

И. Ф. Азангулов, В. А. Боровицкий, А. В. Смоленский

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ НА СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Гауссовские процессы (гауссовские случайные поля) на различных неевклидовых областях определения представляют большой интерес как с точки зрения чистой математики [3, 4, 11, 17, 19], так и с точки зрения различных приложений, где они используются как статистические модели [6, 10, 12].

Важными являются случаи, когда гауссовские процессы связаны с геометрической структурой своей области определения X . Обычно это означает стационарность в некотором обобщенном смысле, то есть инвариантность всех конечномерных распределений гауссовского процесса относительно группы симметрий пространства X . Например, относительно группы изометрий, если X – риманово многообразие, или, если X – группа, относительно действия X на себе. В данной заметке нас будет интересовать именно последний случай: мы рассмотрим симметрические группы $X = S_n$ и гауссовские процессы, инвариантные относительно действий S_n на себе левыми и правыми трансляциями, то есть «би-инварианты» [19], что, в предположении центрированности гауссовского процесса, выражается соотношением

$$k(\sigma g, \sigma h) = k(g\sigma, h\sigma) = k(g, h) \quad (1)$$

для его ковариационной функции $k : S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ и элементов $g, h, \sigma \in S_n$.

Ключевые слова: гауссовские процессы, симметрическая группа, положительно определенные функции; ковариации, моделирование.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда №. 21-11-00047.

Мы определим семейство “степенных” ковариационных функций, порождающих би-инвариантные гауссовские процессы на симметрических группах S_n , которое ранее, по-видимому, в литературе не рассматривалось. Эти ковариационные функции определяются в терминах циклического типа частного двух перестановок, и в силу классических соотношений в теории представлений автоматически являются неотрицательно определенными. Кроме того, оказывается, что эти ковариационные функции можно эффективно вычислять, а соответствующие гауссовские процессы можно эффективно моделировать, что делает их привлекательными для статистического моделирования функций на S_n .

Для сравнения, типичные ковариации, рассматриваемые в литературе, определяются как убывающие функции от какого-либо расстояния [2], причем для разных возможных определений расстояния (см. [7, глава 6B]) получаются различные ковариационные функции. Во всех этих случаях отдельно требуется доказывать их неотрицательную определенность. Определяемые нами ковариации в общем случае не являются функциями от расстояния ни в одном стандартном смысле, однако сохраняют монотонность вдоль “геодезических” в графе Кэли симметрической группы.

§2. СТЕПЕННЫЕ КОВАРИАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним, что разбиением числа n высоты ℓ называется конечная последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$, упорядоченных по неубыванию, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$, в сумме дающая n .

Пусть $d \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, и пусть $p_d : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ обозначает степенную сумму Ньютона, то есть симметрический многочлен вида

$$p_d(z_1, \dots, z_m) = z_1^d + z_2^d + \dots + z_m^d. \quad (2)$$

Для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ определим $p_\lambda = \prod_{j=1}^{\ell} p_{\lambda_j}$. Наконец, сопоставим перестановке $g \in S_n$ разбиение $\mu(g) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$, где ℓ – общее количество циклов в перестановке g , а μ_j длина j -го по величине цикла.

Мы определим новое семейство стационарных ковариационных функций на S_n , которые в дальнейшем будем называть «степенными ковариациями».

Определение. Для вектора $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, где $z_j \geq 0$, положим

$$k_{\mathbf{z}}(g, h) = p_{\mu(gh^{-1})}(\mathbf{z}). \quad (3)$$

Теорема 1. Функция $k_{\mathbf{z}} : S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ положительно определена и би-инвариантна, то есть $k_{\mathbf{z}}(\sigma g, \sigma h) = k_{\mathbf{z}}(g\sigma, h\sigma) = k_{\mathbf{z}}(g, h)$ для всех $\sigma \in S_n$. Наконец, если частное gh^{-1} имеет цикленный тип (c_1, \dots, c_n) , то есть перестановка gh^{-1} имеет c_j циклов длины j , $j = 1, \dots, n$, то

$$k_{\mathbf{z}}(g, h) = \prod_{j=1}^n p_j(z)^{c_j}. \quad (4)$$

Доказательство мы дадим в разделе 2.2, а пока сконцентрируемся на простых свойствах и примерах ковариационных функций этого семейства.

2.1. Свойства и примеры степенных ковариаций. Во-первых, отметим, что формула (4) позволяет вычислительно эффективно получать значения степенных ковариационных функций $k_{\mathbf{z}}(g, h)$.

