция концентрации $Q(F^n,\lambda)$ n-кратной свертки невырожденного распределения F убывает не медленнее, чем $O(n^{-1/2})$. Согласно неравенству Колмогорова–Рогозина (см. [34]),

$$Q(F^n,\lambda) \leqslant \frac{c}{\sqrt{n\left(1 - Q(F,\lambda)\right)}}, \tag{2}$$

где c – некоторая абсолютная положительная постоянная. Эссеен [10] уточнил это неравенство, показав, что

$$Q(F^n,\lambda) \leqslant \frac{c}{\sqrt{n\,D(\widetilde{F},\lambda)}},$$

где

$$D(H,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \min\left\{x^2\lambda^{-2}, 1\right\} H\{dx\}, \quad H \in \mathfrak{F},\ \lambda > 0.$$

Обозначение $\widetilde{F}$ используется для распределения разности $X - Y$ двух независимых случайных величин X и Y, каждая из которых имеет распределение $F = \mathcal{L}(X)$. Дальнейшие уточнения этого неравенства можно найти, например, в работах [4, 21, 25] и [30].

Мы можем переписать $D(H,\lambda)$ в виде

$$D(H,\lambda) = K(H,\lambda) + G(H,\lambda),$$

где

$$K(H,\lambda) = \lambda^{-2} \int\limits_{|x|\leqslant\lambda} x^2\, H\{dx\}, \quad G(H,\lambda) = H\big\{\{x : |x| > \lambda\}\big\}.$$

Эссеен [10] показал, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, Q(F^n,\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\, X^2 = \infty$. Различные конкретные оценки $Q(F^n,\lambda)$, имеющие порядок $o(n^{-1/2})$, содержатся в работах [2, 8–11, 13–18, 26–29] и [37].

В частности, правильный порядок убывания величины $Q(F^n,\lambda)$ при дополнительном условии регулярности

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{G(F,y)}{K(F,y)} < \infty \tag{3}$$

был независимо установлен Холлом [18] и Гриффином, Джейном и Пруиттом [15], которые показали, что

$$c_1(F,\lambda) \leqslant a_n\, Q(F^n,\lambda) \leqslant c_2(F,\lambda) \quad \text{при } n \geqslant c_3(F,\lambda), \tag{4}$$

где a_n – решение уравнения $D(F,a_n) = 1/n$. Напомним, что $c_j(F,\lambda)$ – положительные величины, зависящие только от F и λ.

В совместных работах Ф. Гётце и А. Ю. Зайцева [13] и [14] было, в частности, получено количественное уточнение результата Эссеена. Было доказано, что

$$Q(F^n,\lambda) \leqslant \frac{c_4(F,\lambda,\delta)}{n\sqrt{D(\widetilde{F},\delta\sqrt{n})}}, \quad \delta > 0.$$

Это неравенство уточняет также более ранний результат Л. Н. Морозовой [26], показавшей, что

$$Q(F^n,\lambda) \leqslant \frac{c_5(F,\lambda,\delta)}{n\sqrt{K(\widetilde{F},\delta\sqrt{n})}}, \quad \delta > 0.$$

Условия, при которых из степенного убывания хвостов функции распределения случайной величины, принимающей только целые значения, введем степенные оценки сверху функций концентрации $Q(F^n,\lambda)$, исследуются в работах [8,9] и [11]. В последние годы появился интерес к условиям быстрого убывания функций концентрации сверток в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц (см., например, [12, 35] и [38]).

Эссеен [10] показал также, что если $\mathbf{E}\,|X|^r < \infty$ при некотором r из интервала $0 < r \leqslant 2$, то

$$Q(F^n, \lambda) \geqslant \frac{c(r)\lambda}{\lambda + (n\,\mathbf{E}\,|X|^r)^{1/r}},$$

где $c(r)$ – положительная величина, зависящая только от r.

При $H \in \mathfrak{F}$ введем обобщенное распределение Пуассона $e(H) \in \mathfrak{D}$ равенством

$$e(H) = e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H^m}{m!}.$$

Мы будем использовать следующий результат, полученный А. Ю. Зайцевым [39].

Теорема 1. *Пусть распределения $F_i \in \mathfrak{F}$ представлены в виде*

$$F_i = (1 - p_i)\,U_i + p_i\,V_i, \tag{5}$$

где $U_i, V_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \dots, n$,

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1, \int x\,U_i\{dx\} = 0,\ U_i\,\{\{x \in \mathbf{R} : |x| \leqslant \tau\}\} = 1,\ \tau \geqslant 0, \tag{6}$$

а V_i – произвольные распределения. Обозначим

$$p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i, \quad F = \prod_{i=1}^{n} F_i, \quad D = \prod_{i=1}^{n} e(F_i). \tag{7}$$

Тогда

$$\rho\big(F,\, D\big) \leqslant c\,\big(p + \min\big\{Q(F, \tau), Q(D, \tau)\big\}\big). \tag{8}$$

Теорема 1 уточняет результаты работ [20, 24]. А. Ю. Зайцев [39, 40] обобшил теорему 1, так что из усовершенствованных формулировок одновременно вытекают не только теорема 1, но и оптимальные общие оценки в центральной предельной теореме. С помощью неравенства Колмогорова–Рогозина (2) для случая одинаковых распределений F_i, $i = 1, \dots, n$, из теоремы 1 несложно вывести оценки Колмогорова–Ле Кама [23, 24] с правой частью вида $c\,n^{-1/3}$.

