Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

Я. И. Белопольская

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ КОШИ–РОБИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§1. Введение

Вероятностный подход к построению решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений, которые можно интерпретировать как системы нелинейных прямых уравнений Колмогорова, был развит в [1, 2]. В [1] была построена вероятностная модель решения $u(t,y) = (u_1(t,y),\dots,\ u_{d_1}(t,y))$ задачи Коши для системы нелинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2(B_m[y,u]u_m) - \operatorname{div}(a_m[y,u]u_m) + c_m[y,u]u_m,\\ &u_m(0,y) = u_{0m}(y),\end{aligned} \tag{1.1}$$

с коэффициентами, представляющими собой функционалы от решения при $c_m \equiv 0$, а в [2] при $c_m \neq 0$. Здесь и ниже используются обозначения

$$\operatorname{Tr}\nabla^2(B_m[y,u]u_m) = \sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(A_m^{ik}[y,u]A_m^{kj}[y,u]u_m\right),$$

$$B_m = A_m A_m^*, \quad A_m^{ik}[y,u] = \int\limits_{R^d}\left(\sum_{q=1}^{d_1} A_{mq}^{ik}(y-x)u_q(x)\right)dx.$$

Мы будем говорить, что построена вероятностная модель решения краевой задачи для нелинейного параболического уравнения или системы, если получено вероятностное представление этого решения в терминах некоторых случайных процессов, конструируемых как решения соответствующих стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Ключевые слова: стохастические модели, диффузионные процессы с отражением, задача Скорохода, обобщенные решения задачи Коши–Робина.

Работа поддержана грантом РНФ 22-21-00016. Финансирование осуществлялось (частично) из средств Научно-технологического университета “Сириус”.

Задачу построения диффузионного процесса с отражением называют задачей Скорохода, поскольку процессы с отражением были впервые построены в работе Скорохода [3], (см. также [4]).

В работах Шнитмана [5, 6] был построен нелинейный диффузионный процесс с отражением в полупространстве R^d_+ с границей $\{y : y^d = 0\}$, генератор которого совпадал с генератором диффузионного процесса, удовлетворяющего СДУ Маккина–Власова. [7, 8].

Напомним, что диффузионный процесс Маккина–Власова – это решение СДУ

$$d\xi_(s) = a[\xi(s), \mu(s)]ds + A_m(\xi_m(s), \mu(s)]dw(s), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

распределение $\mu(t, dy) = P\{\xi(t) \in dy)$ которого удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2(B[y, \mu]\mu) - \operatorname{div}(a[y, \mu]\mu), \tag{1.2}$$
$$\mu(0, dy) = \mu_0(dy)$$

для консервативного нелинейного параболического уравнения.

Важную роль в конструкции, предлагаемой в этой работе, играет альтернативный подход к построению диффузионного процесса с отражением в замкнутой ограниченной области $G \subset R^d$ с гладкой границей ∂G, предложенный в работе Андерсона и Ори [9]. Этот подход был использован также в работах Фрейдлина [10, 11] для построения вероятностной модели решения задачи Коши–Робина (третьей краевой задачи) для линейного параболического уравнения на d-мерном гладком многообразии с краем.

Еще одна важная составляющая подхода, развиваемого ниже, связана с идеями и результатами работы [12]. В этой работе для построения слабого решения задачи Коши для нелинейного неконсервативного скалярного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2(B[y, u]u) - \operatorname{div}(a[y, u]u) + c[y, u]u,$$
$$u(0, y) = u_0(y)$$

были предложены две эквивалентные стохастические модели.

В работе [2] мы построили аналогичные вероятностные модели решения задачи Коши для системы нелинейных неконсервативных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2(B_m[y, \rho * g]g_m) - \operatorname{div}(a_m[y, \rho * g]g_m) \tag{1.3}$$

$$+c_m[y, \rho * g]g_m, \quad g_m(0, y) = u_{0m}(y),$$

одна из которых удобна для доказательства существования и единственности искомых случайных процессов, а вторая позволяет установить связь между построенными случайными процессами и слабыми решениями задачи Коши–Неймана для рассматриваемой системы параболических уравнений.

Пусть $B_m[y, u] = A_m[y, u]A_m^*[y, u]$, $\Omega_m = C([0, T]; R^d)$ – пространство непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в R^d, $(\Omega_m, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство и $w_m(t) \in R^d$ – винеровский процесс, заданный на этом пространстве.

Первая модель имеет вид

$$\begin{gathered} d\xi_m(s) = a_m(\xi_m(s), v(s, \xi_m(s)))ds + A_m(\xi_m(s), v(s, \xi_m(s)))dw_m(s), \\ \xi_m(0) = \xi_{0m}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$v_m(t, y) = \mathbf{E}^{\gamma_m}\left[\rho(y - \xi_m(t)) \exp\left\{\int\limits_0^t c_m(\xi_m(s), v(s, \xi_m(s)))ds\right\}\right]. \tag{1.5}$$

Здесь ξ_{0m} – независимые случайные величины с заданным распределением $P(\xi_{0m} \in dy) = u_{m0}(y)dy$, процессы $w_m(t)$ независимы, ξ_{0m} и $w_m(t)$ независимы, а $\gamma_m = \mathcal{L}(\xi_m)$ – распределение канонического процесса $\xi_m(t)$ в пространстве $\Omega_m = C([0, T]; R^d)$.

Вторая модель имеет вид

$$\begin{gathered} d\xi_m(t) = a_m[\xi_m(t), \rho * \mu^{\gamma_m}]dt + A_m[\xi_m(t), \rho * \mu^{\gamma_m}]dw_m(t), \\ \xi_m(0) = \xi_{0m}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где меры $\mu^{\gamma_m}(t, dy)$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} &\int\limits_{R^d} \phi(y)\mu^{\gamma_m}(t, dy) \\ &\quad = \mathbf{E}^{\gamma_m}\left[\phi(\xi_m(t)) \exp\left\{\int_0^t c_m[\xi_m(s), \rho * \mu]ds\right\}\right], \end{aligned} \tag{1.7}$$

справедливыми для всех $\phi \in C_b(R^d)$ и $t \in [0, T]$. Здесь $\gamma_m = \mathcal{L}(\xi_m)$ – распределение канонического процесса $\xi_m(t)$, удовлетворяющего (1.6) в пространстве $\mathcal{C}^d_T$. Наконец, функции v_m вида (1.5) и g_m, удовлетворяющие (1.3), связаны между собой соотношениями

$$v_m(t,y) = [\rho * g_m](t,y) = \int\limits_{R^d} \rho(y-x) g_m(t,x)dx.$$

В работе [13] была построена вероятностная модель решения задачи Коши–Неймана для для одномерного скалярного параболического уравнения.

Цель этой работы – построить вероятностную модель решения задачи Коши–Робина для системы нелинейных неконсервативных параболических уравнений

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2(B_m[y,u]u_m) + \operatorname{div}(a_m[y,u]u) + c_m[y,u]u_m \tag{1.8}$$

в ограниченной области $G \subset R^d$ с гладкой границей ∂G и заданными начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u_m(0,y) = u_{0m}(y), \quad \text{если } y \in G, \text{ и} \\ &b_m[y,u]\nabla u_m(t,y)\cdot\alpha(y) + \beta_m[y,u]u_m(y) = 0, \text{ если } y \in \partial G. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Мы предполагаем, что единичный вектор конормали $\alpha(y)$ $y \in \partial G$ имеет непрерывные производные до порядка 3 и

$$b_m = \frac{1}{2}\|Bn\|, \quad \beta_m[y,u] = (a_m[y,u] - \frac{1}{2}\operatorname{div} B_m[y,u])\cdot n(y),$$

где n – единичный вектор внешней нормали.

Далее статья организована следующим образом. В §2 построены диффузионные процессы с отражением в области $G = R^d_+$. В §3 показано что построенные диффузионные процессы ассоциированы с задачей Коши–Неймана для (1.8). Кроме того, с использованием процедуры локализации, построена вероятностная модель задачи Коши–Робина (1.8), (1.9) в ограниченной области G с гладкой границей ∂G.

§2. Диффузия с отражением в полупространстве

В этом параграфе мы построим вероятностную модель задачи Коши–Неймана для системы неконсервативных уравнений вида (1.2) в области $G = R^d_+$ с границей $\partial G = \{y : y^d = 0\}$.

Обозначим $\mathcal{C}_T(X)$ множество непрерывных функций f на $[0,T]$ со значениями в $X \subset R^d$ с нормой супремума $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|$ и $\mathcal{C}_T(R^d) = \mathcal{C}_T^d$.

Пусть $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}_T^d)$ – пространство вероятностных мер на $\mathcal{C}_T^d$ с конечными моментами второго порядка. Соотношение

$$\mathcal{W}_2(\gamma,\gamma') = \inf_{\pi\in\Pi(\gamma,\gamma')} \left(\int\limits_{\mathcal{C}_T^d} \int\limits_{\mathcal{C}_T^d} \sup_{s\leqslant T} \|\xi(s,\omega) - \xi(s,\omega')\|^2 \pi(d\omega, d\omega') \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

определяет метрику Вассерштейна на пространстве $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}_T^d)$. Здесь γ, $\gamma' \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}_T^d)$, $\Pi(\gamma,\gamma')$ – множество вероятностных мер $\pi(dx,dx')$ на $\mathcal{C}_T^d \times \mathcal{C}_T^d$ таких, что $\pi(dx,\mathcal{C}_T^d) = \gamma(dx), \pi(\mathcal{C}_T^d, dy) = \gamma'(dy)$, $\gamma,\gamma' \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}_T^d)$. Для данного $t \in [0,T]$ определим проектор $\theta_t : \mathcal{C}_T^d \to R^d$ так, что $\theta_t(x) = x(t)$ и обозначим $\gamma_t \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}_T^d)$ маргинальное значение меры $\gamma \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}_T^d)$ в момент $t \in [0,T]$.

Обозначим BV_T множество функций $\kappa : [0,T] \to R^d$, имеющих конечную полную вариацию

$$|\kappa|(t) = \sup \sum_j \|\kappa(t_j) - \kappa(t_{j-1})\|,$$

где супремум берется по всем разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, и пусть $C_0^\infty(R^d)$ – множество вещественных бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями из R^d, $C^k(R^d)$ – множество k-раз дифференцируемых функций, заданных на R^d.

В работе [5] была исследована стохастическая задача Скорохода в полупространстве R_+^d. В этой работе было доказано существование пары непрерывных $\mathcal{F}_t$-адаптированных случайных процессов $(\xi(t), k(t)) \in R_+^d \times R^d$, удовлетворяющих СДУ с отражением

$$d\xi(s) = \int\limits_{R_+^d} a(\xi(s),y)\mu_s(dy)ds + \int\limits_{R_+^d} A(\xi(s),y)\mu_s(dy)dw(s) - dk(s), \tag{2.2}$$

$\xi(0) = \xi_0$,

$$|k|(t) = \int\limits_0^t I(\xi(s) \in \partial G)d|k|(s), \quad k(t) = \int\limits_0^t n(\xi(s))d|k|(s), \tag{2.3}$$

где $\mu_s(dy)$ – распределение процесса $\xi(s)$ и случайная величина $\xi_0 \in R^d_+$ не зависит от винеровского процесса $w(t) \in R^d$.