Так как $k_{\mathbf{z}}(g, h)$, как функция от z , является однородным полиномом степени n , то $k_{r\mathbf{z}}(g, h) = r^n k_{\mathbf{z}}(g, h)$. В случае $\sum_{j=1}^m z_j = 1$ получаем,

что $k_{\mathbf{z}}(g, g) = (\sum_{j=1}^m z_j)^n = 1$, откуда следует, что дисперсия $k_{\mathbf{z}}(g, g)$ равна $|\mathbf{z}|_1^n$.

В дальнейшем, не умаляя общности, будем полагать, что $k_{\mathbf{z}}(g, g) \equiv 1$. При такой нормировке видно, что построенная ковариация мультипликативно “штрафует” за каждый цикл длины j , умножаясь на $z_1^j + \dots + z_m^j$.

Рассмотрим граф Кэли группы S_n относительно множества всех транспозиций (перестановок, меняющих местами только два элемента). Это граф $G = (V, E)$, множество вершин V которого совпадает с S_n , а множество ребер E состоит из тех и только тех пар (g, h) , для которых перестановка gh^{-1} является транспозицией.

Расстояние между перестановками g и h в этом графе (обычно называемое расстоянием Кэли) может быть вычислено как

$$d_C(g, h) = n - |\text{cycles}(gh^{-1})|, \quad (5)$$

где $\text{cycles}(g)$ обозначает множество циклов перестановки g , включая циклы длины 1. Отметим, что $|\text{cycles}(gh^{-1})| = \ell$, где ℓ – общее количество циклов перестановки gh^{-1} из определения $\mu(gh^{-1})$.

Введем на S_n следующее отношение порядка: будем говорить что $h \prec g$, если в графе Кэли существует кратчайший путь из вершины e (тождественной перестановки) в вершину g , проходящий через вершину h .

Предложение 1. *Если $h \prec g$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ для $m > 1$, то $k_{\mathbf{z}}(h, e) \leq k_{\mathbf{z}}(g, e)$. Если $z_j > 0$ хотя бы для двух разных индексов j , то $k_{\mathbf{z}}(h, e) < k_{\mathbf{z}}(g, e)$.*

Доказательство. На каждой вершине графа Кэли вдоль кратчайшего пути из g в e количество циклов увеличивается на 1 в силу формулы (5). Значит, достаточно доказать, что $k_{\mathbf{z}}(g, e) \leq k_{\mathbf{z}}(g\sigma, e)$, где σ – перестановка, увеличивающая количество циклов на 1. Пусть перестановка разбивает некоторый цикл длины a на два цикла длины b и c (тогда $a = b + c$). Получим

$$k_{\mathbf{z}}(g, e) = k_{\mathbf{z}}(g\sigma, e) \frac{(z_1^a + z_2^a + \dots + z_m^a)}{(z_1^b + z_2^b + \dots + z_m^b)(z_1^c + z_2^c + \dots + z_m^c)} \leq k_{\mathbf{z}}(g\sigma, e), \quad (6)$$

так как при раскрытии скобок в знаменателе получается сумма числителя и слагаемых вида $z_j^b z_l^c \geq 0$. Если найдутся различные индексы j, l , для которых $z_j > 0$ и $z_l > 0$, то $z_j^b z_l^c > 0$ и выполняется строгое неравенство. \square

Подставляя различные значения z , получаем, что в семейство степенных ковариационных функций в качестве “крайних” случаев включает следующие ковариации и процессы.

- При $\mathbf{z} = (1) \in \mathbb{R}^1$ получаем

$$k_{\mathbf{z}}(g, h) = \prod_{j=1}^n 1^{c_j} \equiv 1. \quad (7)$$

Следовательно, если f – центрированный гауссовский процесс с ковариацией $k_{\mathbf{z}}$, то выполнено $f(g) = f(e)$, $g \in S_n$, где $f(e) \sim N(0, 1)$.

- При $\mathbf{z} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ получаем

$$k_{\mathbf{z}}(g, h) = \prod_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{l=1}^m 1^{\mu_j(gh^{-1})} \right) = m^{\ell} \quad (8)$$

где, по определению μ , число ℓ – общее количество циклов перестановки gh^{-1} . В частности, в данном случае ковариация является функцией от расстояния Кэли. Отметим, что часто используемые “ядра расстояния Кэли” $\exp(-\beta \cdot d_G(g, h))$ положительно полуопределены при достаточном условии $\exp(\beta) \in \{1, \dots, n-1\} \cup [n, \infty)$ [5], и рассматриваемый частный случай степенного ядра это в точности ядро расстояния Кэли “с лог-целой обратной температурой” β .