Рассмотрим симметричное распределение H, такое что

$$H\{\{x : |x| > y\}\} = 1/y^\gamma$$

при всех $y > 1$ с некоторым γ, $0 < \gamma < 2$. Пусть в условиях теоремы 1 $F_i = H$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда выполнены соотношения (5), (6) при $\tau > 1$ и

$$p_i = p = 1/\tau^{\gamma}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Легко проверить, что распределение $F = H$ удовлетворяет условию регулярности (3). Применяя неравенство (4), получаем, что

$$Q(H^n, 1) \leqslant c(H)\, n^{-1/\gamma}. \tag{9}$$

Теперь теорема 1 вместе с неравенством (9) дает оценку

$$\begin{aligned} \rho\bigl(H^n,\, D\bigr) &\leqslant c\,\bigl(p + Q(H^n, \tau)\bigr) \\ &\leqslant c(H)\bigl(\tau^{-\gamma} + \tau Q(H^n, 1)\bigr) \leqslant c(H)\bigl(\tau^{-\gamma} + \tau\, n^{-1/\gamma}\bigr). \end{aligned} \tag{10}$$

Выбирая $\tau = n^{\alpha}$ с $\alpha = \frac{1}{\gamma(1+\gamma)}$, получаем

$$\rho\bigl(H^n,\, D\bigr) \leqslant c(H)\, n^{-1/(\gamma+1)}. \tag{11}$$

Таким образом, для n-кратной свертки H^n конкретного распределения H теорема 1 дает оценку точности аппроксимации сопровождающими безгранично делимыми распределениями D порядка $n^{-1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом γ. При малом ε порядок оценки может быть лучше, чем в упомянутом выше результате Арака. Заметим также, что полученный результат можно рассматривать как уточнение результатов работы [41].

Распределение H принадлежит области притяжения симметричного устойчивого распределения, причем точность аппроксимации распределения H^n устойчивым безгранично делимым распределением может оказаться выше, чем в неравенстве (11) (см., например, [17, 36]). Ясно также, что из теоремы 1 можно вывести аналоги неравенства (11) для других распределений из областей притяжения устойчивых распределений.

Список литературы

1. Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **25**, No. 2 (1980), 225–246.
2. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 2 (1981), 225–245.
3. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР, **174** (1986), 214 с.

4. J. Bretagnolle, *Sur l'inégalité de concentration de Doeblin–Lévy, Rogozin–Kesten.* — In: Parametric and semiparametric models with applications to reliability, survival analysis, and quality of life, Stat. Ind. Technol., Boston: Birkhäuser Boston, 2004, pp. 533–551.
5. В. Чяканавичюс, *Об обобщенных пуассоновских аппроксимациях при моментных ограничениях.* — Теория вероятн. и ее примен. **44**, No. 1 (1999), 74–86.
6. V. Čekanavičius, *Infinitely divisible approximations for discrete nonlattice variables.* — Adv. Appl. Probab. **35**, No. 4 (2003), 982–1006.
7. V. Čekanavičius, Y. H. Wang, *Compound Poisson approximations for sums of discrete nonlattice variables.* — Adv. Appl. Probab. **35**, No. 1 (2003), 228–250.
8. J.-M. Deshouillers, S. Sutanto, *On the rate of decay of the concentration function of the sum of independent random variables.* — Ramanujan J. **9**, No. 1–2 (2005), 241–250.
9. J.-M. Deshouillers, G. A. Freiman, A. A. Yudin, *On bounds for the concentration functions.* — Astérisque **258** (1999), 425–436.
10. C.-G. Esseen, *On the concentration function of a sum of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **9** (1968), 290–308.
11. A. S. Fainleib, *On small values of semi-additive function.* — J. Theoret. Probab. **11** (1998), 609–619.
12. O. Friedland, S. Sodin, *Bounds on the concentration function in terms of the Diophantine approximation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345**, No. 9 (2007), 513–518.
13. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the rapid decay of concentration functions of n-fold convolutions.* — J. Theoret. Probab. **11**, No. 3 (1998), 715–731.
14. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *A multiplicative inequality for concentration functions of n-fold convolutions.* — In: High dimensional probability, II (Seattle, WA, 1999), In: Progr. Probab., Vol. **47**, Boston: Birkhäuser Boston, 2000, pp. 39–47.
15. P. S. Griffin, N. C. Jain, W. E. Pruitt, *Approximate local limit theorems for laws outside domains of attraction.* — Ann. Probab. **12**, No. 1 (1984), 45–63.
16. G. Halász, *Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability.* — Period. Math. Hungar. **8** (1977), 197–211.
17. P. Hall, *Two-sided bounds on the rate of convergence to a stable law.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **57** (1981), 349–364.
18. P. Hall, *Order of magnitude of the concentration function.* — Proc. Amer. Math. Soc. **89**, No. 1 (1983), 141–144.
19. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации.* — Пер. с англ. В. М. Круглова, В. М. Золотарева. М.: Наука, 1980.
20. И. А. Ибрагимов, Э. Л. Пресман, *О скорости сближения распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **18**, No. 4 (1973), 753–766.
21. H. Kesten, *A sharper form of the Doeblin–Lévy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions.* — Math. Scand. **25** (1969), 133–144.
22. А. Н. Колмогоров, *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.* — Теория вероятн. и ее примен. **1**, No. 4 (1956), 384–394.

