Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

А. Н. Бородин

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕРЫ ДЛЯ ДИФФУЗИЙ С РАЗРЫВНЫМ СНОСОМ

Преобразованию меры для диффузионного процесса посвящена знаменитая работа И. В. Гирсанова [1]. Различным обобщениям этого преобразования посвящено много работ.

Нас интересует такое преобразование для диффузионного процесса с разрывным сносом. Можно выделить разрывную компоненту в виде ступенчатой функции и получить преобразование, переводящую меру исходного диффузионного процесса в меру диффузионного процесса с непрерывным сносом.

Рассмотрим диффузию $\xi_\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, с единичным коэффициентом диффузии и с разрывным коэффициентом сноса вида

$$-(g(x) + \mu \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)), \qquad \mu \in \mathbf{R}, \qquad r \in \mathbf{R},$$

где функция $g(x)$, $x \in \mathbf{R}$, дифференцируема, и $g'(x)$ ограничена. Пусть, кроме того,

$$\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Big(\frac{\mu^2}{2} + \mu g(x)\Big) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Производящий оператор процесса $\xi_\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G} f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} - \big(g(x) + \mu \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\big)\frac{df}{dx}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.2}$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Таким образом, $\xi_\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный марковский процесс, для которого

$$G_z^\bullet(x) := \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(\xi_\bullet(t) < z)\, dt, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \lambda \geqslant 0,$$

– преобразование Лапласа по времени от переходной плотности, при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным

Ключевые слова: диффузия с разрывным сносом, преобразование меры, процесс Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом.

решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - \bigl(g(x) + \mu \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\bigr)G'(x) - \lambda G(x) = 0, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{r, z\}, \quad (1.3)$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \quad (1.4)$$

В этой задаче предполагается, что решение в точке $r \neq z$ имеет непрерывную первую производную.

Здесь и далее нижний индекс у вероятности и математического ожидания означает начальное значение процесса.

Функция $G_z(x)$, $z \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, называется функцией Грина диффузионного процесса, и она однозначно определяет процесс, так как обратное преобразование Лапласа по λ от этой функции, деленной на λ, задает переходную плотность процесса.

Рассмотрим диффузию $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$, с единичным коэффициентом диффузии и с коэффициентом сноса $-g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Производящий оператор процесса $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} - g(x)\,\frac{df}{dx}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1.5)$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Таким образом, $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный марковский процесс, для которого, согласно теореме 6.2 гл. IV из [2]

$$G_z^\circ(x) := \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(\xi_\circ(t) < z)\,dt, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \lambda \geqslant 0,$$

– преобразование Лапласа по времени от переходной плотности, при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - g(x)\,G'(x) - \lambda G(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{z\}, \quad (1.6)$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \quad (1.7)$$

Предположим, что выполнены следующие условия

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y \exp\Bigl(4\int_0^z g(v)\,dv\Bigr)\,dz > 0,$$

$$\liminf_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int\limits_{-y}^{0}\exp\Big(-4\int\limits_{z}^{0}g(v)\,dv\Big)\,dz>0,$$

тогда согласно § 14 гл. IV из [2] у диффузии $\xi_\circ$ существует локальное время $\ell_\circ(t,r)$, $t\geqslant 0$, $r\in\mathbf{R}$, относительно меры Лебега, т.е.

$$\ell_\circ(t,r):=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{(r-\varepsilon,r+\varepsilon)}(\xi_\circ(s))\,ds,\qquad \text{п.н.}$$

Положим

$$\Delta_\mu(x,z):=\mu\int\limits_z^x \mathbb{1}_{[r,\infty)}(y)\,dy.$$

Тогда при любом $x\in\mathbf{R}$

$$\Delta_\mu(x,z)=\begin{cases}\mu(x\vee r-z), & r\leqslant z,\\ \mu(x-r)^+, & z\leqslant r.\end{cases}$$

Теорема 1.1. *Пусть диффузия $\xi_\circ$ такова, что $\mathbf{E}_x e^{|\mu||\xi_\circ(t)|}<\infty$ и $\mathbf{E}_x e^{\mu\ell_\circ(t,r)/2}<\infty$ при любом $t>0$. Тогда имеет место абсолютная непрерывность мер: при любом $t>0$*

$$\frac{d\mathbf{P}^\bullet_x}{d\mathbf{P}^\circ_x}\Big|_{\mathcal{F}_t}=\exp\Big(\Delta_\mu(x,\xi_\circ(t))+\frac12\mu\ell_\circ(t,r)$$
$$-\int\limits_0^t \mathbb{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\mu^2}{2}+\mu\, g(\xi_\circ(s))\big)\,ds\Big)\qquad \mathbf{P}^\circ_x\text{-п.н.},\quad (1.8)$$

где $\mathbf{P}^\bullet_x$ и $\mathbf{P}^\circ_x$ – меры, соответствующие диффузиям $\xi_\bullet$ и $\xi_\circ$ соответственно, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная диффузией $\xi_\circ$ до момента t.