- При $\mathbf{z} = (1/m, \dots, 1/m) \in \mathbb{R}^m$, используя однородность, легко увидеть, что для любой перестановки, отличной от тождественной

$$k_{\mathbf{z}}(g, e) = m^{k-n} \leq m^{-1}. \quad (9)$$

Это означает, что при $m \rightarrow \infty$ ковариация $k_{\mathbf{z}}$ вырождается в дельта функцию, а сам процесс – в гауссовский белый шум на S_n .

2.2. Доказательство теоремы 1. Из теории Яглома [19, 21] следует, что би-инвариантные ковариации на компактных группах можно описывать в терминах теории представлений. В частности, любая би-инвариантная ковариационная функция $k : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ на компактной группе G , единичный элемент которой мы обозначим e_G , имеет вид

$$k(g, h) = k(gh^{-1}, e_G) = k(e_G, g^{-1}h) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \chi_{\lambda}(gh^{-1}), \quad (10)$$

где $a_{\lambda} \geq 0$ и $\sum_{\lambda} a_{\lambda} d_{\lambda} < \infty$, суммирование ведется по всем неприводимым унитарным представлениям π_{λ} группы G , $\chi_{\lambda} : G \rightarrow \mathbb{C}$ обозначает характер представления π_{λ} , а d_{λ} – его размерность. Кроме того, любая функция вида (10) является би-инвариантной ковариацией.

Группа S_n является конечной, а значит и компактной, причем количество ее неприводимых унитарных представлений конечно. Известно, что неприводимые представления группы S_n можно проиндексировать диаграммами Юнга размера n . Диаграммы Юнга – это представления разбиений λ в виде таблиц со строками размера $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell}$. В этом

случае число ℓ называется высотой диаграммы Юнга, а $n = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j$ называется её размером. Известно также, что характеры χ_λ в случае S_n вещественнозначны и даже целочисленны [15, Sec. 13.1, Corollary 1].

Диаграммы Юнга также тесно связаны с унитарной группой $U(m)$: диаграммы высоты не более m нумеруют неприводимые представления $U(m)$. При этом между данными представлениями S_n и $U(m)$ существует глубокая связь, выражаемая через двойственность Шура–Вейля. Характер s_λ неприводимого представления группы $U(m)$, соответствующего λ , выражается как многочлен Шура от собственных чисел z_1, \dots, z_m унитарной матрицы \mathbf{Z} и может быть выражен при помощи формулы Вейля [16, §7.15]:

$$s_\lambda(\mathbf{Z}) = s_\lambda(z_1, \dots, z_m) = \frac{\det (z_i^{\lambda_j + m - j})_{i,j=1}^m}{\det (z_i^{m-j})_{i,j=1}^m}, \quad (11)$$

где для j , превышающих высоту диаграммы λ , полагается $\lambda_j = 0$, причем числитель делится на знаменатель нацело, в связи с чем s_λ – многочлен от переменных z_1, \dots, z_m . Отметим, что представления группы $U(m)$ могут быть продолжены до представлений всей общей линейной группы $GL(m, \mathbb{C})$, характер которого также задан формулой (11).

Для многочленов s_λ также известно другое представление, заданное в терминах полу-стандартных таблиц Юнга, которые мы сейчас определим. Пусть λ – разбиение. Полу-стандартной таблицей формы λ называется заполненная натуральными числами диаграмма Юнга, соответствующая разбиению λ , в которой значения не убывают по строкам и возрастают по столбцам. Многочлены s_λ можно описать следующим образом [16, §7.10]:

$$s_\lambda(\mathbf{z}) = \sum_T \mathbf{z}^T = \sum_T \prod_{j=1}^m z_j^{t_j}, \quad (12)$$

где суммирование ведется по всем T – полустандартным таблицам формы λ , заполненным числами от 1 до m , а t_j обозначает количество клеток таблицы T , содержащих число j .

Множество полиномов s_λ , как и полиномы p_λ , образуют базис в пространстве симметрических многочленов, характеры χ_λ группы S_n при этом задают элементы матрицы перехода. А именно, верно следующее.

Теорема (Формула Фробениуса, [20, §4.1]).

$$p_{\mu(g)}(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum \chi_\lambda(g) s_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (13)$$

где суммирование ведется по всем диаграммам Юнга размера n и высоты не более t , то есть разбиениям λ числа n на не более чем t слагаемых.

