Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

П. М. Штейнер

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ И КОНВЕРТИРУЮЩИЕ МАЖОРИЗАЦИИ $(0,1)$-ВЕКТОРОВ

§1. Введение

Пусть $M_{n,m}$ обозначает множество всех действительных $n \times m$ матриц; пишем M_n, если $m = n$. Множество $(0,1)$-векторов из $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\{0,1\}^n$. Множество $(0,1)$-матриц из $M_{n,m}$ обозначается через $M_{n,m}(0,1)$. Пусть I обозначает единичную матрицу, J – квадратную матрицу, все элементы которой равны 1. Транспонирование матрицы $A \in M_{n,m}$ обозначается через $A^t \in M_{m,n}$. Через $A^{(j)}$ (соответственно $A_{(i)}$) обозначим j-й столбец (соответственно i-ю строку) матрицы A, $\mathcal{R}(A) = \{A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\}$ – множество строк матрицы A. Множество всех матриц-перестановок порядка n обозначается через $P(n)$. Матрица линейного оператора ϕ на $\mathbb{R}^n$ в стандартном базисе обозначается через $[\phi]$. Максимальный (соответственно минимальный) элемент вектора $v \in \mathbb{R}^n$ обозначается через $\max(v)$ (соответственно $\min(v)$), а максимальный (соответственно минимальный) элемент матрицы $X \in M_{n,m}$ – через $\max(X)$ (соответственно $\min(X)$).

Векторы из $\mathbb{R}^n$ считаются столбцами и отождествляются с соответствующими n-кортежами; j-й координатный вектор обозначается через e_j, $e = (1, \dots, 1)^t$. Нулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ обозначается через 0_n. Выпуклая оболочка множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначается через $\operatorname{conv}(S)$. Для матриц $A, B \in M_{n,m}$ условие $A \leqslant B$ означает, что $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для любых i, j.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ $x^{\downarrow}$ обозначает вектор, полученный перестановкой координат x в порядке невозрастания. Для векторов $x, v \in \mathbb{R}^n$ говорим, что x *мажорируется* v, $x \preceq v$, если $\sum\limits_{j=1}^{k} x_j^{\downarrow} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} v_j^{\downarrow}$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} x = \sum\limits_{j=1}^{n} v$.

Ключевые слова: слабая мажоризация, векторная мажоризация, $(0,1)$-векторы, монотонные отображения.

Работа поддержана фондом БАЗИС (грант No. 19-8-2-35-1).

Матрица называется *строчно-стохастической*, если все её элементы неотрицательны и сумма элементов в каждой строке равна 1. Множество всех $n \times n$ строчно-стохастических матриц обозначается через Ω_n^{row}. Если матрица является строчно-стохастической и сумма элементов в каждом столбце матрицы равна 1, то она называется *дважды-стохастической*. Согласно теореме Биркгофа–Неймана, множество Ω_n всех дважды-стохастических матриц размера $n \times n$ выпукло, а его вершинами являются матрицы-перестановки, см. [17, теорема I.2.A.2].

В настоящей статье мы проводим исследование задач характеризации линейных операторов, сохраняющих слабую мажоризацию, и характеризации линейных операторов, конвертирующих векторную мажоризацию в слабую, в ограничении на множество $(0,1)$-векторов.

В недавней статье [13] было показано, что множество линейных операторов, сохраняющих векторную мажоризацию, совпадает с множеством линейных операторов, сохраняющих векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов во всех случаях, кроме $n = 3$. Только при $n = 3$ существуют линейные операторы, не сохраняющие векторную мажоризацию, но сохраняющие векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов. В настоящей статье мы даем характеризацию линейных операторов, сохраняющих слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Оказывается, что в этом случае ситуация иная: для любого $n \geqslant 3$ существуют линейные операторы, сохраняющие слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов, но не сохраняющие ее в общем случае.

Также исследуются линейные конвертеры мажоризаций. В статье [12] было доказано, что любой линейный конвертер из векторной мажоризации в слабую мажоризацию векторов сохраняет векторную мажоризацию. В настоящей статье мы даем характеризацию линейных операторов, конвертирующих векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Оказывается, что в этом случае существует множество линейных операторов, конвертирующих векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов, но не сохраняющих ее.

Статья построена следующим образом. §1 содержит основные обозначения. В §2 и §3 приводятся известные результаты теории мажоризации и теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации, соответственно. В §4 дается характеризация линейных операторов, сохраняющих слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов. В §5 дается характеризация линейных операторов, конвертирующих векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию векторов.

§2. Слабая и векторная мажоризации $(0,1)$-векторов

Существует множество типов мажоризации матриц, см. [7,8,17,18]. Рассмотрим некоторые из них. Пусть $A, B \in M_{n,m}$.