Для построения решения задачи Скорохода, связанной с системой (1.1) при $c_m \neq 0$, нам понадобится дополнительно альтернативная конструкция диффузионных процессов с отражением, предложенная в работе [9].

Выберем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, положив $\Omega = C_T(\bar{G}) \times C_T(R^d_+)$. Значения $\omega(t) = (\omega^1(t),\ \omega^2(t))$ элемента $\omega \in C_T(\bar{G}) \times C_T(R^d_+)$ в точке $t \in [0,T]$ обозначим $(\xi(t), k(t))$. В качестве $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ и $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}^1_t, \mathcal{F}^2_t)$ выберем минимальные σ-алгебры, порожденные множествами $\{(\xi(s), \kappa(s)) : 0 \leqslant s \leqslant T\}$ и $\{(\xi(s), \kappa(s)) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Обозначим через P – закон распределения $(\xi(\cdot), k(\cdot))$ на Ω и пусть $w(t) \in R^d$ – $\mathcal{F}_t$-измеримый винеровский процесс. Построим далее взаимно однозначное непрерывное отображение $\Gamma : C(R^d) \to C(R^d_+)$, позволяющее, с помощью соотношения $\xi(t) = \Gamma(\zeta(t))$, свести изучение процессов $(\xi(t), k(t))$ к изучению некоторого диффузионного процесса $\zeta(t)$ во всем пространстве R^d.

Другими словами, это означает, что при правильном выборе продолжения коэффициентов с области $\bar{G} \subset R^d$ на все пространство R^d изучение задачи Коши–Неймана для линейного параболического уравнения можно свести к изучению задачи Коши во всем пространстве [11].

Такой подход для нелинейного скалярного параболического уравнения в одномерном случае был реализован в нашей предыдущей работе [13], однако, для построения диффузионных процессов, ассоциированных с системой нелинейных уравнений в многомерном случае, потребовался дополнительный анализ.

Будем говорить, что выполнено условие **C2**, если:

1) $A^{ij}_m[x,v], a^j_m[x,v]$ – равномерно ограниченные вещественные функции, удовлетворяющие условию Липшица, т.е. существуют такие константы $K, L > 0$, что для всех $x, x_1 \in G, v, v_1 \in R^{d_1}$ и $i, j \in \{1, \dots, d\}$ справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
&|a^j_m[x,v]|^2 + |A^{ij}_m[x,v]|^2 \leqslant K,\\
&|a^j_m[x,v] - a^j_m[x_1,v_1]|^2 + |A^{ij}_m[x,v] - A^{ij}_m[x_1,v_1]|^2\\
&\qquad \leqslant L(\|x - x_1\|^2 + \|v - v_1\|^2) \quad x_1 \in G, \quad v_1 \in R;
\end{aligned}
$$

2) начальные условия $\xi_{0m} \in \bar{G} = G \cup \partial G$ – это независимые случайные величины с распределениями $u_{0m}(dy)$, не зависящие от $w_m(t)$;

3) существуют такие положительные константы L_c, K_c, что $|c_m[x,v)] \leqslant K_c$, $|c_m[x,v]-c_m[y,v_1]| \leqslant L_c[\|x-y\|+\|v-v_1\|]$; 4) функция $\rho : R^d \to R_+$ обладает свойствами

$$\rho \in C_0^\infty(\bar{G}), \quad \int\limits_{\bar{G}} \rho(y)dy = 1.$$

Мы сохраним термин стохастическая задача Скорохода, для задачи построения случайных процессов $\xi_m(t) \in G = R_+^d$, $\kappa_m(t) \in R_+^d$ и скалярных функций $v_m(t,y), \quad t \in [0,T], y \in \bar{G}$, удовлетворяющих стохастической системе

$$\begin{aligned} d\xi_m(t) &= a_m[\xi_m(t), v(t)]dt \\ &\quad + A_m[\xi_m(t), v(t)]dw_m(t) - dk_m(t), \xi_m(0) = \xi_{0m}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$|k_m|(t) = \int\limits_0^t I(\xi_m(s) \in \partial G)d|k_m|(s), \tag{2.5}$$

$$k_m(t) = \int\limits_0^t \alpha(\xi_m(s))d|k_m|(s),$$

$$v_m(t,y) = \mathbf{E}\left[\rho(y-\xi_m(t))\exp\left\{\int\limits_0^t c_m[\xi_m(s), v(s)]ds\right\}\right]. \tag{2.6}$$

Перепишем систему (2.6) в виде

$$\begin{aligned} v_m(t,y) = \int\limits_{\Omega_m} \Bigg[\rho(y-\xi_m(t,\omega)) \\ \times \exp\left\{\int\limits_0^t c_m[\xi_m(s,\omega), v(s)]ds\right\} P_m(d\omega)\Bigg], \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\Omega_m = \mathcal{C}^d \times \mathcal{C}_+^d$ и P_m – совместное распределение процессов $\xi_m(t)$, $k_m(t)$.

Зададим отображение $\Gamma : \mathcal{C}_T^d \to C_T(R_+^d)$ с помощью следующих соотношений:

$$\Gamma(\zeta_m) = \xi_m, \quad \text{где} \quad \xi_m^j(t) = \zeta_m^j(t), \;\; j = 1, \ldots, d-1,$$

и

$$\xi_m^d(t) = \zeta_m^d(t) - \inf_{0\leqslant s\leqslant t}(\zeta_m^d(s)\wedge 0).$$

Отображение $l_m : \mathcal{C}_T^d \to C_T(R)$ зададим соотношением

$$\Gamma(\zeta_m) - \zeta_m = (0,\dots,0,l_m(\zeta_m))$$

и обозначим $\Gamma(t,\zeta_m) = \xi_m(t) \in R_+^d$, $l_m(t,\zeta_m) = \Gamma(t,\zeta_m) - \zeta_m(t)$. При этом отображение $\Gamma(t,\zeta_m)$ удовлетворяет оценкам

$$\sup_{s\leqslant t}\|\Gamma(s,\zeta_m) - \Gamma(s,\hat\zeta_m)\| \leqslant 2\sup_{s\leqslant t}\|\zeta_m(s) - \hat\zeta_m(s)\|$$

и

$$\|\Gamma(t,\zeta_m) - \Gamma(s,\zeta_m)\| \leqslant \|\zeta_m(t) - \zeta_m(s)\|.$$

Рассмотрим далее стохастическую систему относительно процессов $\zeta_m(t) \in R^d$ и функций $\tilde v_m(t,z) \in R, t\in[0,T], z\in R^d$,

$$\zeta_m(t) = \zeta_{0m} + \int_0^t a_m[\Gamma(s,\zeta_m),v(s)]ds,$$

$$+\int_0^t A_m[\Gamma(s,\zeta_m),v(s)]dw_m(s), \tag{2.8}$$

$$\tilde v_m(t,z) = \mathbf{E}\left[\rho(\Gamma(z)-\Gamma(t,\zeta_m))\exp\left\{\int_0^t \tilde c_m[\Gamma(s,\zeta_m(s)),v(s)]ds\right\}\right], \tag{2.9}$$

где $\zeta_{0m} \in R^d$ – независимые случайные величины с распределениями $\mu_{0m}(dy)$, не зависящие от $w_m(t)$, $\tilde v_m(t,z) = v(t,\Gamma(z))$. Заметим, что, несмотря на то, что отображение $A_m^v(y) = A_m[y,v(y)]$ задано на R_+^d, отображение $\tilde A_m^v = A_m^v\circ\Gamma$ задано на R^d.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **C2**, *матрицы* A_m *невырождены и* $(\zeta_m(t),\tilde v_m(t,z))$ *– решение системы* (2.8), (2.9). *Положим*

$$\begin{aligned}\xi_m(t) &= \Gamma(t,\zeta_m),\\ |k_m|(t) &= l_m(t) = \Gamma^d(t,\zeta_m) - \zeta_m^d(t),\\ v_m(t,\xi_m(t)) &= \tilde v_m(t,\zeta_m).\end{aligned}$$

Тогда процессы $\xi_m(t), k_m(t)$ *и функции* $v_m(t,y)$, $m=1,\dots,d_1$ *удовлетворяют системе* (2.4)–(2.6) *и это решение единственно.*

Доказательство. По построению $\zeta_m(t)$ – непрерывные процессы с вероятностью 1. Если $(\zeta_m(t),\ \tilde v_m(t,z))$, $m=1,\dots d_1$ удовлетворяют (2.8), (2.9), то по построению $(\xi_m(t), k_m(t),\ v_m(t,y))$ удовлетворяют (2.4)–(2.6). Из определения процессов $k_m(t)$ следует, что процессы $k_m(t)$ не убывают и возрастают только на множествах

$$K_m=\{t>0:\xi_m(t)\in\partial G\}=\{x\in R^d:x^d=0\}.$$

Покажем, что эти множества имеют нулевую меру Лебега. Для этого достаточно показать, что множества $K_m^T=K_m\cap[0,T]$ имеют нулевую меру Лебега. Из определения процессов $\zeta_m(t)$ вытекает, что

$$K_m^T=\{t\in[0,T]:\zeta_m^d(t)=\inf_{s\leqslant t}(\zeta_m^d(s)\wedge 0).$$

Поскольку матрицы B_m^{ij} невырождены, то из теоремы Гирсанова следует, что мера, индуцированная процессом $\zeta_m^d(t)$ в пространстве $\mathcal{C}_T^d$ абсолютно непрерывна относительно меры, индуцированной в $\mathcal{C}_T^d$ процессом с нулевым сносом. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $a_m^d[y,v]=0$. В этом случае компоненту

$$\zeta_m^d(t)=\int\limits_0^t\sum_{j=1}^d A_m^{dj}[\Gamma(s,\zeta_m),v(s)]dw_m^j(t)$$

можно преобразовать в винеровский процесс $\bar w_m(t)$ с помощью невырожденного преобразования времени,

$$\zeta_m^d(t)=\bar w_m\Big(\int\limits_0^t B_m^{dd}[\Gamma(s,\zeta_m),v(s)]ds\Big),$$

а для винеровского процесса этот факт известен.