Теперь мы готовы доказать теорему 1.

Используя (13), представим

$$k_{\mathbf{z}}(g, h) = p_{\mu(gh^{-1})}(\mathbf{z}) = \sum \chi_\lambda(gh^{-1}) s_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_m). \quad (14)$$

Благодаря равенству (12) видим, что $s_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_n) \geq 0$, так как $z_j \geq 0$ для $j = 1, \dots, n$ по предположению. Из этого следует, что $k_{\mathbf{z}}$ имеет вид (10) и, следовательно, является би-инвариантной ковариацией на S_n .

Наконец, по определению $\mu(gh^{-1})$ имеем $|\{\mu_j(gh^{-1}) = r\}| = c_r$, но тогда, группируя полиномы по всевозможным значениям μ_j , получаем

$$k_{\mathbf{z}}(g, h) = p_{\mu(gh^{-1})}(\mathbf{z}) = p_{\mu_j(gh^{-1})}(\mathbf{z}) = \prod_{r=1}^n p_r^{c_r}(\mathbf{z}). \quad (15)$$

§3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Под моделированием гауссовского процесса имеется в виду вычислительный алгоритм получения его траекторий. Пусть f – центрированный гауссовский процесс на группе S_n с ковариацией $k : S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$. Положим $\mathbf{f} = (f(g_1), \dots, f(g_{n!}))^\top$, где $g_1, \dots, g_{n!}$ – каким-то образом пронумерованные различные элементы множества S_n . Тогда $\mathbf{f} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{K})$, где \mathbf{K} – ковариационная матрица вектора \mathbf{f} . Ее элементами являются $\mathbf{K}_{jr} = k(g_j, g_r)$. Моделирование процесса f означает сэмплирование вектора \mathbf{f} . Напишем

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}^{1/2} \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad (16)$$

где $\mathbf{K}^{1/2}$ – корень матрицы \mathbf{K} в том смысле, что $(\mathbf{K}^{1/2})^\top \mathbf{K}^{1/2} = \mathbf{K}$, а \mathbf{I} – единичная матрица размера $n!$.

Представление (16) дает возможность моделировать f : нужно (1) вычислить корень $\mathbf{K}^{1/2}$, (2) сэмплировать вектор $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, и (3) вычислить произведение матрицы на вектор $\mathbf{K}^{1/2} \varepsilon$. Шаг (2) имеет вычислительную сложность $O(n!)$, шаг (3) – вычислительную сложность

$O((n!)^2)$, а шаг (1) – вычислительную сложность $O((n!)^3)$.¹ Это, конечно, делает данный подход несостоятельным для вычислений. Такой исход неудивителен и является прямым следствием чрезмерной общности подхода, который никак не использует свойства ковариации, например, би-инвариантность. Поэтому мы рассмотрим другие техники, которые, полагаясь на би-инвариантность, позволят, хоть и приближенно, моделировать f значительно эффективнее.

Первая такая техника – частный случай метода “Generalized Random Phase Fourier Features”, предложенного в работе [1] для моделирования би-инвариантных гауссовских процессов на общих компактных группах.

Пусть $k: S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ – би-инвариантная ковариация. Она имеет вид (10), то есть $k(g, h) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \chi_{\lambda}(gh^{-1})$. Тогда [1] дает

$$f(g) \approx \sum_{r=1}^R \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L w_l^{\lambda_r} \chi_{\lambda_r}(g u_l), \quad w_l^{\lambda_r} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N\left(0, \frac{a_{\lambda_r}}{d_{\lambda_r}}\right), \quad (17)$$

где $u_l \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(S_n)$, причем $U(S_n)$ обозначает равномерное распределение (вероятностную меру Хаара) на S_n , d_{λ} обозначает размерность представления π_{λ} , а $\lambda_1, \dots, \lambda_R$ соответствуют R представлениям группы S_n с наибольшим значением $a_{\lambda} d_{\lambda}$. Чтобы применить данный подход, нужно уметь находить R представлений с наибольшим значением $a_{\lambda} d_{\lambda}$. Количество представлений S_n растет как $(4n\sqrt{3})^{-1} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$ [8], так что их перебор также представляется вычислительно несостоятельным.