Доказательство. Найдем решение задачи (1.3), (1.4) в терминах фундаментальных решений соответствующего уравнения.

Решение однородного уравнения

$$\frac12 Y''(x)-\big(g(x)+\mu\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\big)Y'(x)-\lambda Y(x)=0,\qquad x\in\mathbf{R},\qquad (1.9)$$

при $r\leqslant x<\infty$ с помощью замены $Z(x):=e^{-\mu x}Y(x)$ преобразуется в решение уравнения

$$\frac12 Z''(x)-g(x)Z'(x)-\big(\lambda+\frac{\mu^2}{2}+\mu g(x)\big)Z(x)=0,\qquad x\in\mathbf{R}.\qquad (1.10)$$

При рассмотрении этого уравнения важным фактором является условие (1.1). Линейно независимые решения этого однородного уравнения обозначим: $\psi_\mu(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательное возрастающее решение, а $\varphi_\mu(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательное убывающее решение,

$$\omega_\mu(x) = \psi'_\mu(x)\varphi_\mu(x) - \psi_\mu(x)\varphi'_\mu(x)$$

– их вронскиан. Существование таких решений вытекает из предложения 12.2 гл. II из [2].

Положим

$$G_z^\mu(x) := \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\varphi_\mu(z)\psi_\mu(x), & x \leqslant z, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\psi_\mu(z)\varphi_\mu(x), & z \leqslant x. \end{cases} \tag{1.11}$$

Решение задачи (1.3), (1.4) при $z > r$ ищем в виде

$$G_z^\bullet(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}Ae^{\mu(r-z)}\varphi_\mu(z)\psi_0(x), & x \leqslant r < z, \\ e^{\mu(x-z)}G_z^\mu(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}Be^{\mu(x-z)}\varphi_\mu(z)\varphi_\mu(x), & r \leqslant x. \end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.3), а также условию на скачок производной (1.4). Константы A и B можно вычислить из условия непрерывности решения в точке r и условия непрерывности в точке r первой производной. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A\psi_0(r) - B\varphi_\mu(r) = \psi_\mu(r), \\ A\psi'_0(r) - B(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi'_\mu(r)) = \mu\psi_\mu(r) + \psi'_\mu(r). \end{cases}$$

Решение имеет вид

$$A = \frac{\omega_\mu(r)}{\psi'_0(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi'_\mu(r))}, \tag{1.12}$$

$$B = \frac{\psi_0(r)(\mu\psi_\mu(r) + \psi'_\mu(r)) - \psi'_0(r)\psi_\mu(r)}{\psi'_0(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi'_\mu(r))}. \tag{1.13}$$

В результате имеем

$$G_z^\bullet(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda e^{\mu(r-z)}\omega_\mu(r)\varphi_\mu(z)\psi_0(x)}{\omega_\mu(z)(\psi'_0(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi'_\mu(r)))}, & x \leqslant r < z, \\ e^{\mu(x-z)}G_z^\mu(x) + 2\lambda e^{\mu(x-z)} & \\ \times\dfrac{(\psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi'_\mu(r)) - \psi'_0(r)\psi_\mu(r))\varphi_\mu(z)\varphi_\mu(x)}{\omega_\mu(z)(\psi'_0(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi'_\mu(r)))}, & r \leqslant x. \end{cases}$$

Решение задачи (1.3), (1.4) при $z < r$ ищем в виде

$$G_z^\bullet(x) = \begin{cases} G_z^0(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)} A\psi_0(z)\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)} Be^{\mu(x-r)}\psi_0(z)\varphi_\mu(x), & z < r \leqslant x. \end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.3), а также условию на скачок производной (1.4). Константы A и B можно вычислить из условия непрерывности решения в точке r и условия непрерывности в точке r первой производной. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A\psi_0(r) - B\varphi_\mu(r) = -\varphi_0(r), \\ A\psi_0'(r) - B(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) = -\varphi_0'(r). \end{cases}$$

Решение имеет вид

$$A = \frac{\varphi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) - \varphi_0'(r)\varphi_\mu(r)}{\psi_0'(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r))}, \tag{1.14}$$

$$B = \frac{\omega_0(r)}{\psi_0'(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r))}. \tag{1.15}$$