Для доказательства единственности предположим обратное, т.е. предположим, что существует две тройки

$$(\xi_m(t),k_m(t),v_m(t,y))\quad\text{и}\quad(\hat\xi_m(t),\hat k_m(t),\hat v_m(t,y)),$$

удовлетворяющие (2.4)–(2.6), и зададим

$$\zeta_m=(\zeta_m^1,\dots,\zeta_m^d),\quad \hat\zeta_m=(\hat\zeta_m^1,\dots,\hat\zeta_m^d)$$

соотношениями $\zeta_m^j=\xi_m^j, j=1,\dots d-1$, $\zeta_m^d=\xi_m^d-k_m(t)$ и $\hat\zeta_m^j=\hat\xi_m^j$, $j=1,\dots d-1$, $\hat\zeta_m^d=\hat\xi_m^d-\hat k_m$. Тогда $(\zeta_m,\tilde v_m)$ и $(\hat\zeta_m,\tilde u_m)$ удовлетворяют (2.8), (2.9) и, в силу единственности решения этой системы, $\zeta_m=\hat\zeta_m,\tilde v_m=\tilde u_m$. При этом $\xi^j=\xi_1^j, j=1,\dots,d_1$ и $\xi_m^d(t)+k_m(t)=$

$\hat{\xi}_m^d(t) + \hat{k}_m(t)$, откуда следует, что $\xi_m^d(t) - \hat{\xi}_m^d(t) = k_m(t) - \hat{k}_m(t) = 0$, поскольку правая часть может убывать только, если $\xi_m^d(t) = 0$, $\xi_m^d(t) \leqslant \hat{\xi}_m^d(t)$. Но $\xi_m^d(0) = \hat{\xi}_m^d(0)$ и эти процессы непрерывны, следовательно, $\xi_m^d(t) \leqslant \hat{\xi}_m^d(t)$ всегда. Аналогичные рассуждения показывают, что $\hat{\xi}_m^d(t) \leqslant \xi_m^d(t)$, откуда вытекает, что $\xi_m^d(t) = \hat{\xi}_m^d(t)$. Наконец, $v_m(t,y) = \hat{v}_m(t,y)$, если $\xi_m(t) = \hat{\xi}_m(t)$ и $k_m(t) = \hat{k}_m(t)$.

Существование решения системы (2.8), (2.9) при $d_1 = 1$ было доказано в работе [12]. Распространим подход, предложенный в [12] на случай $d_1 > 1$. Для простоты положим $d_1 = d > 1$.

Пусть $\Omega = \prod_{m=1}^{d_1} \Omega_m$, где $\Omega_m = \mathcal{C}^d$, $\zeta_m(t,\omega^m) = \omega^m(t)$, канонический процесс на Ω_m, $\mathcal{F}^m = \sigma\{\zeta_m(s) : 0 \leqslant s \leqslant T\}$ и $\mathcal{F}_t^m = \sigma\{\zeta_m(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

Обозначим

$$\tilde{Q}_m(t, \zeta_m(\omega^m), \beta(\omega^m)) = \exp\left\{ \int_0^t \tilde{c}_m[\zeta_m(s,\omega^m), \tilde{v}(s)]ds \right\}$$

и рассмотрим систему уравнений (2.8) и

$$\tilde{v}_m^\gamma(t,z) = \int_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z - \zeta_m(t)) \tilde{Q}_m(t, \zeta_m(\omega^m), \beta(\omega^m))) \gamma_m(d\omega^m), \tag{2.10}$$

где $z \in R^d$ и $\gamma_m(d\omega^m)$ – распределение процесса ζ_m. Пусть $\gamma = \prod_{m=1}^{d_1} \gamma_m$ – мера на Ω. □

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **C2**. *Для заданной вероятностной меры $\gamma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ существует единственное решение $(\zeta_m(t), \tilde{v}_m^\gamma(t,z))$ системы уравнений* (2.8), (2.10).

Доказательство. Обозначим $\mathcal{Z}^{d_1}$ линейное пространство непрерывных случайных процессов $\beta(t,\omega) \in R^{d_1}$, определенных на $[0,T] \times \mathcal{C}^d$ и удовлетворяющих оценке

$$\|\beta\|_{\infty,1} = \mathbf{E}^\gamma[\sup_{t\in[0,T]} \|\beta(t)\|] = \int_{\mathcal{C}^d} \sup_{t\in[0,T]} \|\beta(t,\omega)\| \gamma(d\omega) < \infty$$

и пусть $\mathcal{Z}^1 = C([0,T] \times \mathcal{C}^d; R)$.

Пространство $\mathcal{Z}^{d_1}$ – это банахово пространство с нормой $\|\beta\|_{\infty,1}$. Введем на этом пространстве эквивалентную норму $\|\beta\|_{\infty,1}^N$, $N \geqslant 0$, с помощью соотношения

$$\|\beta\|_{\infty,1}^{N} = \mathbf{E}^{\gamma}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt}\|\beta\|_{\infty,1}\right].$$

Пусть $\Phi^{\gamma} = (\Phi_1^{\gamma}, \ldots, \Phi_m^{\gamma}, \ldots, \Phi_{d_1}^{\gamma})$ – оператор, действующий из $\mathcal{Z}^{d_1}$ в $C([0,T]\times R^d; R^{d_1})$, заданный соотношением

$$\Phi^{\gamma}(\beta)(t,z) = \int\limits_{\Omega} \tilde{\rho}(z-\zeta(t,\omega))\tilde{Q}(t,\zeta(\omega),\beta(\omega))\gamma(d\omega), \tag{2.11}$$

если $\beta \in \mathcal{Z}^{d_1}$, компоненты $\Phi_m^{\gamma} : \mathcal{Z}^{d_1} \to C([0,T]\times R^d; R)$ которого удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_m^{\gamma}(\beta)(t,z) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z-\zeta_m(t,\omega))\tilde{Q}_m(t,\zeta_m(\omega),\beta(\omega))\gamma_m(d\omega). \tag{2.12}$$

Пусть

$$M : C([0,T]\times R^d; R^{d_1}) \to \mathcal{Z}^{d_1},$$

$$M(\tilde{v})(t,\omega) = \tilde{v}(t,\omega(t)) = (v_1(t,\omega_1(t)),\ldots,v_{d_1}(t,\omega_{d_1}(t))).$$

Заметим, что композиция $M\circ\Phi^{\gamma}$ действует в пространстве $\mathcal{Z}^{d_1}$ и (2.10) эквивалентно уравнению

$$\tilde{v} = (\Phi^{\gamma}\circ M)(\tilde{v}) \tag{2.13}$$

или системе

$$\tilde{v}_m = \Phi_m^{\gamma}\circ M_m(\tilde{v}), \quad m = 1,\ldots,d_1.$$

Предположим вначале, что отображение $M\circ\Phi^{\gamma}$ имеет единственную неподвижную точку $\beta \in \mathcal{C}_1^{d_1}$, так что $\beta = M\circ\Phi^{\gamma}(\beta)$. При этом $\beta_m = (M_m\circ\Phi_m^{\gamma})(\beta)$.

Для доказательства единственности решения уравнения (2.13) предположим обратное, т.е. предположим, что существует два решения $\tilde{v}$ и $\tilde{u}$ уравнения (2.13) так, что $\tilde{v}_m = (\Phi_m^{\gamma}\circ M_m)(\tilde{v})$ и $\tilde{u}_m = (\Phi_m^{\gamma}\circ M_m)(\tilde{u})$. Обозначим $\beta = M(\tilde{v})$ и $\beta^1 = M(\tilde{u})$. Поскольку $\tilde{v} = \Phi^{\gamma}(\beta)$, то $\beta = M(\tilde{v}) = M(\Phi^{\gamma}(\beta))$, и, аналогично, $\beta^1 = M(\tilde{u}) = M(\Phi^{\gamma}(\beta^1))$. Напомним, что β и β^1 – неподвижные точки отображения $M\circ\Phi^{\gamma}$, следовательно, $\beta = \beta^1$ почти всюду. Остается лишь проверить, что $M\circ\Phi^{\gamma}$ имеет единственную неподвижную точку.

Оценим разность $\Phi^\gamma(\beta) - \Phi^\gamma(\beta^1)$,

$$\|\Phi^\gamma(\beta) - \Phi^\gamma(\beta^1)\|(t,z) = \Big(\sum_{m=1}^{d_1} |\Phi^\gamma_m(\beta) - \Phi^\gamma_m(\beta^1)|^2(t,z)\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \Big(\sum_{m=1}^{d_1} \int\limits_{\Omega_m} \tilde{\rho}(z - \zeta_m(t,\omega))[\tilde{Q}_m(t,\zeta_m(\omega),\beta(\omega)\Big).$$
$$- \tilde{Q}_m(t,\zeta_m(\omega),\beta^1(\omega))]\gamma(d\omega)|\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $\eta_m(t) = \tilde{Q}_m(t,\zeta_m(\omega^m),\beta(\omega^m))$ удовлетворяет линейному уравнению

$$d\eta_m(t) = \tilde{c}_m(\zeta_m(t),\beta(t))\eta_m(t)dt, \quad \eta_m(0) = 1,$$

нетрудно проверить справедливость оценки

$$\int\limits_{\Omega_m} \tilde{\rho}(z - \zeta_m(t,\omega))[\tilde{Q}_m(t,\zeta_m(\omega),\beta(\omega)) - \tilde{Q}_m(t,\zeta_m(\omega),\beta^1(\omega))]\gamma_m(d\omega)$$
$$\leqslant K_\rho e^{tK_c} L_c \int\limits_{\mathcal{C}^d_T} \int\limits_0^t |\beta(s,\omega) - \beta^1(s,\omega)| ds \gamma_m(d\omega)$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c E \left[\int\limits_0^t e^{Ns} e^{-Ns} |\beta(s,\omega) - \beta^1(s,\omega)| ds\right]$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c E \left[\int\limits_0^t e^{Ns} \sup_{\tau\leqslant t} e^{-N\tau} |\beta(\tau,\omega) - \beta^1(\tau,\omega)| ds\right]$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c \frac{e^{Nt}-1}{N} \mathbf{E}\left[\sup_{\tau\leqslant t} e^{-N\tau} |\beta(\tau,\omega) - \beta^1(\tau,\omega)|\right]$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c \frac{e^{Nt}-1}{N} \|\beta - \beta^1\|^N_{\infty,1}.$$

По определению $(M \circ \Phi^\gamma)_m(t,\beta) = \Phi^\gamma_m(\beta)(t,\zeta_m(t))$, откуда в силу свойств функций ρ и c_m вытекает оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt}|(M \circ \Phi^\gamma)_m(t,\beta) - (M \circ \Phi^\gamma)_m(t,\beta^1)$$
$$= \sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt}|\Phi^\gamma(\beta)_m(t,\zeta_m(t)) - \Phi^\gamma(\beta^1)_m(t,\zeta_m(t))|$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_\rho \frac{1}{N}\|\beta - \beta_1\|^N_{\infty,1}.$$

Вычисляя математическое ожидание, получим оценку

$$\|(M \circ \Phi^\gamma)_m(\beta)(t) - (M \circ \Phi^\gamma)_m(\beta^1)(t)\|^N_{\infty,1} \leqslant K_\rho e^{TK_c} L_\rho \frac{1}{N}\|\beta - \beta^1\|^N_{\infty,1}.$$

Таким образом,

$$\|\Phi^\gamma(\beta) - \Phi^\gamma(\beta^1)\|(t,z) \leqslant \left(|\sum_{m=1}^{d_1} |\Phi^\gamma_m(\beta) - \Phi^\gamma_m(\beta^1)|^2(t,z)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant d_1 K_\rho e^{TK_c} L_\rho \frac{1}{N}\|\beta - \beta^1\|^N_{\infty,1},$$

откуда вытекает, что отображение $M \circ \Phi^\gamma$ является сжимающим отображением в пространстве $(\mathcal{Z}^{d_1}_1, \|\cdot\|^N_{\infty,1})$ для достаточно большого числа $N > d_1 K_\rho e^{TK_c} L_\rho$. Существование и единственность решения уравнения (2.13) при заданной мере $\gamma \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ вытекают из теоремы о сжимающих отображениях в банаховом пространстве.