Далее мы предложим другую технику приближенного моделирования, которая не требует такого перебора. Она похожа на только что описанную технику из [1], но предназначена для би-инвариантных процессов именно на S_n . Для этого нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Как раньше, через $s_{\lambda}(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X} \in \text{GL}(m, \mathbb{C})$ диагонализируема, будем обозначать $s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где x_j – собственные числа матрицы \mathbf{X} . Символом $N_{\mathbb{C}^{m \times m}}$ обозначим ансамбль случайных матриц размера $m \times m$ с комплексными элементами вида $N(0, 1/2) + iN(0, 1/2)$, где

¹Показатель 3 может быть уменьшен благодаря использованию специализированных алгоритмов, например алгоритма Штрассена. Однако, во-первых, этот показатель всегда будет не меньше, чем 2, и, во-вторых, такие специализированные алгоритмы редко используются из-за больших констант скрытых за O -нотацией.

все вещественные и мнимые части независимы в совокупности. Тогда верно следующее [9, 14]:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{Z} \sim N_{\mathbb{C}^{m \times m}}} s_\lambda(\mathbf{AZ}) \overline{s_\lambda(\mathbf{AZ})} &= \pi^{-m^2} \int_{-\infty}^{\infty} s_\lambda(\mathbf{AZ}) \overline{s_\lambda(\mathbf{AZ})} e^{-\text{tr}(\mathbf{ZZ}^*)} d\mathbf{Z} \\ &= \frac{n! \cdot s_\lambda(\mathbf{AA}^*)}{d_\lambda}. \end{aligned} \quad (18)$$

Также для любого характера χ_λ неприводимого представления S_n верно

$$\frac{\chi_\lambda(gh^{-1})}{d_\lambda} = \int_{S_n} \chi_\lambda(gu) \chi_\lambda(hu) = \mathbb{E}_{u \sim U(S_n)} \chi_\lambda(gu) \chi_\lambda(hu). \quad (19)$$

Перепиывая правую часть формулы (14) при помощи равенства (18) с

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \dots, \sqrt{z_m}) \quad (20)$$

и пользуясь равенством (19), получаем, что

$$\begin{aligned} k_{\mathbf{z}}(gh^{-1}) &= \sum_{\lambda} \chi_\lambda(gh^{-1}) s_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ &= \sum_{\lambda} \frac{d_\lambda^2}{n!} \mathbb{E}_{u \sim U(S_n)} \mathbb{E}_{\mathbf{Z} \sim N_{\mathbb{C}^{m \times m}}} \chi_\lambda(gu) \chi_\lambda(hu) s_\lambda(\mathbf{AZ}) \overline{s_\lambda(\mathbf{AZ})}. \end{aligned} \quad (21)$$

Нам понадобятся некоторые свойства алгоритма Робинсона–Шенстеда [13]. Данный алгоритм по перестановке $g \in S_n$ строит биективным образом пару стандартных таблиц Юнга $(P(g), Q(g))$ одинаковой формы $\lambda(g)$. В настоящей статье мы не обсуждаем детали работы этого соответствия, отметим только, что существует реализация, работающая за $O(n^{3/2})$ [18]. Для $\lambda(g)$ из алгоритма Робинсона–Шенстеда и для $g \sim U(S_n)$ выполнено соотношение $\mathbb{P}(\lambda(g) = \lambda) = d_\lambda^2/n!$. Поэтому суммирование по λ в выражении (21) можно заменить, получив

$$k_x(gh^{-1}) = \mathbb{E}_{\substack{v, u \sim U(S_n) \\ \mathbf{Z} \sim N_{\mathbb{C}^{m \times m}}} \chi_{\lambda(v)}(gu) \chi_{\lambda(v)}(hu) s_{\lambda(v)}(\mathbf{AZ}) \overline{s_{\lambda(v)}(\mathbf{AZ})}. \quad (22)$$

В результате получаем искомое приближение следующего вида:

$$f(g) \approx \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L (w_{j,1} \text{Re } s_{\lambda(v_j)}(\mathbf{AZ}_j) + w_{j,2} \text{Im } s_{\lambda(v_j)}(\mathbf{AZ}_j)) \chi_{\lambda(v_j)}(gu_j), \quad (23)$$