23. А. Н. Колмогоров, *О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями.* — Труды Москов. матем. об-ва **12** (1963), 437–451.
24. L. Le Cam, *On the distribution of sums of independent random variables.* — In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume), pp. 179–202. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1965.
25. А. Л. Мирошников, Б. А. Рогозин, *Неравенства для функций концентрации.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 178–183.
26. Л. Н. Морозова, *Некоторые оценки функции концентрации суммы независимых одинаково распределенных случайных величин.* — В кн.: Предельные теоремы для случайных процессов. Ташкен: Фан, 1977, 85–91.
27. А. Б. Мухин, *О концентрации распределений суммы независимых случайных величин.* I; II; III. — Изв. АН Узб. ССР, сер. физ.-матем. No. 2 (1973), 25–29; No. 4 (1973), 18–23; No. 1 (1976), 15–19.
28. А. Б. Мухин, *Одна оценка быстрого убывания концентрации распределений суммы независимых случайных величин.* — В кн.: Предельные теоремы для случайных процессов. Ташкен: Фан, 1976, 117–121.
29. А. Б. Мухин, *О локальных вероятностях сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, No. 4 (1989), 677–685.
30. С. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **41**, No. 3 (1996), 655–665.
31. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — М.: Наука, 1972.
32. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* — М.: Наука, 1987.
33. Э. Л. Пресман, *О сближении по вариации распределения суммы независимых бернуллиевских величин с пуассоновским законом.* — Теория вероятн. и ее примен. **30**, No. 2 (1985), 391–396.
34. Б. А. Рогозин, *Об одной оценке функций концентраций.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 1 (1961), 103–105.
35. M. Rudelson, R. Vershynin, *The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices.* — Adv. Math. **218**, No. 2 (2008), 600–633.
36. К. И. Сатыбалдина, *Абсолютные оценки скорости сходимости к устойчивым законам.* — Теория вероятн. и ее примен. **17**, No. 4 (1972), 773–775.
37. А. П. Сучков, Н. Г. Ушаков, *О быстром убывании функций концентрации сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, No. 3 (1989), 604–607.
38. T. Tao, Van H. Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices.* — Ann. Math. (2) **169**, No. 2 (2009), 595–632.
39. А. Ю. Зайцев, *О равномерной аппроксимации функций распределения сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **32**, No. 1 (1987), 45–52.
40. А. Ю. Зайцев, *Аппроксимация сверток вероятностных распределений безгранично делимыми законами при ослабленных моментных ограничениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **194** (1992), 79–90.

41. А. Ю. Зайцев, *Аппроксимация сверток сопровождающими законами при существовании моментов невысоких порядков.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 135–141.

Golikova Ia. S., Zaitsev A. Yu. On the accuracy of infinitely divisible approximation of n-fold convolutions of probability distributions.

Applying the results of Zaitsev (1987) to specific symmetric distributions with slowly decreasing power tails, we obtained power estimates for the accuracy of the infinitely divisible approximation of the distributions of sums of n i.i.d. random variables of the form $O(n^{-1+\varepsilon})$ with ε arbitrarily close to zero.

Поступило 31 октября 2022 г.

Балтийский государственный
технический университет
“Военмех” им. Д. Ф. Устинова
1-я Красноармейская, д. 1,
С.-Петербург, Россия;
С.-П. гос. университет
Университетская наб. 7/9
С.-Петербург, 199034 Россия
E-mail: `laviniaspb@gmail.com`

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9
С.-Петербург, 199034 Россия
E-mail: `zaitsev@pdmi.ras.ru`