Оценим далее зависимость от γ процесса ζ^γ и функции $\tilde{v}^\gamma(t,z)$, компоненты ζ^γ_m и $\tilde{v}^\gamma_m(t,z)$, которых удовлетворяют (2.8), (2.10).

Заметим, что, если $\tilde{v}^\gamma_m$ удовлетворяет (2.10), и $(\gamma_m, z) \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d) \times R^d$, то отображение $t \mapsto \tilde{v}^\gamma_m(t,z)$ непрерывно. При этом, в силу ограниченности c_m и липшицевости ρ, справедлива оценка

$$\sup_{(t,z)\in[0,T]\times R^d} |\tilde{v}^\gamma_m(t,z)| \leqslant K_\rho \exp(K_c T). \tag{2.14}$$

□

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие* **C2** *и* $v^\gamma = (v^\gamma_1, \dots, v^\gamma_{d_1})$ – *функция, компоненты* v^γ_m *которой удовлетворяют* (2.10). *Тогда для любой пары распределений* $(\gamma, \gamma^1) \in \mathcal{P}_2(\Omega) \times \mathcal{P}_2(\Omega)$ *и всех* $(t, z, z_1) \in [0,T] \times R^d \times R^d$ *справедливы оценки*

$$|\tilde{v}^\gamma_m(t,z) - \tilde{v}^{\gamma^1}_m(t,z_1)|^2 \leqslant C_{\rho,c}(T)[\|z - z_1\|^2 + \mathcal{W}^2_t(\gamma_m, \gamma^1_m)], \tag{2.15}$$

где $C_{\rho,c,d_1}(T)$ *– положительная константа.*

Доказательство. Пусть $(\gamma_m,\gamma_m^1)\in\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)\times\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$. Оценим разность

$$|\tilde v_m^\gamma(t,z)-\tilde v_m^{\gamma_1}(t,z_1)|^2 \leqslant 2|\tilde v_m^\gamma(t,z)-\tilde v_m^\gamma(t,z_1)|^2+|\tilde v_m^\gamma(t,z_1)-\tilde v_m^{\gamma_1}(t,z_1)|^2 =\alpha_1+\alpha_2. \tag{2.16}$$

Для оценки α_1 воспользуемся липшицевостью функции $\tilde\rho$ и ограниченностью экспонент $\tilde Q_m(t,\zeta_m,\beta)=e^{\int_0^t\tilde c_m[\zeta_m(s),\beta(s)]ds}$ с ограниченными показателями $\tilde c_m[z,\tilde v]$,

$$|\tilde v_m^\gamma(t,z)-\tilde v_m^\gamma(t,z_1)|^2=\left|\int_{\mathcal{C}^d}[\tilde\rho(z-\zeta_m(t,\omega))-\tilde\rho(z_1-\zeta_m(t,\omega))] \times\tilde Q_m(t,\zeta_m(\omega),\beta(\omega)))\gamma_m(d\omega)\right|^2\leqslant L_\rho e^{tK_c}\|z-z_1\|^2. \tag{2.17}$$

Для оценки α_2 заметим, что в силу неравенства Йенсена

$$\begin{aligned}\alpha_2&=|\tilde v_m^\gamma(t,z_1)-\tilde v_m^{\gamma_1}(t,z_1)|^2\\ &=\Big|\int_{\mathcal{C}^d}\tilde\rho(z_1-\zeta_m(t,\omega))\tilde Q_m(t,\zeta_m(\omega),\beta(\omega))\gamma_m(d\omega)\\ &\quad-\int_{\mathcal{C}^d}\tilde\rho(z_1-\zeta_m(t,\omega_1))\tilde Q_m(t,\zeta_m(\omega_1),\beta(\omega_1))\gamma_{m1}(d\omega_1)\Big|^2\\ &\leqslant\int_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\Big|\tilde\rho(z_1-\zeta_m(t,\omega))\tilde Q_m(t,\zeta_m(\omega),\beta(\omega))\\ &\quad-\tilde\rho(z_1-\zeta_m(t,\omega_1))\tilde Q_m(t,\zeta_m(\omega_1),\beta(\omega_1))\Big|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1),\end{aligned} \tag{2.18}$$

где π_m принадлежит множеству $\Pi(\gamma_m,\gamma_{m1})$, заданному в (2.1).

Пусть $\zeta,\zeta_1\in\mathcal{C}^d$ и $\beta,\beta_1\in\mathcal{Z}_1^{d_1}$. Тогда

$$\begin{aligned}&|\tilde\rho(z-\zeta_m(t))\tilde Q_m(t,\zeta_m,\beta)-\tilde\rho(z_1-\zeta_{m1}(t))\tilde Q_m(t,\zeta_{m1},\beta_1)|^2\\ &\leqslant 2|\tilde\rho(z-\zeta_m(t))-\tilde\rho(z_1-\zeta_{m1}(t))|^2|\tilde Q_m(t,\zeta_m,\beta)|^2\\ &+2|\tilde\rho(z_1-\zeta_{m1}(t))|^2|\tilde Q_m(t,\zeta_m,\beta)-\tilde Q_m(t,\zeta_{m1},\beta_1)|^2.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Обозначим $f = \int\limits_0^t \tilde{c}_m(\zeta_m(s), \beta(s))ds$, $g = \int\limits_0^t \tilde{c}_m(\zeta_{m1}(s), \beta_1(s))ds$ и воспользуемся оценкой

$$e^f - e^g = (f-g)\int\limits_0^1 e^{\theta f + (1-\theta)g} d\theta \leqslant e^{sup(f,g)}|f-g|, \;\; \forall f,g \in R,$$

чтобы вывести неравенство

$$\begin{aligned} &|\tilde{Q}_m(t,\zeta_m,\beta) - \tilde{Q}_m(t,\zeta_{m1},\beta_1)| \\ &\quad \leqslant e^{K_c t}\int\limits_0^t |\tilde{Q}_m(s,\zeta_m(s),\beta(s)) - \tilde{Q}_m(s,\zeta_{m1}(s),\beta_1(s))|ds \\ &\quad \leqslant e^{K_c t} L_c \int\limits_0^t [\|\zeta_m(s) - \zeta_{m1}(s)\| + |\beta(s) - \beta_1(s)|]ds. \qquad (2.20) \end{aligned}$$

Поскольку функция $\tilde{\rho}$ удовлетворяет условию Липшица, то, используя оценки (2.14) и (2.20), получим

$$\begin{aligned} &|\tilde{\rho}(z_1 - \zeta_m(t))\tilde{Q}_m(t,\zeta_m,\beta) - \tilde{\rho}(z_1 - \zeta_{m1}(t))\tilde{Q}_m(t,\zeta_{m1},\beta_1)|^2 \\ &\qquad \leqslant 2L_\rho^2 e^{2tK_c}\|\zeta_m(t) - \zeta_{m1}(t)\|^2 \\ &\quad + 4tK_\rho^2 L_c^2 e^{2tK_c}\int\limits_0^t [\|\zeta_m(s) - \zeta_{m1}(s)\|^2 + |\beta(s) - \beta_1(s)|^2]ds \\ &\leqslant C\left[(1+t)\sup_{s\leqslant t}\|\zeta_m(s) - \zeta_{m1}(s)\|^2 + \int\limits_0^t |\beta(s) - \beta_1(s)|^2 ds\right]. \qquad (2.21) \end{aligned}$$

Подставляя (2.21) в (2.18), получим оценку для α_2, откуда, с учетом оценки (2.17) для α_1 и (2.16), получим

$$\begin{aligned} &|\tilde{v}_m^\gamma(t,z) - \tilde{v}_m^{\gamma_1}(t,z_1)|^2 \\ &\leqslant 2C(t)\Bigg[\|z - z_1\|^2 + (1+t)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\zeta_m(s,\omega) - \zeta_m(s,\omega_1)\|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1) \end{aligned}$$

$$+\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\int\limits_0^t\sum_{q=1}^{d_1}|\tilde{v}_q^{\gamma}(s,\zeta_m(s,\omega))-\tilde{v}_q^{\gamma_1}(s,\zeta_m(s,\omega_1))|^2 ds\pi_m(d\omega,d\omega_1)\Bigg]. \quad (2.22)$$

Из (2.22) вытекает оценка

$$|\tilde{v}_m^{\gamma}(t,\zeta(t,\omega))-\tilde{v}_m^{\gamma_1}(t,\zeta(t,\omega_1))|^2$$
$$\leqslant 2C(t)\Bigg[\|\zeta_m(t,\omega)-\zeta_m(t,\omega_1)\|^2$$
$$+(1+t)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\zeta_m(s,\omega)-\zeta_m(s,\omega_1)\|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1)$$
$$+\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\int\limits_0^t\sum_{q=1}^{d_1}|\tilde{v}_q^{\gamma}(s,\zeta_m(s,\omega))-\tilde{v}_q^{\gamma_1}(s,\zeta_m(s,\omega_1))|^2 ds\pi_m(d\omega,d\omega_1)\Bigg]. \quad (2.23)$$

Пусть

$$\alpha(s)=\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_m||\tilde{v}_m^{\gamma}(s,\zeta_m(s,\omega))-\tilde{v}_m^{\gamma_1}(s,\zeta_m(s,\omega_1))\|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1).$$

Интегрируя соотношение (2.23) по мере π_m, получим

$$\alpha(t)\leqslant 2d_1C(t)\int\limits_0^t\alpha(s)ds$$
$$+2(t+2)C(t)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\in[0,t]}\|\zeta_m(s,\omega)-\zeta_m(s,\omega_1)\|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1),$$

откуда, в силу леммы Гроноулла, следует оценка

$$\alpha(t)=\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_m|\tilde{v}_m^{\gamma}(t,\zeta_m(t,\omega))-\tilde{v}_m^{\gamma_1}(t,\zeta_m(t,\omega_1))|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1)$$
$$\leqslant 2C(t)(t+2)e^{2td_1C(t)}\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|\zeta_m(s,\omega)-\zeta_m(s,\omega_1)\|^2\pi_m(d\omega,d\omega_1).$$

С учетом последнего неравенства из (2.21) вытекает оценка

$$
|\tilde{v}_m^{\gamma}(t,z) - \tilde{v}_m^{\gamma_1}(t,z_1)|^2 \leqslant 2C(t)\Bigg[\|z - z_1\|^2
$$

$$
+ K(t) \int\limits_{\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|\zeta_m(s,\omega) - \zeta_m(s,\omega_1)\|^2 \pi_m(d\omega, d\omega_1)\Bigg],
$$

где $K(t) = 1 + t + (t+2)e^{2td_1C(t)}$. Заметим, что эта оценка справедлива для любой меры $\pi_m \in \Pi(\gamma_m, \gamma_{m1})$, откуда вытекает, что, вычисляя инфимум по $\pi_m \in \Pi(\gamma_m, \gamma_{m1})$, мы получим требуемую оценку (2.15). $\square$

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие* **C2**. *Тогда существует единственное решение* $\zeta^{\gamma}(t), \tilde{v}^{\gamma}(t,z)$ *системы* (2.8), (2.9).