В результате имеем

$$G_z^\bullet(x) = \begin{cases} G_z^0(x) \\ + \dfrac{2\lambda(\varphi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) - \varphi_0'(r)\varphi_\mu(r))\psi_0(z)\psi_0(x)}{\omega_\mu(z)(\psi_0'(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)))}, & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda e^{\mu(x-r)}\omega_0(r)\psi_0(z)\varphi_\mu(x)}{\omega_\mu(z)(\psi_0'(r)\varphi_\mu(r) - \psi_0(r)(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)))}, & r \leqslant x. \end{cases}$$

Поскольку $\xi^\bullet$ и ξ° являются однородными марковскими процессами, то достаточно доказать аналог (1.8) для переходных плотностей, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(\xi^\bullet(t) < z) = e^{\Delta_\mu(x,z)} \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(\frac{\mu}{2}\ell_\circ(t,r) - \int_0^t \mathbb{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\Big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\Big)\, ds\Big); \xi_\circ(t) < z\Big\}. \tag{1.16}$$

Здесь и далее для того чтобы упростить формулы, мы используем обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Мы докажем (1.16). Основываясь на этом равенстве можно доказать (1.8) аналогично тому, как это было сделано в статье [3].

Пусть τ – экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени, не зависящий от диффузии $\xi_\circ^\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, и от диффузии $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$.

Достаточно доказать (1.16) для преобразования Лапласа по времени, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(\xi^\bullet(\tau) < z) = e^{\Delta_\mu(x,z)}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(\frac{\mu}{2}\ell_\circ(\tau,r) - \int\limits_0^\tau \mathbb{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\big)\,ds\Big); \xi_\circ(\tau) < z\Big\}. \tag{1.17}$$

Согласно теореме 4.2 гл. III и теореме 6.2 гл. IV из [2] функция

$$G_z^\circ(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(\frac{\mu}{2}\ell_\circ(\tau,r) - \int\limits_0^\tau \mathbb{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\big)\,ds\Big); \xi_\circ(\tau) < z\Big\}$$

при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - g(x)\,G'(x) - \Big(\lambda + \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Big(\frac{\mu^2}{2} + \mu g(x)\Big)\Big)G(x) = 0, \quad x \neq \{r,z\}, \tag{1.18}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda, \tag{1.19}$$

$$G'(r+0) - G'(r-0) = -\mu G(r). \tag{1.20}$$

Решение задачи (1.18)–(1.20) при $z > r$ ищем в виде

$$G_z^\circ(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\widetilde{A}\varphi_\mu(z)\psi_0(x), & x \leqslant r < z, \\ G_z^\mu(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\widetilde{B}\varphi_\mu(z)\varphi_\mu(x), & r \leqslant x. \end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.18), а также условию на скачок производной (1.19). Константы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ можно вычислить из условия непрерывности решения в точке r и условия на скачок первой производной в r. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{A}\psi_0(r) - \widetilde{B}\varphi_\mu(r) = \psi_\mu(r), \\ \widetilde{A}\psi_0'(r) - \widetilde{B}(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) = \mu\psi_\mu(r) + \psi_\mu'(r). \end{cases}$$

Эта система совпадает с системой алгебраических уравнений для констант A и B при $z > r$. Следовательно, $\widetilde{A} = A$ и $\widetilde{B} = B$, где A и B определены формулами (1.12), (1.13).

В итоге при $z > r$ имеем, что $G_z^\bullet(x) = e^{\Delta_\mu(x,z)} G_z^\circ(x)$, и, следовательно, выполнено (1.17).

Решение задачи (1.18)–(1.20) при $z < r$ ищем в виде

$$G_z^\circ(x) = \begin{cases} G_z^0(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} \widetilde{A} \psi_0(z)\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)} \widetilde{B} \psi_0(z)\varphi_\mu(x), & z < r \leqslant x. \end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.18), а также условию на скачок производной (1.19). Константы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ можно вычислить из условия непрерывности решения в точке r и условия на скачок первой производной в r. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{A}\psi_0(r) - \widetilde{B}\varphi_\mu(r) = -\varphi_0(r), \\ \widetilde{A}\psi_0'(r) - \widetilde{B}(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) = -\varphi_0'(r). \end{cases}$$

Эта система совпадает с системой алгебраических уравнений для констант A и B при $z < r$. Следовательно, $\widetilde{A} = A$ и $\widetilde{B} = B$, где A и B определены формулами (1.14), (1.15).