- *Слабая мажоризация*: $A \preceq^w B$, если существует такая матрица $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$, что $A = RB$.
- *Сильная мажоризация*: $A \preceq^s B$, если существует такая матрица $D \in \Omega_n$, что $A = DB$.

Как видно из определения, из сильной мажоризации следует слабая. Обратное, вообще говоря, неверно, см. [18, пример 1].

Классическая векторная мажоризация является частным случаем сильной мажоризации для матриц с одним столбцом. Следующая теорема – результат Харди, Литлвуда и Полиа.

Теорема 2.1 ([17, теорема I.2.B.2])**.** *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq b$, если и только если $a \preceq^s b$ как $n \times 1$ матрицы.*

Напомним, что $\mathcal{R}(X)$ обозначает множество строк матрицы X.

Лемма 2.2 ([18, предложение 3.3])**.** *Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда*

$$A \preceq^w B,\ \textit{если и только если}\ \mathcal{R}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B)).$$

Следствие 2.3. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $A \preceq^w B$, если и только если $\min(a) \geqslant \min(b)$ и $\max(a) \leqslant \max(b)$.*

Теорема 2.4 ([9, предложение 3.3])**.** *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда $A \preceq^w B$, если и только если $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$.*

Следствие 2.5. *Пусть $a, b \in \{0,1\}^n$. Тогда $a \not\preceq^w b$, если и только если $a \neq b$ и $b \in \{0_n, 1_n\}$.*

Доказательство. По теореме 2.4, $a \not\preceq^w b$ тогда и только тогда, когда множество элементов a не содержится во множестве элементов b. Последнее возможно только если $b \in \{0_n, 1_n\}$. При этом, если $a \neq b$, то множество элементов a не содержится во множестве элементов b. $\square$

Теорема 2.6 ([9, следствие 3.6])**.** *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда $A \preceq^s B$, если и только если $A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$. В частности, сильная мажоризация является отношением эквивалентности на множестве $(0,1)$-матриц.*

Следствие 2.7. *Пусть* $a, b \in \{0,1\}^n$. *Тогда* $a \preceq b$, *если и только если* $a = Pb$ *для некоторой* $P \in P(n)$. *В частности, векторная мажоризация является отношением эквивалентности на множестве* $(0,1)$-*векторов.*

Определение 2.8. *Мажоризации векторов порождают отношения эквивалентности на* $\mathbb{R}^n$. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $a \sim b$ *обозначает, что* $\begin{cases} a \preceq b, \\ b \preceq a. \end{cases}$ *Аналогично,* $a \sim^w b$ *обозначает, что* $\begin{cases} a \preceq^w b, \\ b \preceq^w a. \end{cases}$

§3. Линейные операторы, сохраняющие и конвертирующие мажоризации

Теория линейных отображений, сохраняющих различные матричные отношения, функции и свойства восходит к работам Фробениуса [11], Шура [20] и Дьедонне [10]. За последнее столетие эта теория интенсивно развивалась, см., например, обзоры [15, 19].

Определение 3.1. *Пусть* V – *векторное пространство и* $\prec$ – *бинарное отношение на* V. *Говорим, что линейный оператор* ϕ *на* V сохраняет *отношение* $\prec$, *если для любых* $a, b \in V$ *из* $a \prec b$ *следует* $\phi(a) \prec \phi(b)$.

Определение 3.2. *Пусть* V – *векторное пространство и* $\prec_1, \prec_2$ – *бинарные отношения на* V. *Говорим, что линейный оператор* ϕ *на* V конвертирует *отношение* $\prec_1$ *в отношение* $\prec_2$, *если для любых* $a, b \in V$ *из* $a \prec_1 b$ *следует* $\phi(a) \prec_2 \phi(b)$.

Первый результат теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации, принадлежит Андо.

Теорема 3.3 ([4, следствие 2.7])**.** *Пусть* ϕ – *линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор* ϕ *сохраняет векторную мажоризацию;*
(2) *выполнено одно из следующих условий:*
   (a) $\phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого вектора* $s \in \mathbb{R}^n$,
   (b) $\phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ *для некоторых чисел* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и некоторой матрицы* $P \in P(n)$.

Этот результат положил начало активным исследованиям линейных операторов, сохраняющих и конвертирующих различные типы мажоризаций матриц, см. [1, 2, 5, 6, 12, 14, 16].

Характеризация линейных операторов, сохраняющих слабую мажоризацию векторов, была получена в статье [14].

Теорема 3.4 ([14, теорема 2.3])**.** *Линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ сохраняет $\preceq^w$, если и только если $\phi(x) = (\alpha I + \beta P)x$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, где $P \in P(n)$, $P \neq I$, α и β – такие действительные числа, что $\alpha\beta \leqslant 0$, и, если $n \neq 2$, то $\alpha\beta = 0$.*

Определение 3.5. *Линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$* сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов*, если для любых $a, b \in \{0,1\}^n$ из $a \preceq^w b$ следует $\phi(a) \preceq^w \phi(b)$.*

Характеризация таких операторов приводится в §4. Заметим, что в определении 3.5, вообще говоря, не требуется, чтобы образ $(0,1)$-вектора был $(0,1)$-вектором. Характеризация линейных операторов, сохраняющих множество $(0,1)$-векторов, была получена в статье [3].