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что

$$
\tilde{v}^{\gamma}(t,z) = (v_1^{\gamma}(t,z), \ldots, v_{d_1}^{\gamma}(t,z))
$$

– липшицева функция, откуда вытекает, что существует единственное сильное решение $\zeta^{\gamma}(t) = (\zeta_1^{\gamma}(t), \ldots, \zeta_{d_1}^{\gamma}(t))$ системы (2.8). Используя неравенства Буркхольдера и Йенсена, нетрудно проверить, что существует такая константа C, зависящая от d_1 и констант в оценках условия **C2**, что

$$
\mathbf{E}[\sup_{t \leqslant T} \|\zeta^{\gamma}(t)\|^2] \leqslant C[1 + E\|\zeta_0\|^2].
$$

Отсюда следует, что распределение $\mathcal{L}(\zeta)$ процесса $\zeta^{\gamma}(t)$ принадлежит $\mathcal{P}_2(\Omega)$. Рассмотрим отображение $\mathcal{K} : \mathcal{P}_2(\Omega) \to \mathcal{P}_2(\Omega)$, заданное соотношением $\mathcal{K}(\gamma) = \mathcal{L}(\zeta^{\gamma})$, и покажем, что оно является сжимающим отображением в $\mathcal{P}_2(\Omega)$.

Пусть $\gamma, \gamma_1 \in \mathcal{P}_2(\Omega)$, а $\tilde{v}^{\gamma}, \tilde{v}^{\gamma_1}$ – решения системы (2.8), соответствующие γ и γ_1. Из определения метрики Вассерштейна следует, что

$$
\mathcal{W}_T^2(\mathcal{K}(\gamma), \mathcal{K}(\gamma_1)) \leqslant \mathbf{E}[\sup_{t \leqslant T} \|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2]. \tag{2.24}
$$

Используя оценки (2.15) и (2.24), покажем, что для любого $\tau \in [0, T]$ справедлива оценка

$$E[\sup_{t\leqslant\tau} \|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2] \leqslant \left[\int_0^\tau E[\sup_{s\leqslant t} \|\zeta(s) - \zeta_1(s)\|^2] dt + \int_0^\tau \mathcal{W}_t^2(\gamma, \gamma_1) dt\right] \quad (2.25)$$

с константой C, зависящей от d_1 и констант в условии **C 2**. Применяя лемму Гронуолла, получим

$$E\big[\sup_{t\leqslant\tau} \|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2\big] \leqslant Ce^{CT} \int_0^\tau \mathcal{W}_s^2(\gamma, \gamma_1) ds. \quad (2.26)$$

Из (2.24) и (2.25), (2.26) следует, что

$$\mathcal{W}_\tau^2(\gamma, \gamma_1) \leqslant Ce^{CT} \int_0^\tau \mathcal{W}_s^2(\gamma, \gamma_1) ds. \quad (2.27)$$

Итерируя оценку (2.27), стандартным образом можно проверить, что отображение $\mathcal{K}$ является сжимающим, что завершает доказательство теоремы. □

§3. Диффузионные процессы с отражением и вероятностное представление решения задачи Коши–Неймана

Для того, чтобы построить диффузионный процесс $\xi(t)$ с отражением по направлению векторного поля $\alpha(x)$ в замкнутой области $\bar{G}$, воспользуемся процедурой локализации. Мы предполагаем, что $G \subset R^d$ – связное открытое подмножество R^d и $\bar{G}$ – его замыкание, имеющее гладкую границу ∂G.

В окрестности каждой точки $x \in \partial G$ существует окрестность $U(x)$, для которой в соответствующей системе координат векторы $\alpha(y)$ имеют вид $(0, \dots, 0, -1)$ для $y \in \partial G \cap U(x)$, граница в этих координатах задается уравнением $x_d = 0$ и $G \cap U(x) \subset \{x^d > 0\}$. Границу ∂G можно накрыть набором таких окрестностей. При некоторых дополнительных условиях это позволит построить локализацию рассматриваемой задачи, т. е. свести решению ряда задач в полупространстве и, как следствие, получить решение рассматриваемой задачи.

Обозначим $(e_1, \ldots, e_d)$ ортонорированную систему в R^d, задающую евклидову координатную систему с координатами $x=(x_1, \ldots, x_d)$. Пусть $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \ldots, U_n)$ – семейство открытых подмножеств в $\bar{G}$ таких, что $\bar{G} = \cup_{q=0}^{N} U_q$ и для каждого из множеств $U_q \in \mathcal{U}$ задано отображение $\phi_q : U_q \to R^d$, сопоставляющее точке $y \in U_q$ ее координаты $\phi_q(y) = (\phi_q^1(y), \ldots, \phi_q^d(y))$.

Мы будем говорить, что выполнено условие **C 3**, если:

а) координатная система, соответствующая $U_0 \subset G$, совпадает с заданной координатной системой в R^d и для окрестности $U_q \in \mathcal{U}, q \geqslant 1$ координатное отображение $\phi_q : U_q \to R^d$ взаимно однозначно и дважды дифференцируемо. Пересечение U_q и ∂G не пусто и

$$U_q \cap \partial G = \{y \in U_q : \phi_q^d(y) = 0\},\ U_q \cap G = \{y \in U_q : \phi_q^d(y) > 0\}.$$

б) Существует положительная константа r_0 и для каждой точки $y \in U_q$ существует такое неотрицательное целое число $r(y) \in \{1, \ldots, N\}$, что все такие точки $z \in G$, что $\|z - y\| \leqslant r_0$, принадлежат $U_{r(y)}$.

При этом в окрестности каждой точки $x \in \partial G$ существует такая окрестность $U_q(x) \in \mathcal{U}$ и соответствующая ей координатная система, в которой векторы $\alpha(y), y \in \partial G \cap U(x)$ имеют вид $(0, \ldots, 0, -1)$, граница ∂G задается уравнением $x_d = 0$ и $G \cap U_q(x) \subset \{x_d > 0\}$.

Пусть искомый процесс $\xi_{\xi_0}(t)$ стартует из точки $\xi_0 \in G$, и удовлетворяет системе вида

$$\xi_m^0(t) = \xi_{0m} + \int_0^t a_m[\xi_m^0(s), v^0(s)]ds + \int_0^t A_m[\xi_m^0(s), v^0(s)]dw_m(s), \quad (3.1)$$

$$v_m^0(t, y) = E\left[\rho(y - \xi_m^0(t)) \exp\left\{\int_0^t c_m[\xi_m^0(s), v^0(s)]ds\right\}\right], \quad (3.2)$$

записанной в заданной системе координат пространства R^d. Существование и единственность решения системы (3.1), (3.2) в рассматриваемых условиях вытекают из результатов работы [2]. Процесс $\xi_{\xi_0}(t)$ определим как решение (3.1), (3.2) до момента τ_1 попадания в множество $G \cap U_{r(\xi_0)}$, т.е. $\xi_{\xi_0}(t) = \xi_{\xi_0}^0(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant \tau_1$.

Пусть $\xi_m^1(\tau_1) = \xi_m^0(\tau_1) \in G \cap U_j, j = 1, \dots, n$. Построим новые случайные процессы $\xi_m^1(t) = \phi_j(\xi_m^1(t)) \in \phi_j(U_j)$, удовлетворяющие до момента τ_2 попадания в множество $G \cap U_{r(x_m^1)}$ системе вида

$$\xi_m^1(t)+k_m^1(t)=\xi_m^1+\int_0^t a_m[\xi_m^1(s), v^1(s)]ds+\int_0^t A_m[\xi_m^1(s), v^1(s)]dw_m(s), \tag{3.3}$$

$$|k_m^1|(t) = \int_0^t I(\xi_m^1(s) \in \partial G)d|k_m^1|(s),$$

$$k_m^1(t) = \int_0^t \alpha(\xi_m^1(s))d|k_m^1|(s), \tag{3.4}$$

$$v_m^1(t,y) = E\left[\rho(y-\xi_m^1(t)) \exp\left\{\int_0^t c_m[\xi_m^1(s), v^1(s)]ds\right\}\right], \tag{3.5}$$

где $\xi_m^1 = \xi_m^0(\tau_0)$. Таким образом, случайный процесс $\xi_m^1(t)$ стартует из точки $x_m^1 = \xi_m^0(\tau_1) \in U_j, j = r(\xi_m^1(\tau_1))$ и определен до момента τ_2 выхода из окрестности радиуса r_0 точки x_m^1. Далее мы построим процесс $\xi_m^2(t)$, стартующий из точки $x_m^2 = \xi_m^1(\tau_2) \in U_j$ и удовлетворяющий системе (3.3)–(3.5) до момента τ_3 выхода процесса $\xi_m^2(t) = (\phi_j)^{-1}(\xi_m^{\phi^j}(t))$ из окрестности радиуса r_0 точки x_m^2, $\tau_2 \leqslant t < \tau_3$. Продолжая эту процедуру мы построим интересующий нас процесс, задав его соотношениями $\xi_m^n(t) = (\phi_j)^{-1}(\xi_m^{n-1}(t))$, если $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$.

Реализуя эту процедуру, мы получим, что, если $r(x) = 0$, то граница не играет роли, и процессы $\xi_m(t)$ можно построить так, как это описано в работе [13]. Если $r(x) = q \in \{1, \dots, n\}$, то координатное отображение ϕ_q ассоциированное с U_q, отображает рассматриваемую задачу в соответствующую задачу в полупространстве с нормальным отражением, рассмотренную в предыдущем параграфе. В результате в локальных координатах ϕ_q мы получим диффузионный процесс с отражением вдоль нормали в полупространстве R_+^d . Применяя отображение обратное к ϕ_q, мы определим процесс $\xi_m(t)$ на интервале

$0 \leqslant t < \tau_1$, где τ_1 – момент первого выхода процесс $\xi_m(t)$ из окрестности радиуса r_0 точки $x^0(\tau_0)$. Этот процесс будет удовлетворять системе (3.1) –(3.3), где $|k_m|(t)$ – локальное время, проведенное процессом $\xi_m(t)$ на границе. Повторяя эту процедуру, мы зададим процессы $\xi_m(t)$ на всем интервале $[0,T]$ соотношениями $\xi_m(t) = \xi_m^\theta(t)$, $k_m(t) = k_m^\theta(t), v_m(t,y) = v_m^\theta(t,y)$, если $\tau_\theta \leqslant t \leqslant \tau_{\theta+1} \leqslant T, \theta = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что такой выбор $\mathcal{U}$ позволяет, по крайней мере локально, свести решение рассматриваемой задачи к построению процесса в полупространстве с отражением в направлении $n(y) = -e_d$.