со случайными коэффициентами $w_{j,1} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$, $w_{j,2} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$, и индексами $v_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(S_n)$, $u_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(S_n)$, $\mathbf{Z}_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N_{\mathbb{C}^{m \times m}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Azangulov, A. Smolensky, A. Terenin, V. Borovitskiy, *Stationary Kernels and Gaussian Processes on Lie Groups and their Homogeneous Spaces I: the Compact Case*, [arXiv preprint arXiv:2208.14960](https://arxiv.org/abs/2208.14960), 2022.
2. F. Bachoc, B. Broto, F. Gamboa, J.-M. Loubes, *Gaussian field on the symmetric group: Prediction and learning*. — *Electronic J. Stat.* **14**, No. 1 (2020), 503–546.
3. S. Cohen, J. Istas, *Fractional fields and applications*, **73**, Mathématiques et Applications, Springer, 2013.
4. S. Cohen, M. Lifshits, *Stationary Gaussian random fields on hyperbolic spaces and on Euclidean spheres*. — *ESAIM: Probability and Statist.* **16** (2012), 165–221.
5. D. Corfield, H. Sati, U. Schreiber, *Fundamental weight systems are quantum states*, [arXiv preprint arXiv:2105.02871](https://arxiv.org/abs/2105.02871), 2021.
6. S. Coveney, C. Corrado, C. H. Roney, D. O’Hare, S. E. Williams, M. D. O’Neill, S. A. Niederer, R. H. Clayton, J. E. Oakley, R. D. Wilkinson, *Gaussian process manifold interpolation for probabilistic atrial activation maps and uncertain conduction velocity*. — *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **378** (2173):20190345, 2020.
7. P. Diaconis, *Group Representations in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **11**, 1988.
8. P. Erdős, *On an Elementary Proof of Some Asymptotic Formulas in the Theory of Partitions*. — *Ann. Math.* **43**, No. 3 (1942), 437–450.
9. P. J. Forrester, E. M. Rains, *Matrix averages relating to Ginibre ensembles*. — *J. Physics A: Math. and Theor.* **42** (38), 385205, 2009.
10. M. Hutchinson, A. Terenin, V. Borovitskiy, S. Takao, Y. Teh, M. Deisenroth, *Vector-valued Gaussian Processes on Riemannian Manifolds via Gauge Independent Projected Kernels*. — *Advances in Neural Information Processing Systems*, **34** (2021), 17160–17169.
11. J. Istas, *Spherical and Hyperbolic Fractional Brownian Motion*. — *Electronic Comm. Probab.* **10** (2005), 254–262.
12. N. Jaquier, V. Borovitskiy, A. Smolensky, A. Terenin, T. Asfour, L. Rozo, *Geometry-aware Bayesian Optimization in Robotics using Riemannian Matérn Kernels*. — *Conference on Robot Learning*, (2022), 794–805.
13. D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming: Volume 3: Sorting and Searching*, Pearson Education, 1998.
14. A. Yu. Orlov, *Tau Functions and Matrix Integrals*, 2002.
15. J. P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, 1977.
16. R. Stanley, S. Fomin, *Enumerative Combinatorics: Volume 2, Cambridge Stud. in Adv. Math.*, Cambridge University Press, 1997.
17. J. E. Taylor, R. J. Adler, *Euler characteristics for Gaussian fields on manifolds*. — *Ann. Probab.* **31**, No. 2 (2003), 533–563.

18. A. Tiskin, *Fast RSK Correspondence by Doubling Search*, 30th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2022), 86:1–86:10, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Schloss Dagstuhl–Leibniz–Zentrum für Informatik, **244**, 2022.
19. A. M. Yaglom, *Second-order homogeneous random fields*, in Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Contributions to Probability Theory, University of California Press, University of California Press, 1961.
20. У. Фултон, Дж. Харрис, *Теория представлений. Начальный курс*, МЦ-НМО, 2017.
21. А. М. Яглом, *Положительно-определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах*. — Докл. АН СССР **135**, No. 6 (1960), 1342–1345.

Azangulov I. F., Borovitskiy V. A., Smolensky A. V. On power-sum kernels on symmetric groups.

In this note, we introduce a family of “power-sum” covariance functions and the corresponding Gaussian processes on symmetric groups S_n . Such processes are bi-invariant: the action of S_n on itself from both sides does not change their finite-dimensional distributions. We show that the values of power-sum covariance functions can be efficiently calculated, and we also propose a method enabling approximate modeling of the corresponding processes with polynomial computational complexity. By doing this we provide the tools that are required to use the introduced family of processes for statistical modeling.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: iska.azn@gmail.com

Поступило 16 октября 2022 г.

ETH Zürich, Rämistrasse 101,
8092 Zurich, Switzerland
E-mail: viacheslav.borovitskiy@gmail.com

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: andrei.smolensky@gmail.com