В итоге при $z < r$ имеем, что $G_z^\bullet(x) = e^{\Delta_\mu(x,z)} G_z^\circ(x)$, и, следовательно, выполнено (1.17). □

2. Процесс Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом

В качестве примера приложения общего результата рассмотрим процесс Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом.

Процессу Орнштейна–Уленбека посвящено много работ. Краткое описание этого процесса дано в справочнике [4]. Там же приведено много формул для распределений различных функционалов от этого процесса.

Нас интересует процесс Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом. Основное утверждение дает формулу для абсолютной непрерывности меры процесса Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом относительно меры процесса Орнштейна–Уленбека. Это позволяет получать формулы для распределений различных функционалов от процесса с разрывным сносом через соответствующие формулы для классического процесса.

Обозначим процесс Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом через $U_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $U(t)$, $t \geqslant 0$, – стандартный процесс Орнштейна–Уленбека, т.е. диффузия на всей прямой с единичным коэффициентом диффузии и коэффициентом сноса $-\gamma x$, $\gamma > 0$.

Процесс Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом $U_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$, определим как диффузию на всей прямой с единичным коэффициентом диффузии и коэффициентом сноса $-\gamma x - \eta \operatorname{sign} x$, $\gamma > 0$, $\eta > 0$.

Производящий оператор процесса $U_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G} f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} - \bigl(\gamma x + \eta \operatorname{sign} x\bigr)\frac{df}{dx}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Таким образом, $U_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный марковский процесс, для которого

$$G_z(x) := \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(U_\diamond(t) < z)\,dt, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \lambda \geqslant 0,$$

– преобразование Лапласа по времени от переходной плотности. Здесь как и ранее нижний индекс у вероятности и математического ожидания означает начальное значение процесса.

При каждом $z \in \mathbf{R}$ функция $G_z(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - \bigl(\gamma x + \eta \operatorname{sign} x\bigr)G'(x) - \lambda G(x) = 0, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{0, z\}, \tag{2.2}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Имеет место абсолютная непрерывность мер: при любом $t > 0$ и $0 < \eta < 2\sqrt{\gamma/\pi}$*

$$\frac{d\mathbf{P}_x^\diamond}{d\mathbf{P}_x}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Bigl(\eta(|x| - |U(t)|) - \frac{\eta^2 t}{2} + \eta\,\ell(t,0) - \gamma\eta\int\limits_0^t |U(s)|\,ds\Bigr) \quad \mathbf{P}_x\text{-п.н.}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{P}_x^\diamond$ и $\mathbf{P}_x$ – меры, соответствующие процессу Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом и процессу Орнштейна–Уленбека, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная процессом Орнштейна–Уленбека до момента t, и $\ell(t,0)$

– *локальное время процесса Орнштейна–Уленбека относительно меры Лебега, т.е.*

$$\ell(t,0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(U(s))\,ds.$$

Доказательство. Начнем со вспомогательных результатов. Справедлива следующая оценка. При $0 < \eta < 2\sqrt{\gamma/\pi}$

$$\mathbf{E}_x e^{\eta\ell(t,0)} < \infty. \tag{2.5}$$

В силу монотонного возрастания оцениваемой функции по t при любом $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}_x e^{\eta\ell(t,0)} \leqslant e^{\lambda t}\lambda \int\limits_t^\infty e^{-\lambda s}\mathbf{E}_x e^{\eta\ell(s,0)}\,ds \leqslant e^{\lambda t}\mathbf{E}_x e^{\eta\ell(\tau,0)}. \tag{2.6}$$

Согласно формуле 7.1.3.1 из [4]

$$\mathbf{E}_x e^{\eta\ell(\tau,0)} = 1 + \frac{\eta\Gamma(\lambda/\gamma)e^{x^2\gamma/2}D_{-\lambda/\gamma}(|x|\sqrt{2\gamma})D_{-\lambda/\gamma}(0)}{\sqrt{\pi\gamma} - \eta\Gamma(\lambda/\gamma)D^2_{-\lambda/\gamma}(0)}, \tag{2.7}$$

где $D_{-\nu}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $\nu > 0$ – функции параболического цилиндра, которые убывают (определение см., например, приложение 2 из [4]). Из определения функции $D_{-\nu}$ следует, что

$$D_{-\nu}(0) = 2^{-\nu/2}\sqrt{\pi}/\Gamma((\nu+1)/2),$$

в частности, $D_{-1}(0) = \sqrt{\pi/2}$.

Выбирем в (2.6) $\lambda = \gamma$. Тогда

$$\mathbf{E}_x e^{\eta\ell(t,0)} \leqslant e^{\gamma t}\Big(1 + \frac{\eta\sqrt{2}e^{x^2\gamma/2}D_{-1}(|x|\sqrt{2\gamma})}{2\sqrt{\gamma} - \eta\sqrt{\pi}}\Big).$$

Отсюда следует (2.5).