При переходе от координатной системы (U_q, ϕ_q) к координатной системе $(U_r, \phi_r), q, r = 1, \ldots, n$ коэффициенты A_m, a_m в уравнении (3.1) при $x \in U_q \cap U_r$ преобразуются по следующему правилу

$$
\begin{aligned}
(B_m^{ij})^{\phi_r}(x^{\phi_r}) &= \sum_{k,l} (B_m^{kl})^{\phi_q}(x^{\phi_q}) \frac{\partial x_i^{\phi_r}}{\partial x_k^{\phi_q}} \frac{\partial x_j^{\phi_r}}{\partial x_l^{\phi_q}}, \\
(a_m^i)^{\phi_r}(x^{\phi_r}) &= \sum_{k,l} (B_m^{kl})_{kl}^{\phi_q}(x_i^{\phi_q}) \frac{\partial^2 x_i^{\phi_r}}{\partial x_l^{\phi_q} \partial x_k^{\phi_q}} + \sum_k a_m^k(x^{\phi_q}) \frac{\partial x_i^{\phi_r}}{\partial x_k^{\phi_q}},
\end{aligned}
$$

и, в силу свойств координатных отображений, остаются гладкими и ограниченными.

Как следует из результатов работы [2] это гарантирует существование и единственность решения системы вида (3.3)–(3.5) в любой окрестности U_q. При этом $\xi_m(t)$ - строго марковские процессы с генераторами вида

$$
\mathcal{A}_m(u) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} B_m[y,u] \nabla^2 + a_m[y,u] \cdot \nabla.
$$

Используя описанную выше конструкцию, мы установим следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* **С3**. *Тогда существует единственное решение* $(\xi_m(t), k_m(t), u_m(t,y))$ *системы* (3.3)–(3.5) *в ограниченной области* G *с границей* ∂G.

Доказательство. Существование и единственность требуемого процесса вытекает из существования единственного локального решения системы (3.3)–(3.5) и описанной выше процедуры продолжения.

Установим связь между решением системы (3.3)–(3.5) и решением задачи Коши–Неймана в области G

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_m(t,y)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2[(B_m[y,\rho * u(t)]u_m(t,y)] \\ &\quad + \nabla\cdot(a_m[y,\rho * u(t)]u_m) + c_m[y,\rho * u(t)]u_m(t,y), \\ u_m(0,y) &= u_{0m}(y), y\in G, \qquad (3.6)\\ b_m[y,u(t)]\nabla u_m(t,y)\cdot\alpha(y) &+ \beta_m[y,u]u_m(t,y) = 0, y\in\partial G, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

где α – поле конормалей и $\beta_m[y,u] = (a_m[y,u] - \frac{1}{2}\operatorname{div} B_m[y,u])\cdot n(y)$.

Векторное поле $\alpha = (\alpha^1,\dots,\alpha^d)$ называют конормальным, если $\alpha^k = -\frac{1}{M}\sum\limits_{j=1}^{d} B^{kj}n_j$, где $n(y)$ внешняя нормаль к границе и M - нормирующая константа. Известно, что конормаль обладает замечательным свойством: для $k\neq d$ компоненты B^{dk} обращаются в 0 в координатной системе, в которой ось e_d направлена вдоль конормали, а $e_1,\dots,e_{d-1}$ лежат в гиперплоскости, касательной к ∂G в точке $y\in\partial G$.

Покажем, вначале, что функции $f\in C^2(R^d)$, для которых справедливо соотношение $\nabla f\cdot n|_{x\in\partial G}\neq 0$, не принадлежат области определения генераторов $\mathcal{A}_m(u)$. Применяя формулу Ито и стандартные оценки, не трудно оценить разность

$$\begin{aligned}&\big|\mathbf{E}[f(\xi_m(t)) - f(x)]\big| \\ &\quad = \Big|\mathbf{E}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\Delta_i\xi_m(t)\Delta_j\xi_m(t) + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Delta_i\xi_m(t)\Big]\Big| \\ &\quad = \Big|\frac{\partial f(x)}{\partial x_d}E\Delta_d\xi_m(t)\Big| + O(t).\end{aligned}$$

Здесь $\Delta_i\xi_m(t) = \xi_m^i(t) - \xi_m^i(0)$. По построению процесса $\xi_m(t)$

$$|\Delta_d\xi_m(t)| = \Big|\int_0^t\sum_{j=1}^{d}A_m^{dj}[\xi_m(\tau),u(\tau)]dw_m^j(\tau) + \int_0^t a_m^d[\xi_m(\tau),u(\tau)]d\tau\Big|,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}|\Delta_d \xi_m(t)| = \mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t \sum_{j=1}^d A^{dj}[x, u(\tau)]dw_m^j(\tau)$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{j=1}^d \Big(A_m^{dj}[\xi_m(\tau), u(\tau)] - A_m^{dj}[x, u(\tau)]\Big)dw_m^j(\tau)\Big| + O(t)$$

$$\geqslant \mathbf{E}\Bigg|\int\limits_0^t \sum_{j=1}^d A_m^{dj}[x, u(\tau)]dw_m^j(\tau)\Bigg| - \Bigg|\int\limits_0^t \sum_{j=1}^d \Big(A_m^{dj}[\xi_m(\tau), u(\tau)]$$

$$- A_m^{dj}[x, u(\tau)]\Big)dw_m^j(\tau)\Bigg| + O(t) \geqslant A_m\sqrt{t} + O(t),$$

поскольку

$$\mathbf{E}\Bigg|\int\limits_0^t \sum_{j=1}^d A_m^{dj}[\xi_m(\tau), u(\tau)] - A_m^{dj}[x, u(\tau)]dw_m^j(\tau)\Bigg|$$

$$\leqslant L\sqrt{\int\limits_0^t \mathbf{E}\|\xi_m(\tau) - x\|^2 d\tau} \leqslant LK\sqrt{\int\limits_0^t \tau d\tau} + O(t).$$

Из полученных оценок следует, что не существует ограниченного предела

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{E}f(\xi_m(t)) - f(x)}{t}$$

и, следовательно, функция $f \in C^2(R^d)$, для которой

$$\nabla f \cdot n|_{x\in\partial G} \neq 0$$

не принадлежит области определения производящего оператора $\mathcal{A}_m$ процесса $\xi_m(t)$.

Далее нам понадобится ряд дополнительных обозначений. Пусть $H^k(G)$, $H^{-k}(G)$ - пространство, двойственное к $H^k(G)$. Пространства векторнозначных функций будем обозначать соответственно $H^k(G, R^{d_1})$, $H_0^k(G; R^{d_1})$, $H^{-k}(G, R^{d_1})$ и использовать обозначения

$$\langle \phi, u\rangle = \int\limits_G \phi(y)\cdot u(y)dy, \forall \phi \in H^k(G; R^{d_1}), u \in H^{-k}(G; R^{d_1}).$$

Обозначим $\mathcal{S}(R^d)$ – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций и $\mathcal{S}'(R^d)$ – двойственное пространство обобщенных функций.

Функцию $u(y) = (u_1(y), \ldots, u_{d_1}(y))$ называют слабым решением задачи Коши–Неймана (3.6), (3.7), если для любой функции $\phi \in C_0^2(G; R^{d_1})$ справедливо интегральное тождество

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle \phi, u(s)\rangle + \frac{1}{2}\langle A[y, \rho * u(s)]\nabla\phi, A[y, \rho * u(s)]\nabla u(s)\rangle \\ + \langle \nabla\phi, a[y, \rho * u(s)]u(s)\rangle + \langle c^*(y, \rho * u)\phi, u(s)\rangle = 0.$$

Меру $\mu(dy) = (\mu_1(dy), \ldots, \mu_{d_1}(dy))$, где $\mu_m(dy) = u_m(y)dy$, $\mu_m \in \mathcal{P}_2(G)$, $m = 1, \ldots d_1$,) называют слабым решением задачи Коши–Робина (3.6) с условиями

$$\mu_m(0, dy) = \mu_{0m}(dy), \;\; y \in G, \quad \nabla\mu_m \cdot n = 0, \;\; y \in \partial G, \tag{3.8}$$

если для любой функции $\phi \in C_0^2(G; R^{d_1})$ справедливо интегральное тождество

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle \phi, \mu(s)\rangle + \frac{1}{2}\langle A[y, \rho * \mu(s)]\nabla\phi, A[y, \rho * \mu(s)]\nabla \mu(s)\rangle \\ + \langle \nabla\phi, a[y, \rho * \mu(s)]\mu(s)\rangle - \langle c^*(y, \rho * \mu)\phi, \mu(s)\rangle = 0.$$

Как и в предыдущем параграфе, мы сначала положим $G = R^d_+$, $\partial G = \{y \in R^d : y_d = 0\}$, $n(y) = (0, \ldots, 0, -1)$ и будем считать, что коэффициенты $A_m[y, v]$, $a_m[y, v]$, $c_m[y, v]$ в (3.1) ограничены и дифференцируемы вплоть до границы.

Рассмотрим стохастическую задачу с отражением в полупространстве

$$\xi_m(t) + k_m(t) = \xi_{0m} + \int_0^t a_m(\xi_m(s), \rho * u)ds + \int_0^t A_m(\xi_m(s), \rho * u)dw_m(s), \tag{3.9}$$

$$|k_m|(t) = \int_0^t I(\xi_m(s) \in \partial G)d|k_m|(s), \tag{3.10}$$

$$k_m(t) = \int_0^t n(\xi_m(s))d|k_m|(s). \tag{3.11}$$

$$u_m(t,y) = \mathbf{E}\left[\rho(y-\xi_m(t))\exp\left\{\int\limits_0^t c_m(\xi_m(s),\rho*u)ds\right\}\right]. \tag{3.12}$$

Здесь $P(\zeta_{0m}\in dy)=\mu_{0m}(dy)$ и ζ_{0m} – независимые случайные величины, не зависящие от $w_m(t)$.