Оказывается, что любой линейный конвертер из векторной мажоризации в слабую сохраняет векторную мажоризацию.

Теорема 3.6 ([12, теорема 6.14])**.** *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда ϕ сохраняет векторную мажоризацию, если и только если ϕ конвертирует векторную мажоризацию в слабую мажоризацию.*

Определение 3.7. *Линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$* конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию*, если для любых $a, b \in \{0,1\}^n$ из $a \preceq b$ следует $\phi(a) \preceq^w \phi(b)$.*

Характеризация таких операторов приводится в §5. Заметим, что в определении 3.7 также, вообще говоря, не требуется, чтобы образ $(0,1)$-вектора был $(0,1)$-вектором.

§4. Линейные операторы, сохраняющие слабую мажоризацию (0,1)-векторов

Здесь и далее мы предполагаем, что $n > 1$.

Лемма 4.1. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда элементы $\max(T)$ и $\min(T)$ содержатся в каждом столбце матрицы T.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Из $e_i \sim^w e_j$ следует, что $T^{(i)} \sim^w T^{(j)}$, откуда, по следствию 2.3, получается, что $\max(T^{(i)}) = \max(T^{(j)})$ и $\min(T^{(i)}) = \min(T^{(j)})$. В силу произвольности i, j, отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 4.2. *Если линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов, то* $\min(T) \leqslant 0 \leqslant \max(T)$.

Доказательство. Так как $n > 1$, имеем $0_n \preceq^w e_1$. Таким образом, по следствию 2.3, получаем, что $\min(T^{(1)}) \leqslant \min(T0_n) = 0 = \max(T0_n) \leqslant \max(T^{(1)})$.

Наконец, по лемме 4.1, $\min(T) = \min(T^{(1)}) \leqslant 0 \leqslant \max(T^{(1)}) = \max(T)$. □

Следствие 4.3. *Линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^2$ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов, если и только если $\phi(x) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ с условием $\alpha\beta \leqslant 0$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов, и пусть T – матрица оператора ϕ. По лемме 4.1, $T \in \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}\}$. Кроме того, $\alpha\beta \leqslant 0$ по лемме 4.2.

Пусть $T = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$. Тогда $\phi(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \phi(e) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \end{pmatrix}$. Но из $e \preceq^w e_1$ следует, что $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \end{pmatrix} \preceq^w \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, что возможно только при $\alpha = \beta = 0$.

Таким образом, $\phi(x) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ с условием $\alpha\beta \leqslant 0$.

II. Предположим, что $\phi(x) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ с условием $\alpha\beta \leqslant 0$. Тогда $\phi(0_2) = 0_2$, $\phi(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\phi(e_2) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\phi(e) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}$.

Заметим, что, поскольку $\alpha\beta \leqslant 0$, получается, что $\phi(0) \preceq^w \phi(e_1)$, $\phi(e) \preceq^w \phi(e_1)$ и $\phi(e_1) \sim^w \phi(e_2)$. Таким образом, ϕ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов. □

Замечание 4.4. Пусть $T \in M_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$. Предположим, что существуют такие $P, Q \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$

$$t_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{если и только если } p_{ij} = 1; \\ \beta, & \text{если и только если } q_{ij} = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Условие (1) корректно, если и только если не существует таких $i, j \leqslant n$, что $p_{ij} = q_{ij} = 1$. Это свойство можно записать в виде $P+Q \leqslant J$.

Лемма 4.5. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов и $n \geqslant 3$. Тогда $\phi(x) = (\alpha P + \beta Q)x$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \leqslant 0$, $P, Q \in P(n)$ и $P + Q \leqslant J$.*

Доказательство. Пусть T – матрица оператора ϕ. Рассмотрим произвольный столбец $T^{(j)}$. По лемме 4.1, $t_{ij} = \max(T)$ для некоторого i. Пусть $t_{ik} > 0$ для некоторого $k \neq j$. Так как $n \leqslant 3$, $e_j \sim^w e_j + e_k$. Тогда $\phi(e_j + e_k) = T^{(j)} + T^{(k)} \preceq^w \phi(e_j) = T^{(j)}$. При этом $\max(T^{(j)}) < \max(T^{(j)}) + t_{ik} = (T^{(j)} + T^{(k)})_i \leqslant \max(T^{(j)} + T^{(k)})$, противоречие.

Таким образом, в каждой строке матрицы T содержится не более одного положительного элемента. С другой стороны, максимальный элемент матрицы T неотрицателен по лемме 4.2 и содержится в каждом столбце матрицы T.

Это значит, что если $\max(T) > 0$, то существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \max(T)$ справедливо, если и только если $p_{ij} = 1$.

Аналогичное верно и для $\min(T)$.

Таким образом, получаем, что $T = \max(T)P + \min(T)Q$, где $P, Q \in P(n)$, причем, если $\max(T) > \min(T)$, то $P + Q \leqslant J$. Если же $\max(T) = \min(T)$, то $\phi = 0$, и утверждение леммы тривиально выполнено. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 3$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *ϕ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов;*
(2) *$\phi(x) = (\alpha P + \beta Q)x$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \leqslant 0$, $P, Q \in P(n)$, $P + Q \leqslant J$. Кроме того, если $\alpha\beta \neq 0$, то не существует таких P_1, P_2, что матрица $P_1[\phi]P_2$ блочно-диагональна.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов. Тогда, по лемме 4.5, $\phi(x) = (\alpha P + \beta Q)x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \leqslant 0$, $P, Q \in P(n)$, $P + Q \leqslant J$.

Осталось рассмотреть случай $\alpha\beta \neq 0$. Предположим, что существуют такие $P_1, P_2 \in P(n)$, что матрица $P_1[\phi]P_2$ блочно-диагональна и $k < n$ – порядок первого блока. Пусть $v = \sum\limits_{i=1}^{k} e_i$. Поскольку $k < n$, то $e_1 \sim^w P_2 v$. Отсюда следует, что $\phi(e_1) \sim^w \phi(P_2 v) \sim^w P_1\phi(P_2 v) = \sum\limits_{i=1}^{k} (\alpha + \beta) e_i$.

Пусть, без ограничения общности, $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Заметим, что $\alpha < 0$, $\alpha + \beta < \beta$. Отсюда следует, что $\phi(e_1) \not\preceq^w P_1\phi(P_2 v)$, противоречие.

II. Пусть выполнено условие (2). Рассмотрим произвольный вектор $v \in \{0,1\}^n \setminus \{0_n, e_n\}$. В общем случае, $\mathcal{R}(\phi(v)) \subseteq \{0, \alpha, \beta, \alpha+\beta\}$. Предположим, что $\mathcal{R}(\phi(v)) \subseteq \{0, \alpha+\beta\}$. Пусть $k = e^t v$ и пусть $P_2 \in P(n)$ – такая матрица, что $v = P_2 \sum\limits_{i=1}^{k} e_i$. Поскольку $\mathcal{R}(\phi(v)) \subseteq \{0, \alpha+\beta\}$, получаем, что существует такая матрица $P_1 \in P(n)$, что $P_1\phi(v) = P_1[\phi]P_2 \sum\limits_{i=1}^{k} e_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (\alpha+\beta)e_i$. Но отсюда следует, что матрица $P_1[\phi]P_2$ блочно-диагональна, противоречие.

Заметим, что каждый столбец матрицы $[\phi]$ содержит ровно один элемент α и один элемент β. Это значит, что количества слагаемых α и слагаемых β среди координат вектора $\phi(v)$ совпадают. Отсюда следует, что если $\mathcal{R}(\phi(v)) \nsubseteq \{0, \alpha+\beta\}$, то $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(\phi(v))$.

Наконец, пусть $a, b \in \{0,1\}^n$ и $a \preceq^w b$. Если $b \in \{0_n, e\}$, то $a = b$. В противном случае, $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(\phi(b))$. С другой стороны, $\mathcal{R}(\phi(a)) \subseteq \{0, \alpha, \beta, \alpha+\beta\}$. Таким образом, $\phi(a) \preceq^w \phi(b)$, и ϕ сохраняет слабую мажоризацию $(0,1)$-векторов. $\square$

§5. Конвертеры векторной мажоризации $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию

Лемма 5.1. *Линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию, если и только если $\phi(v) \sim^w \phi(Pv)$ для любых $v \in \{0,1\}^n$ и $P \in P(n)$.*

Доказательство. По следствию 2.7, для $u, v \in \{0,1\}^n$ имеем $u \preceq v$, если и только если $u = Pv$ для некоторой $P \in P(n)$. Кроме того, векторная мажоризация является отношением эквивалентности на множестве $(0,1)$-векторов. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Тогда элементы $\max(T)$ и $\min(T)$ содержатся в каждом столбце матрицы T.*

Доказательство. Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 4.1. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Пусть k – наибольшее количество элементов $\max(T)$ в строках матрицы T. Тогда $k \in \{1, n-1, n\}$.*

Доказательство. Предположим, что $k < n$. Пусть в строке $T_{(i)}$ содержится k элементов $\max(T)$. Пусть v – такой вектор, что

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ij} = \max(T), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\max(Tv) = k \cdot \max(T)$. Рассмотрим произвольную матрицу $P \in P(n)$. По лемме 5.1 имеем $\max(TPv) = k \cdot \max(T)$. Поскольку k – наибольшее количество элементов $\max(T)$ в строках T, то найдется такая строка $T_{(q)}$, что

$$\begin{aligned} t_{qj} &= \max(T), \quad \text{если } (Pv)_j = 1, \\ t_{qj} &< \max(T) \quad \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Это значит, что матрица T содержит как минимум $\binom{n}{k}$ строк. Но общее количество строк равно n. Таким образом, $\binom{n}{k} \leqslant n$. Следовательно, $k \in \{1, n-1\}$. $\square$

Лемма 5.4. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $(\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$;
(2) *существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \max(T)$ выполнено, если и только если $p_{ij} = 1$;*
(3) *существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \max(T)$ выполнено, если и только если $p_{ij} = 0$.*

Доказательство. Пусть k обозначает наибольшее количество элементов $\max(T)$ в строках T. По лемме 5.3, $k \in \{1, n-1, n\}$. Если $k = n$, то выполнено условие 1.

По лемме 5.2, в матрице T содержится по меньшей мере n элементов $\max(T)$. Это значит, что, если $k = 1$, то выполнено условие (2).

Наконец, предположим, что $k = n-1$. Пусть в строке $T_{(i)}$ содержится $n-1$ элемент $\max(T)$. Пусть $t_{ij} < \max(T)$. Тогда $\max(T(e - e_j)) = (n-1)\max(T)$. По лемме 5.1, $\max(T(e - e_q)) = (n-1)\max(T)$ для любого $q \in \{1, \dots, n\}$.

Таким образом, в каждой строке T содержится ровно $n-1$ элемент $\max(T)$, и существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} \neq \max(T)$, если и только если $p_{ij} = 1$. Следовательно, выполнено условие (3). □

Аналогичным образом доказывается аналог леммы 5.4 для элементов $\min(T)$.

Лемма 5.5. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $(\min(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$;

(2) *существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \min(T)$ выполнено, если и только если $p_{ij} = 1$;*

(3) *существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \min(T)$ выполнено, если и только если $p_{ij} = 0$.*

Лемма 5.6. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Предположим, что $(\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$. Тогда $(\min(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.*

Доказательство. Если $\min(T) = \max(T)$, то утверждение леммы тривиально. В противном случае, по лемме 5.5, получаем, что $(\min(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$, поскольку утверждения (2) и (3) леммы 5.5 не могут быть выполнены, так как в матрице T есть строка, не содержащая элемент $\min(T)$. □

Лемма 5.7. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, а T – его матрица. Предположим, что $(\min(T))e^t, (\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$. Тогда ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию.*

Доказательство. Для любого вектора $v \in \{0,1\}^n$ и любой матрицы $P \in P(n)$ имеем $\max(Tv) = \max(T)(e^t v) = \max(T)(e^t Pv) = \max(TPv)$ и $\min(Tv) = \min(T)(e^t v) = \min(T)(e^t Pv) = \min(TPv)$. Таким образом, ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию по лемме 5.1. □

Лемма 5.8. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Предположим, что существует такая матрица $P \in P(n)$,* *что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \max(T)$ справедливо, если и только если $p_{ij} = 0$. Тогда $T = (\max(T))J + (\min(T) - \max(T))P$.*

Доказательство. Поскольку в матрице T есть элементы, отличные от $\max(T)$, получаем, что $\min(T) \neq \max(T)$. По лемме 4.1, каждый столбец матрицы T содержит элемент $\min(T)$. Таким образом, для любых $i, j \leqslant n$ имеем:

$$t_{ij} = \begin{cases} \max(T), & \text{если } p_{ij} = 0, \\ \min(T), & \text{если } p_{ij} = 1. \end{cases} \qquad \square$$

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 5.9. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Предположим, что существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ равенство $t_{ij} = \min(T)$ справедливо, если и только если $p_{ij} = 0$. Тогда $T = (\min(T))J + (\max(T) - \min(T))P$.*

Лемма 5.10. *Пусть линейный оператор ϕ на $\mathbb{R}^n$ с матрицей T конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Предположим, что $(\max(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$ и в матрице T более двух различных элементов.*

Тогда существуют такое число $\beta \in \mathbb{R}$ и такие матрицы $P, Q \in P(n)$, что $P + Q \leqslant J$ и для любых $i, j \leqslant n$

$$t_{ij} = \begin{cases} \max(T), & \textit{если } p_{ij} = 1, \\ \min(T), & \textit{если } q_{ij} = 1, \\ \beta & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что существует такая матрица $P' \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \max(T)$, если и только если $p'_{ij} = 0$. Тогда, по лемме 5.8, в матрице T всего два различных элемента, противоречие. Таким образом, из леммы 5.4 следует, что существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \max(T)$, если и только если $p_{ij} = 1$. В таком случае, $(\min(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$. Кроме того, по лемме 5.9, не существует такой матрицы $Q' \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \min(T)$, если и только если $q'_{ij} = 0$. Наконец, по лемме 5.5, существует такая матрица $Q \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \min(T)$, если и только если $q_{ij} = 1$. Заметим также, что $P + Q \leqslant J$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ – второй по величине элемент матрицы T. Заметим, что $\min(T) < \beta < \max(T)$. Далее рассуждаем, как в доказательстве леммы 5.3. Пусть $k-1$ – наибольшее количество элементов β в строках матрицы T. При этом $0 < k-1 < n-1$. Пусть в строке $T_{(i)}$ содержится $k-1$ элемент β. Пусть v – такой вектор, что

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ij} \in \{\max(T), \beta\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\max(Tv) = \max(T) + (k-1)\beta$. Рассмотрим произвольную матрицу $P \in P(n)$. По лемме 5.1 имеем $\max(TPv) = \max(T) + (k-1)\beta$. Поскольку $k-1$ – наибольшее количество элементов β в строках T, то найдется такая строка $T_{(q)}$, что

$$\begin{aligned} &t_{qj} \in \{\max(T), \beta\}, && \text{если } (Pv)_j = 1, \\ &t_{qj}\beta && \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Это значит, что матрица T содержит как минимум $\binom{n}{k}$ различных строк, причем в каждой из этих строк содержится ровно $k-1$ элемент β. Но общее количество строк равно n. Таким образом, $\binom{n}{k} \leqslant n$. Это значит, что $k \in \{1, n-1\}$. Однако $k > 1$ по условию. Получается, что $k-1 = n-2$, и любой элемент матрицы T, отличный от $\min(T)$ и $\max(T)$, равен β. □

Замечание 5.11. Матрицу T из леммы 5.10 можно записать в виде

$$T = \beta J + (\max(T) - \beta)P + (\min(T) - \beta)Q, \tag{2}$$

где $P, Q \in P(n)$, $P + Q \leqslant J$ и $\min(T) < \beta < \max(T)$.

Лемма 5.12. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T вида* (2). *Тогда ϕ конвертирует векторную мажоризацию* $(0,1)$*-векторов в слабую мажоризацию, если и только если для любого $v \in \{0,1\}^n \setminus \{0_n, e\}$ выполнены равенства*

$$\begin{aligned} \max(\phi(v)) &= \max(T) + (e^t v - 1)\beta, \\ \min(\phi(v)) &= \min(T) + (e^t v - 1)\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. I. Пусть для любого $v \in \{0,1\}^n \setminus \{0_n, e\}$ выполнено (3) Тогда для любой матрицы $P \in P(n)$ имеем $\max(\phi(Pv)) = \max(\phi(v))$ и $\min(\phi(Pv)) = \min(\phi(v))$. Значит, по следствию 2.3, $\phi(v) \sim^w \phi(Pv)$. Тогда ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию по лемме 5.1.

II. Пусть ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. Рассмотрим произвольный вектор $v \in \{0,1\}^n \setminus \{0_n, e\}$. Пусть $k = e^t v$, $0 < k < n$. Строка $T_{(1)}$ содержит один элемент $\min(T)$, один элемент $\max(T)$ и $n-2$ элементов β.

Пусть $j_1, \ldots, j_n$ – такие неповторяющиеся индексы, что $t_{1j_1} = \ldots = t_{1j_{n-2}} = \beta$, $t_{1j_{n-1}} = \min(T)$ и $t_{1j_n} = \max(T)$. Положим $u = e_{j_1} + \ldots + e_{j_{k-1}} + e_{j_{n-1}}$, $w = e_{j_1} + \ldots + e_{j_{k-1}} + e_{j_n}$. Тогда $v \sim u \sim w$. Значит $\phi(v) \sim^w \phi(u) \sim^w \phi(w)$. Наконец, $\min(\phi(v)) = \min(\phi(u)) = \min(T) + (e^t v - 1)\beta$ и $\max(\phi(v)) = \max(\phi(w)) = \max(T) + (e^t v - 1)\beta$. $\square$

Существует комбинаторный способ проверить условие леммы 5.12.

Определение 5.13. *Пусть $T \in M_n$ – матрица вида* (2). *Сопоставим матрице T ориентированный граф G_T. Вершинами графа являются столбцы матрицы T. Проводим ребро из вершины i в вершину j, если для некоторого индекса $q \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо $t_{qi} = \max(T)$ и $t_{qj} = \min(T)$.*

Лемма 5.14. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей T вида* (2). *Тогда ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию, если и только если граф G_T не содержит ориентированного цикла длины меньше n.*

Доказательство. I. Пусть граф G_T содержит ориентированный цикл длины k, где $k < n$. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_k$ – его вершины. Рассмотрим вектор $v = e_{j_1} + \ldots + e_{j_k}$. Заметим, что $v \neq e$, поскольку $k < n$.

Докажем, что $\max(\phi(v)) < \max(T) + (k-1)\beta$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ – произвольный индекс. $t_{ij} = \max(T)$ для некоторого j. Если $j \notin \{j_1, \ldots, j_n\}$, то $(Tv)_i < \max(T) + (k-1)\beta$. В противном случае, $j = j_q$ для некоторого q. В цикле есть ребро из вершины j_q в вершину j_{q+1} (если $q = k$, то $j_{q+1} \coloneqq j_1$). Это значит, что $t_{ij_{q+1}} = \min(T)$ и $t_{ij_{q+1}}$ является слагаемым в выражении $(Tv)_i$. Таким образом, $(Tv)_i = \max(T) + \min(T) + (k-2)\beta < \max(T) + (k-1)\beta$. В силу произвольности i, получаем, что $\max(\phi(v)) < \max(T) + (k-1)\beta$. Тогда ϕ не конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию по лемме 5.12.

II. Предположим, что граф G_T не содержит ориентированного цикла длины меньше n. Рассмотрим произвольный вектор $v \in \{0,1\}^n \setminus \{0_n, e\}$ и докажем, что выполнены равенства (3).

Докажем, что $\max(\phi(v)) = \max(T) + (e^t v - 1)\beta$. Пусть j_1 – такой индекс, что $v_{j_1} = 1$. Из вида матрицы T следует, что $t_{i_1 j_1} = \max(T)$ для некоторого индекса $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$. Если $(Tv)_{i_1} = \max(T) + (e^t v - 1)\beta$, то все доказано. В противном случае, $(Tv)_{i_1} = \max(T) + (e^t v - 2)\beta + \min(T)$. Это значит, что для некоторого индекса j_2 с условием $v_{j_2} = 1$ выполнено $t_{i_1 j_2} = \min(T)$. В частности, в графе G_T содержится ребро из j_1 в j_2.

Далее действуем аналогично. Из вида матрицы T следует, что $t_{i_2 j_2} = \max(T)$ для некоторого индекса $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Если $(Tv)_{i_2} = \max(T) + (e^t v - 1)\beta$, то все доказано. В противном случае, $(Tv)_{i_2} = \max(T) + (e^t v - 2)\beta + \min(T)$. Это значит, что для некоторого индекса j_3 с условием $v_{j_3} = 1$ выполнено $t_{i_2 j_3} = \min(T)$. В частности, в графе G_T содержится ребро из j_2 в j_3.

Таким образом можно построить цепочку вершин графа, соединенных ребрами. Причем в этой цепочке может быть не более $e^t v < n$ вершин, поскольку для любой вершины j_q выполнено $v_q = 1$. Кроме того, все вершины в цепочке различны, потому что в графе G_T нет циклов длины меньше n. Получается, что эта цепочка не может содержать более $e^t v$ вершин, и в какой-то момент найдется такое $i_q \in \{1, \ldots, n\}$, что $(Tv)_{i_q} = \max(T) + (e^t v - 1)\beta$.

Докажем, что $\min(\phi(v)) = \min(T) + (e^t v - 1)\beta$. В этом случае можно также построить цепочку вершин графа, соединенных ребрами, но в обратную сторону.

Пусть j_1 – такой индекс, что $v_{j_1} = 1$. Из вида матрицы T следует, что $t_{i_1 j_1} = \min(T)$ для некоторого индекса $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$. Если $(Tv)_{i_1} = \min(T) + (e^t v - 1)\beta$, то все доказано. В противном случае, $(Tv)_{i_1} = \max(T) + (e^t v - 2)\beta + \min(T)$. Это значит, что для некоторого индекса j_2 с условием $v_{j_2} = 1$ выполнено $t_{i_1 j_2} = \max(T)$. В частности, в графе G_T содержится ребро из j_2 в j_1.

Из вида матрицы T следует, что $t_{i_2 j_2} = \min(T)$ для некоторого индекса $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Если $(Tv)_{i_2} = \min(T) + (e^t v - 1)\beta$, то все доказано. В противном случае, $(Tv)_{i_2} = \max(T) + (e^t v - 2)\beta + \min(T)$. Это значит, что для некоторого индекса j_3 с условием $v_{j_3} = 1$ выполнено $t_{i_2 j_3} = \max(T)$. В частности, в графе G_T содержится ребро из j_3 в j_2.

Получаем аналогичную цепочку неповторяющихся вершин графа, откуда, таким же образом, следует, что

$$\min(\phi(v)) = \min(T) + (e^t v - 1)\beta.$$

Значит, ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0, 1)$-векторов в слабую мажоризацию по лемме 5.12. $\square$

Замечание 5.15. В лемме 5.14 утверждение $\min(\phi(v)) = \min(T) + (e^t v - 1)\beta$ можно доказать другим способом. Заметим, что из вида матрицы T следует, что количество слагаемых $\max(T)$ среди координат вектора Tv совпадает с количеством слагаемых $\min(T)$. По доказанному выше, некоторая координата вектора Tv равна $\max(T) + (e^t v - 1)\beta$. Тогда некоторая координата вектора Tv равна $\min(T) + (e^t v - 1)\beta$.

Теорема 5.16. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей $T \in M_n$. Тогда ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $(\min(T))e^t, (\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$;
(2) $\phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ *для некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P \in P(n)$;
(3) T *удовлетворяет условию* (2) *и граф* G_T *не содержит ориентированных циклов длины меньше* n.

Доказательство. I. Предположим, что ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию. По лемме 5.4, выполнено одно из следующих утверждений:

(1) $(\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$;
(2) существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \max(T)$, если и только если $p_{ij} = 1$;
(3) существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \max(T)$, если и только если $p_{ij} = 0$.

Если $(\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$, то, по лемме 5.6, $(\min(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.

Если существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \max(T)$, если и только если $p_{ij} = 0$, то $T = (\max(T))J + (\min(T) - \max(T))P$ по лемме 5.8.

Пусть существует такая матрица $P \in P(n)$, что для любых $i, j \leqslant n$ имеем $t_{ij} = \max(T)$, если и только если $p_{ij} = 1$. Если в матрице T всего два различных элемента, то $T = (\min(T))J + (\max(T) - \min(T))P$.

В противном случае, по лемме 5.10, матрица T имеет вид (2). Тогда, по лемме 5.14, граф G_T не содержит ориентированных циклов длины меньше n.

II. Если $(\min(T))e^t, (\max(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$, то ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0,1)$-векторов в слабую мажоризацию по лемме 5.7.

Если $\phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P \in P(n)$, то ϕ сохраняет векторную мажоризацию по теореме 3.3. В частности, ϕ

конвертирует векторную мажоризацию $(0, 1)$-векторов в слабую мажоризацию.

Если T удовлетворяет условию (2) и граф G_T не содержит ориентированных циклов длины меньше n, то ϕ конвертирует векторную мажоризацию $(0, 1)$-векторов в слабую мажоризацию по лемме 5.14. $\square$

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задачи и интересные и полезные обсуждения.

Список литературы

1. А. Гутерман, П. М. Штейнер, *Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию наборов матриц.* — Вестник СПбГУ, матем. **7(65)** (2020), 217–229.
2. П. М. Штейнер, *Конвертация столбцовой мажоризации.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 195–215.
3. П. М. Штейнер, *Линейные отображения, сохраняющие некоторые комбинаторные матричные множества.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 181–199.
4. T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues.* — Linear Algebra Appl. **118** (1989), 163–248.
5. L. B. Beasley, S.-G. Lee, Y.-H. Lee, *A characterization of strong preservers of matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **367** (2003), 341–346.
6. L. B. Beasley, S.-G. Lee, *Linear operators preserving multivariate majorization.* — Linear Algebra Appl. **304(1)** (2000), 141–159.
7. G. Dahl, *Matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **288** (1999), 53–73.
8. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for matrix classes.* — Linear Algebra Appl. **555** (2018), 201–221.
9. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for* $(0, 1)$*-matrices.* — Linear Algebra Appl. **585** (2020), 147–163.
10. J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables.* — Arch. Math. **1** (1949), 282–287.
11. G. Frobenius, *Uber die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen.* — Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
12. A. Guterman, P. Shteyner, *Linear converters of weak, directional and strong majorizations.* — Linear Algebra Appl. **613** (2021), 340–346.
13. A. Guterman, P. Shteyner, *Linear operators preserving strong majorization of* $(0, 1)$*-matrices.* — Linear Algebra Appl., в печати.
14. A. M. Hasani, M. Radjabalipour, *Linear preserver of matrix majorization.* — Int. J. Pure Appl. Math. **32(4)** (2006), 475–482.
15. C.-K. Li, S. Pierce, *Linear preserver problems.* — Amer. Math. Monthly **108(7)** (2001), 591–605.
16. C.-K. Li, E. Poon, *Linear operators preserving directional majorization.* — Linear Algebra Appl. **325(1)** (2001), 141–146.

17. A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, second edition, Springer, New York, 2011.
18. F. D. Martinez Peria, P. G. Massey, L. E. Silvestre, *Weak matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **403** (2005), 343–368.
19. S. Pierce et al, *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1-2) (1992), 1–119.
20. I. Schur, *Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie* — Akad. Wiss., Berlin (1925), 454–463.

Shteyner P. M. Linear operators preserving and converting majorizations of $(0,1)$-vectors.

The paper investigates and characterizes linear operators preserving weak majorization of $(0,1)$-vectors and linear operators converting vector majorization of $(0,1)$-vectors to weak majorization.

Университет имени Бар-Илана,
5290002, Рамат-Ган, Израиль;
Московский центр
фундаментальной и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Поступило 11 октября 2022 г.