Рассмотрим процесс с коэффициентом сноса $-(\gamma x - \eta)$ и единичным коэффициентом диффузии. Это – процесс Орнштейна–Уленбека с линейным сносом η, который мы обозначим U_η.

Процессы U_η и U можно представить как решения следующих стохастических дифференциальных уравнений

$$dU(t) = -\gamma U(t)dt + dW(t), \qquad U(0) = x,$$
$$dU_\eta(t) = -(\gamma U_\eta(t) - \eta)\,dt + dW(t), \qquad U_\eta(0) = x,$$

где W – стандартный процесс броуновского движения. Применяя преобразование Гирсанова (см., например, §10, гл. II из [2]), получим

$$\frac{d\mathbf{P}_x^\eta}{d\mathbf{P}_x}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\eta(W(t)-x) - \frac{\eta^2}{2}t\Big) \tag{2.8}$$

$$= e^{-\eta(x-U(t))}\exp\Big(-\frac{\eta^2}{2}t + \eta\gamma\int_0^t U(s)\,ds\Big) \qquad \mathbf{P}_x\text{-п.н.}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{P}_x^\eta$ и $\mathbf{P}_x$ – меры, соответствующие процессу Орнштейна–Уленбека с линейным сносом и процессу Орнштейна–Уленбека соответственно, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная диффузией U до момента t.

В силу преобразования Гирсанова, поскольку локальное время существует у процесса Орнштейна–Уленбека, то оно существует и у процесса Орнштейна–Уленбека с линейным сносом, и

$$\mathbf{E}_x e^{\eta\ell_\eta(t,0)} < \infty. \tag{2.10}$$

Эта оценка следует из того, что плотность одной меры по другой (формула(2.8)) имеет все моменты, а тогда неравенство Гельдера гарантирует (2.10).

Теперь мы готовы применить теорему 1.1. Перепишем коэффициент сноса $-(\gamma x + \eta\,\mathrm{sign}\,x)$ как коэффициент $-(\gamma x - \eta + 2\eta\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x))$, и для этого коэффициента применим теорему 1.1 с $\mu = 2\eta$, $g(x) = \gamma x - \eta$. Заметим, что условие (1.1) выполнено так как

$$\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\big(2\eta^2 + 2\eta(\gamma x - \eta\big) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)2\eta\gamma x \geqslant 0.$$

Кроме того в силу (2.8) $\mathbf{E}_x e^{2\eta|U_\eta(t)|} < \infty$, так как $U(t)$ – гауссовская величина.

Согласно теореме 1.1 (формула (1.8)) имеет место равенство

$$\frac{d\mathbf{P}_x^\diamond}{d\mathbf{P}_x^\eta}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\Delta_{2\eta}(x, U_\eta(t)) + \eta\ell_\eta(t,0) - 2\eta\gamma\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\infty)}(U_\eta(s))U_\eta(s)\,ds\Big) \qquad \mathbf{P}_x^\eta\text{-п.н.}, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{P}_x^\diamond$ и $\mathbf{P}_x^\eta$ – меры, соответствующие процессу Орнштейна–Уленбека с разрывным сносом и процессу Орнштейна–Уленбека с линейным сносом $-\eta$ соответственно, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная диффузией U_η до момента t.

Теперь последовательное применение формул (2.11) и (2.9) влечет (2.4), так как

$$\Delta_{2\eta}(x,z) - \eta(x-z) = \eta \int_z^x (2\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) - 1)\, dy = \eta(|x| - |z|),$$

и

$$-2\eta\gamma y \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) + \eta\gamma y = -\eta\gamma|y|. \qquad \square$$

Список литературы

1. И. В. Гирсанов, *О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры.* — Теория вероятн. и ее примен. **5**, вып. 2 (1960), 314–330.
2. A. N. Borodin, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2013.
3. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от скошенного броуновского движения с разрывным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501**, (2021), 36–51.
4. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы*, Санкт-Петербург, Лань, 2016.

Borodin A. N. Transformation of measure for diffusions with discontinuous drift.

We consider transformation of measure for diffusions with discontinuous drift analogous to the Girsanov transformation. For the drift it is possible to extract discontinuous component as a step function and derive the transformation of the measure of initial diffusion to the measure of diffusion with continuous drift. It is considered an application of the general result to the Ornstein–Uhlenbeck process with discontinuous drift.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 11 октября 2022 г.