Воспользовавшись отображением $\Gamma : \mathcal{C}^d_T \to C_T(R^d_+)$, введенным в предыдущем параграфе, перейдем от рассмотрения системы, описывающей процессы $\xi_m(t), k_m(t)$ и функции $u_m(t,y)$ в полупространстве R^d_+ к системе

$$\zeta_m(t) = \zeta_{0m} + \int\limits_0^t a_m(\xi_m(s),\rho*u)ds + \int\limits_0^t \tilde{A}_m(\Gamma(t,\zeta),\tilde\rho*u)dw_m(t), \tag{3.13}$$

$$\tilde{u}_m(t,z) = \mathbf{E}\left[\rho(z-\zeta_m(t))\exp\left\{\int\limits_0^t \tilde{c}_m[\zeta_m(s),\tilde\rho*u]ds\right\}\right], \tag{3.14}$$

описывающей диффузионный процесс $\zeta_m(t)\in R^d$ и функцию $\tilde{u}_m(t,z)$, $z\in R^d$. Из условий **C3** и свойств функции $\tilde{u}_m(t,z)$, установленных в §2, вытекает, что $\tilde{a}_m(z,\rho*u)$, $\tilde{A}_m(z,\rho*u)$ и $\tilde{c}_m(z,\rho*u)$ – ограниченные липшицевы функции и существует такая константа C, что справедливы оценки

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|f_m(\Gamma_s(\zeta),\tilde\rho*u)-f_m(\Gamma_s(\zeta'),\tilde\rho*u)\|\leqslant C\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|\zeta_m(s)-\zeta'_m(s)\| \tag{3.15}$$

для $f_m=\tilde{a}_m,\tilde{A}_m,\tilde{c}_m$.

При этих условиях из теоремы 2.1 следует, что решение ($\zeta_m(t)\in R^d$, $\tilde{u}_m(t,z)\in R$) системы (3.13), (3.14) существует, единственно с вероятностью 1, процессы $\zeta_m(t)$ обладают марковским свойством, а функции $\tilde{u}_m(t,z)$ ограничены и липшицевы. При этом процессы

$$\xi_m(t)=\Gamma(t,\zeta_m),\quad k_m(t)=\eta(t,\zeta_m),$$

и функции $u_m(t,y)=u_m(t,\Gamma(z))=\tilde{u}_m(t,z)$ удовлетворяют системе (3.9)–(3.12).

Пусть $G=R^d_+$. Для того, чтобы установить связь между стохастической системой (3.9)–(3.12) и задачей Коши–Неймана (3.6), (3.7), перепишем систему (3.13)–(3.14) в виде

$$\zeta_m(t) = \zeta_{0m} + \int_0^t \tilde{a}_m[\zeta_m(s), \rho * u]ds + \int_0^t \tilde{A}[\zeta_m(s), \rho * u]dw_m(s), \quad (3.16)$$

$$\tilde{u}^{\gamma_m}(t,z) = \int_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z - \zeta_m(t))e^{\int_0^t \tilde{c}_m[\zeta_m(s), \rho * \tilde{u}^{\gamma_m}]ds} \gamma_m(d\omega), \quad (3.17)$$

где $\gamma_m = \mathcal{L}(\zeta_m(t))$ распределение процесса ζ_m и $P(\zeta_{0m} \in dz) = \mu_{0m}(dz)$.

Наряду с этим рассмотрим вспомогательную стохастическую систему

$$d\zeta_m(s) = \tilde{a}_m[\zeta_m(s), \tilde{\rho} * \mu]ds + \tilde{A}_m[\zeta_m(s), \tilde{\rho} * \mu]dw_m(s), \quad (3.18)$$

$$\zeta_m(0) = \zeta_{0m}, \quad \mathbf{P}\{\zeta_{0m} \in dz) = \mu_{0m}(dz),$$

$$\int_{R^d} h(z)\mu^{\gamma_m}(t, dz) = \mathbf{E}\left[h(\zeta_m(t)) \exp\left\{\int_0^t \tilde{c}_m[\zeta_m(s), \tilde{\rho} * \mu]ds\right\}\right]$$
$$= \int_{\mathcal{C}^d} h(\zeta_m(t,\omega))\tilde{Q}_m(t, \zeta_m(\omega), \rho * \mu)\gamma_m(d\omega) \quad (3.19)$$

$\forall h \in \mathcal{S}(R^d)$.

Сопоставляя характеристические функции процессов, удовлетворяющих СДУ (3.16) и (3.18), покажем, что справедливо следующее утверждение. □

Теорема 3.2. *Пусть задано решение* $(\zeta_m, \mu^{\gamma_m})$ *системы* (3.18), (3.19), *тогда пара* $(\zeta_m, \tilde{u}^{\gamma_m})$, *где* $\tilde{u}^{\gamma_m} = \rho * \gamma_m$ *удовлетворяет* (3.16), (3.17). *Верно и обратное утверждение. Если пара* $(\zeta_m, \tilde{u}^{\gamma_m})$ *удовлетворяет* (3.16), (3.17), *то существует мера* μ^{γ_m} *такая, что пара* $(\zeta_m, \mu^{\gamma_m})$ *удовлетворяет* (3.18), (3.19).

Если, кроме того, мера Лебега измеримого множества $\{z \in R^d : F(\rho)(z) = 0\}$ *равна нулю, то системы* (3.16), (3.17) *и* (3.18), (3.19) *эквивалентны.*

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0, T]$ и пусть (ζ, v^γ) удовлетворяют (3.16), (3.17). Обозначим $F : f \in \mathcal{S}(R^d) \mapsto F(f) \in \mathcal{S}(R^d)$ преобразование Фурье на пространстве Шварца,

$$F(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int\limits_{R^d} f(y) e^{-i\lambda\cdot y} dy.$$

Поскольку $\rho \in L^1(R^d)$, то преобразование Фурье функции $\tilde{u}^\gamma$, заданной соотношением (3.19) имеет вид

$$F(\tilde{u}^{\gamma_m})(\lambda) = F(\rho) \int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} \tilde{Q}_m(t, \zeta(\omega), \tilde{u}^{\gamma_m}(\zeta_m(\omega)))\gamma_m(d\omega). \quad (3.20)$$

В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости функция $g^{\gamma_m}(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} \tilde{Q}_m(t, \zeta_m(\omega), \tilde{u}^{\gamma_m}(\zeta_m(\omega)))\gamma_m(d\omega)$ непрерывна и ограничена, поскольку $\tilde{Q}_m$ ограничена. Кроме того $g^{\gamma_m}(\lambda)$ неотрицательно определена, поскольку для последовательности комплексных чисел $b_k, k = 1, \ldots, d$ и последовательности $y_k \in R^d, k = 1, \ldots, d$ и всех $z \in R^d$ справедливо равенство

$$\sum_{k,j=1}^{d} b_k \bar{b}_j e^{-i\lambda\cdot(y_k - y_j)} = \left(\sum_{k=1}^{d} b_k e^{-i\lambda\cdot y_k}\right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{d} b_j e^{-i\lambda\cdot y_j}\right)}$$
$$= \Big|\sum_{k=1}^{d} b_k e^{-i\lambda\cdot y_k}\Big|^2.$$

Отсюда, в силу теоремы Бохнера, следует, что существует такая конечная неотрицательная борелевская мера $\mu^{\gamma_m}(t, dy)$ на R^d, что

$$g^{\gamma_m}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int\limits_{R^d} e^{-i\lambda\cdot y} \mu^{\gamma_m}(t, dy). \quad (3.21)$$

Покажем, что $\mu^{\gamma_m}(t, dy)$ удовлетворяет (3.13). Неотрицательную борелевскую меру $\mu^{\gamma_m}(t, dy)$ можно интерпретировать как элемент пространства распределений Шварца, и, следовательно, $F^{-1}(g^{\gamma_m}) = \mu^{\gamma_m}$, и

$$\forall h \in \mathcal{S}(R^d), \quad \Big|\int\limits_{R^d} h(y)\mu^{\gamma_m}(t, dy)\Big| \leqslant \|h\|_\infty \mu^{\gamma_m}(t, R^d) < \infty.$$

При этом из (3.20) и (3.21) вытекает, что

$$F(u^{\gamma_m}) = F(\rho)F(\mu^{\gamma_m})$$

и, следовательно,

$$\tilde{u}^{\gamma_m}(t,z) = \rho * \mu^{\gamma_m}(t,z). \tag{3.22}$$

Наконец, обозначив $\langle h, \mu_m(t)\rangle = \int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t,dy), \quad \forall h \in \mathcal{S}(R^d)$, получим

$$\begin{aligned}
&\langle h, \mu_m(t)\rangle = \langle h, F^{-1}(g^{\gamma_m})\rangle = \langle F^{-1}(h), g^{\gamma_m}\rangle \\
&= \int\limits_{R^d} F^{-1}(h)(\lambda)\Big(\int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-i\lambda\cdot\zeta_m(t,\omega)} Q_m(t,\zeta_m(\omega),\tilde{u}^{\gamma_m}(\zeta_m(\omega)))\gamma_m(d\omega)\Big)d\lambda \\
&= \int\limits_{\mathcal{C}^d}\Big(\int\limits_{R^d} F^{-1}(h)(\lambda)e^{-i\lambda\cdot\zeta_m(t,\omega)}d\lambda\Big)\exp\Big\{\int\limits_0^t \tilde{c}_m(\zeta_m(s,\omega),\tilde{\rho} * \tilde{u}^{\gamma_m})ds\Big\}\gamma_m(d\omega) \\
&= \int\limits_{\mathcal{C}^d}\Big(\int\limits_{R^d} F^{-1}(h)(z)e^{-i\lambda\cdot\zeta_m(t,\omega)}dz\Big)\exp\Big\{\int\limits_0^t \tilde{c}_m(\zeta_m(s,\omega),\rho * \mu^{\gamma_m})ds\Big\}\gamma_m(d\omega) \\
&= \int\limits_{\mathcal{C}^d} h(\zeta_m(t,\omega))\exp\Big\{\int\limits_0^t \tilde{c}_m(\zeta(s,\omega),\rho * \mu^{\gamma})ds\Big\}\gamma_m(d\omega),
\end{aligned}$$

что совпадает с (3.19). Для того, чтобы проверить обратное утверждение предположим, что $(\zeta_m(t), \mu^{\gamma_m}(t,dz))$ удовлетворяют (3.18), (3.19) и $\tilde{u}^{\gamma_m}(t,z) = [\rho * \mu^{\gamma_m}](t,z)$. При этом уравнение (3.18) совпадет с уравнением (3.16). Поскольку $\mu^{\gamma_m}(t)$ финитна, то уравнение (3.17) можно получить, выбрав $h(y) = \rho(z-y)$ в (3.19).

Для проверки эквивалентности систем (3.16), (3.17) и (3.18), (3.19) достаточно заметить, что в силу (3.22), если $\mathrm{Leb}(\{z \in R^d : F(\rho)(\lambda) = 0\}) = 0$, (где Leb – мера Лебега), то $F(\mu^\gamma) = \frac{F(\tilde{u}^\gamma)}{F(\rho)}$ п.в. Таким образом, μ^{γ_m} однозначно определяет $\tilde{u}^{\gamma_m}$ и наоборот.

Покажем, что система (3.18), (3.19) позволяет построить слабое решение задачи Коши следующего вида

$$\frac{\partial \mu^{\gamma_m}(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left[B_m^{ij}(y,[\rho * \mu^{\gamma_m}](t,y))\mu^{\gamma_m}(t)\right]$$

$$+\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_j}\left[a_m^j(y,[\rho * \mu^{\gamma_m}](t,y))\mu^{\gamma_m}(t)\right] + c(y,[\rho * \mu^{\gamma_m}](t))\mu^{\gamma_m}(t),$$

$$\mu^{\gamma_m}(0,dy) = \mu_{0m}(dy). \tag{3.23}$$

$\square$

Теорема 3.3. *Меры* $\mu^{\gamma_m}(t)$ *заданные соотношением* (3.19) *удовлетворяют в слабом смысле задаче Коши* (3.23).

Доказательство. Пусть $h \in C_0^\infty(R_+^d)$ и $\zeta_m(t)$- случайный процесс, удовлетворяющий (3.19). Рассмотрим случайный процесс $\psi_m(s) = h(\zeta_m(s))Q_m(s,\zeta_m,\rho * \mu^{\gamma_m})$. Воспользовавшись формулой Ито, получим

$$d\psi(s) = dh(\zeta_m(s))\tilde{Q}_m(s,\zeta_m,\rho * \mu^{\gamma_m}) + h(\zeta_m(s))d\tilde{Q}_m(s,\zeta_m,\rho * \mu^{\gamma_m})$$

$$= \left[\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{B}_m(\zeta_m(s),\rho * \mu^{\gamma_m})\nabla^2 h(\zeta_m(s))\right. \tag{3.24}$$

$$\left.+\tilde{a}_m(\zeta_m(s),\rho * \mu^{\gamma_m})\cdot\nabla h(\zeta_m(s))\right]\tilde{Q}_m(s,\zeta_m,\rho * \mu^{\gamma_m})ds$$

$$+\tilde{c}_m(\zeta_m(s),\rho * \mu^{\gamma_m})\tilde{Q}_m(s,\zeta_m,\rho * \mu^{\gamma_m})ds$$

$$+\tilde{Q}_m(s,\zeta_m,\rho * \mu^{\gamma_m})\tilde{A}_m(\zeta_m(s),\rho * \mu^{\gamma_m})dw_m(s).$$

Интегрируя по s в пределах от 0 до t, вычисляя математическое ожидание и принимая во внимание определение μ^{γ_m}, получим

$$\int\limits_{R^d} h(z)\mu^{\gamma_m}(t,dz) = \int\limits_{R^d} h(z)\mu_{0m}(dz) + \int\limits_0^t\int\limits_{R^d} h(z)\tilde{c}_m(z,\rho * \mu^{\gamma_m})\mu^{\gamma_m}(s,dz)ds$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R^d} \mathcal{A}_m[y,u]h(z)\mu^{\gamma_m}(s,dz)ds,$$

где

$$\mathcal{A}_m[y,u]h = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{B}_m(z,[\rho * u^{\gamma_m}])\nabla^2 h + \tilde{a}_m(z,[\rho * u^{\gamma_m}])]\cdot\nabla h. \tag{3.25}$$

Обсудим, наконец, задачу Коши–Робина, которой удовлетворяют меры $\mu_m(t,dy)$ и их плотности $u_m(t,y)$ относительно меры Лебега, если они существуют. Используя формулу интегрирования по частям нетрудно проверить, что, если $\alpha(y)$ – конормаль, то оператор $\mathcal{A}_m^*$, сопряженный к генератору $\mathcal{A}_m$ процесса $\xi_m(t)$, удовлетворяющего (3.9) задается соотношением

$$\int_G [u_m(y)\mathcal{A}f(y) - f(y)\mathcal{A}^*u_m]dy = \int_{\partial G}[f(y)b_m^*(y)\alpha^*(y)\cdot\nabla u_m(y)$$
$$+\beta_m(y)f(y)u_m(y) - b_m(y)u_m(y)\alpha_m(y)\cdot\nabla f(y)]dy,$$

называемым формулой Грина. Здесь

$$b_m^*(y) = b_m(y) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^d\left(\sum_{j=1}^d B^{ij}n_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_m(y) = -\sum_{i=1}^d\left(a_m^i(y) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d\frac{\partial B_m^{ij}(y)}{\partial y_j}\right)n_i(y).$$

Отсюда вытекает, в силу формулы интегрирования по частям, что $\mu^{\gamma_m}(t,dz)$ является слабым решением задачи Коши (3.23). □

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* **C2**. *Тогда функция* $u^{\gamma_m}(t,y)$, *заданная соотношением* (3.22) *является слабым решением задачи Коши–Робина* (3.6), (3.7) *в полупространстве* R_+^d.

Доказательство. Пусть $\xi_m(t), k_m(t), u_m(t,y), y\in R_+^d$ удовлетворяют системе (3.4)–(3.6) и $\xi_m(t)$ – марковские процессы в R_+^d с отражением на границе. Используя свойства отображения Γ можно проверить, что липшицевость коэффициентов $A_m(y,v)$ и $c_m(y,v)$ позволяет доказать оценку

$$\mathbf{E}\|\zeta_{m,x}(t) - \zeta_{m,y}(t)\|^2 \leqslant C\|x-y\|^2,$$

где $\zeta_{m,x}(t)$ – решение уравнения (3.4) с неслучайным начальным условием $\xi_{0m} = x$. Из свойств преобразования Γ вытекает справедливость оценки $\mathbf{E}\|\xi_{m,x}(t) - \xi_{m,y}(t)\|^2 \leqslant C\|x-y\|^2$.

Обозначим $V_m(t)$ эволюционное семейство операторов, порожденных процессом $\xi_{m,x}(t)$ с фазовым пространством R_+^d. Из оценки $\mathbf{E}\|\zeta_{m,x}(t)-\zeta_{m,y}(t)\|^2 \leqslant C\|x-y\|^2$ следует, что операторы $V_m(t)$ отображают пространство непрерывных ограниченных функций, заданных на R^d_+, в себя, т.е. процессы $\xi_{m,x}(t)$ являются феллеровскими процессами. Рассмотрим генераторы $\mathcal{B}^u_m$ этих эволюционных семейств,

$$\mathcal{A}_m(u)f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{E}f(\xi_{m,x}(t)) - f(x)}{t},$$

заданные на пространстве $C^2(R^d)$ дважды дифференцируемых функций f, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^d}|_{x^d=0} = 0.$$

На пространстве дважды дифференцируемых функций операторы $\mathcal{B}_m$ совпадают с генераторами $\mathcal{A}_m$ марковских процессов $\xi_m(t)$, удовлетворяющих (3.3) и, как было показано выше, функции $f \in C^2$ такие, что $\frac{\partial f(x)}{\partial x_d}|_{y\in\partial G} \neq 0$ не принадлежат области определения оператора $\mathcal{B}_m$.

Таким образом, используя формулу интегрирования по частям, можно проверить, что функции $\tilde{u}^\gamma_m(t,z)$, заданные соотношением (3.22), определяют слабое решение задачи (3.6), (3.7) в полупространстве R^d_+.

Вернемся к рассматриваемой краевой задаче в ограниченной области G с гладкой границей ∂G.

У каждой точки $x \in \partial G$ существует окрестность $U(x) \in \mathcal{U}$, в которой единичный вектор внешней конормали будет иметь вид $(0,\dots,-1)$, граница ∂G в новых координатах будет задана уравнением $x_d = 0$ и $G_0 \cap U(x) \subset \{x_d > 0\}$. Выберем конечное покрытие границы с помощью окрестностей U_q такого вида, $\mathcal{U} = \{U_q, i = 1,\dots,n\}$. При этом для любой точки $x \in \partial G$ существует окрестность $U_{r(x)}$ для которой расстояние $d(x, R^d \setminus U_{r(x)}) > r_0$ и система, состоящая из набора $(U_q,\phi_q), q = 1,\dots,n$, задает атлас многообразия ∂G.

Это гарантирует существование и единственность решения системы вида (3.6), (3.7) в любой окрестности $U_q, q = 1,\dots,n$. При этом процессы $\xi_m(t)$ – строго марковские процессы с генераторами вида (3.25), и, повторяя в каждой окрестности U_q из $\mathcal{U}$ рассуждения, приведенные выше для случая полупространства, с учетом свойств конормали и процедуры локализации, можно проверить, что справедливо следующее утверждение. □

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* **C1**–**C3**. *Тогда существует единственное слабое решение* $u_m(t,y)$ *задачи* (3.6), (3.7). *При этом* *справедливо вероятностное представление* (2.6), *где процессы* $\xi_m(t)$ *и* $k_m(t)$ *удовлетворяют* (2.4), (2.5) *соответственно.*

Список литературы

1. E. Carlini, F. Silva, *A Fully-Discrete Scheme for Systems of Nonlinear Fokker-Planck–Kolmogorov Equations*, PDE Models for Multi-Agent Phenomena Springer (2018), 195–218.
2. Я. И. Белопольская, *Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией.* — Теор. вероятн. прилож. **61**, No. 2 (2016), 268–299.
3. А. В. Скороход, *Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 3 (1961), 287–298.
4. А. В. Скороход, И. И. Гихман, *Стохастические дифференциальные уравнения.* — Наукова думка, Киев, 1968.
5. A. Sznitman, *Nonlinear reflecting diffusion process and the propagation of chaos and associated fluctuations.* — J. Funct. Anal. **56**, No. 3 (1984), 311–336.
6. A.-S. Sznitman, *Topics in propagation of chaos.* — In Ecole d'éte de probabilités de Saint-Flour XIX, 1989, Springer (1991).
7. H. P. McKean, *A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations.* — Proc. National Academy Sci. **56**, No. 6 (1966), 1907–1911.
8. T. Funaki, *A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb. **67** (1984), 331–348.
9. R. F. Anderson, S. Orey, *Small random perturbation of dinamical systems with reflection boundary.* — Nagoya Math. J. **60** (1976), 189–216.
10. М. И. Фрейдлин, *Диффузионные процессы с отражением и задача с косой производной на многообразии с краем.* — Теор. вероятн. прилож. **8**, No. 1, (1963), 80–88.
11. M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations.* — Princeton Univ Press, Princeton, 1985.
12. A. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Probabilistic representation of a class of non-conservative nonlinear Partial Differential Equations.* — ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **13**, (2016), 1189–1233.
13. Я. И. Белопольская, *Стохастическая модель задачи Коши–Неймана для нелинейного параболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 38–61.

Belopolskaya Ya. I. Stochastic model of the Cauchy–Robin problem for systems of nonlinear parabolic equations.

We derive stochastic equations to describe reflected diffusion processes associated with the Cauchy–Neumann problem for systems of nonlinear parabolic equations in non-divergent form. The construction of a solution to the arized stochastic problem is based on a localization procedure that allows to reduce the problem in a closed domain to the corresponding problem in the half space. As a result we obtain a probabilistic representation of a weak solution to the Cauchy–Neumann problem in a bounded domain with a smooth boundary.

Университет Сириус
Олимпийский пр., д. 1,
354340 г. Сочи, Краснодарский край,
Россия

Поступило 26 сентября 2022 г.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu