Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

В. Н. Чугунов

О ПАРАХ СИММЕТРИЧНОЙ И КОСОСИММЕТРИЧНОЙ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ, КВАДРАТЫ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ

§1. Постановка задачи

Теплицевой называется комплексная $n\times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Хорошо известными частными случаями теплицевых матриц являются циркулянты и косые циркулянты. Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и *косым циркулянтом* при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Рассмотрим следующую задачу: описать пары ненулевых теплицевых матриц (T_1, T_2), одна из которых симметричная, другая кососимметричная, удовлетворяющих условию

$$T_1^2 = T_2^2.$$

В предлагаемой работе даются частные решения этой задачи в виде списка множеств требуемых пар матриц. В §2 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи, доказательство которой проводится в §4. В §3 приводятся вспомогательные утверждения.

Ключевые слова: теплицева матрица, симметричная матрица, кососимметричная матрица, циркулянт, косой циркулянт, инволютивная матрица.

Работа поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики (Соглашение No. 075-15-2022-286 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации).

Напомним вначале некоторые определения и факты. Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение

$$C = F_n^* D F_n, \tag{2}$$

где $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \ldots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \ldots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \ldots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

и $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ – первообразный корень n-ой степени из единицы.

Если S – косой циркулянт, то вместо (2) имеем

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*, \tag{3}$$

где

$$G_{-1} = \mathrm{diag}(1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ есть корень n-ой степени из (-1).

В дальнейшем мы будем использовать матрицу-перестановку

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ldots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}, \tag{4}$$

называемую иногда перъединичной матрицей, и вспомогательные матрицы

$$Q_c = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$Q_s = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}. \tag{6}$$

§2. Главный результат

Теорема. *Ненулевые симметричная теплицева матрица T_1 и кососимметричная теплицева матрица T_2 удовлетворяют условию*

$$T_1^2 = T_2^2, \tag{7}$$

если они входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:

Класс 1. *Пусть n – четное число. Матрицы T_1 и T_2 имеют вид*

$$T_1 = \alpha C_0, \quad T_2 = \alpha S_0,$$

где C_0 – симметричный инволютивный циркулянт, а S_0 является кососимметричным инволютивным косым циркулянтом, α – некоторое число.

Класс 2. *Матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами, связанными соотношением*

$$T_2 = T_1 C_0.$$

При этом C_0 — инволютивный циркулянт вида

$$C_0 = F_n^* D_0 F_n,$$

где $D_0 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)}\right)$ — диагональная матрица, для которой

$$d_j^{(0)} = -d_{n+2-j}^{(0)}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

$T_1 u = 0$ для $u = (1, 1, \ldots, 1)$ и в случае четного n справедливо равенство $T_1 v = 0$ для $v = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$.

Класс 3. *Матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты, для которых выполняется равенство*

$$T_2 = T_1 S_0.$$

Здесь S_0 — инволютивный косой циркулянт

$$S_0 = G_{-1} F_n^* D_0 F_n G_{-1}^*,$$

где $D_0 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)}\right)$ — диагональная матрица, для которой

$$d_1^{(0)} = -d_2^{(0)}, \qquad d_j^{(0)} = -d_{n+3-j}^{(0)}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

и в случае нечетного n верно условие $T_1 u = 0$ для $u = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1)$.

§3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства главного результата нам понадобятся некоторые дополнительные утверждения относительно циркулянтов и косых циркулянтов.

Лемма 1. *Матрица C является циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_c (см. (5)):*

$$CQ_c = Q_c C. \tag{8}$$

Лемма 2. *Матрица S является косым циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_s (см. (6)):*

$$SQ_s = Q_s S. \tag{9}$$

Лемма 3. *Циркулянт C со спектральным разложением (2) является симметричной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$d_j = d_{n+2-j}, \quad j = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Лемма 4. *Циркулянт C со спектральным разложением (2) является кососимметричной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = 0, \quad d_j = -d_{n+2-j}, \quad j = 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

Лемма 5. *Пусть S – косой циркулянт, для которого записано спектральное разложение (3). Матрица S является симметричной тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = d_2, \quad d_j = d_{n+3-j}, \quad j = 3, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Лемма 6. *Пусть S – косой циркулянт, для которого записано спектральное разложение (3). Матрица S является кососимметричной тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = -d_2, \quad d_j = -d_{n+3-j}, \quad j = 3, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

Доказательство этих лемм можно найти в [2].

§4. Доказательство главного результата

В этом параграфе приведем обоснование теоремы, являющейся основным результатом.

На основании симметричной матрицы T_1 и кососимметричной матрицы T_2 введем дополнительную теплицеву матрицу

$$T = T_1 + T_2.$$

Тогда сами матрицы T_1 и T_2 могут быть выражены через T как

$$T_1 = \frac{T + T^\top}{2}, \quad T_2 = \frac{T - T^\top}{2}.$$

В результате матрицы T_1 и T_2 представляют собой симметричную и кососимметричную части матрицы T.

Подстановка выражений для T_1 и T_2 в условие (7) преобразует его к виду

$$\left(T + T^\top\right)^2 = \left(T - T^\top\right)^2,$$

или

$$TT^\top + T^\top T = 0. \tag{10}$$

Хорошо известно, что всякую теплицеву матрицу можно однозначно представить в виде суммы скалярной матрицы, циркулянта и косого циркулянта с нулевыми диагоналями, поэтому запишем матрицу T в виде

$$T = t_0 I_n + C + S, \tag{11}$$

где C – циркулянт, S – косой циркулянт, оба с нулевыми диагоналями.

Обозначим элементы первой строки циркулянта C через 0, c_1, …, c_{n-1}, а элементы первой строки косого циркулянта S – через 0, s_1, …, s_{n-1}.

Подставим представление (11) в (10), учитывая, что как циркулянты, так и косые циркулянты коммутируют:

$$\begin{aligned} &2t_0^2 I_n + 2t_0 C + 2t_0 C^\top + 2t_0 S + 2t_0 S^\top + 2CC^\top \\ &+ 2SS^\top + CS^\top + SC^\top + C^\top S + S^\top C = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

или

$$\begin{aligned} &CS^\top + SC^\top + C^\top S + S^\top C \\ &\quad = -2\left(t_0\right)^2 I_n - 2t_0 C - 2t_0 C^\top - 2t_0 S - 2t_0 S^\top - 2CC^\top - 2SS^\top. \end{aligned}$$

Матрица в правой части, как сумма циркулянтов и косых циркулянтов, теплицева, значит и матрица в левой части должна быть теплицевой:

$$\left\{CS^\top + SC^\top + C^\top S + S^\top C\right\}_{k,m} = \left\{CS^\top + SC^\top + C^\top S + S^\top C\right\}_{k+1,m+1}, \quad k,m = 1,\dots,n-1.$$

Подробная запись последнего равенства

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} \{C\}_{k,l} \left\{S^\top\right\}_{l,m} + \sum_{l=1}^{n} \{S\}_{k,l} \left\{C^\top\right\}_{l,m} \\
&+ \sum_{l=1}^{n} \left\{C^\top\right\}_{k,l} \{S\}_{l,m} + \sum_{l=1}^{n} \left\{S^\top\right\}_{k,l} \{C\}_{l,m} \\
&- \sum_{l=1}^{n} \{C\}_{k+1,l} \left\{S^\top\right\}_{l,m+1} - \sum_{l=1}^{n} \{S\}_{k+1,l} \left\{C^\top\right\}_{l,m+1} \\
&- \sum_{l=1}^{n} \left\{C^\top\right\}_{k+1,l} \{S\}_{l,m+1} - \sum_{l=1}^{n} \left\{S^\top\right\}_{k+1,l} \{C\}_{l,m+1} = 0
\end{aligned}$$

в силу теплицевости C и S приобретает вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} c_{l-k} s_{l-m} + \sum_{l=1}^{n} s_{l-k} c_{l-m} + \sum_{l=1}^{n} c_{k-l} s_{m-l} \\
&+ \sum_{l=1}^{n} s_{k-l} c_{m-l} - \sum_{l=1}^{n} c_{l-k-1} s_{l-m-1} - \sum_{l=1}^{n} s_{l-k-1} c_{l-m-1} \\
&- \sum_{l=1}^{n} c_{k-l+1} s_{m-l+1} - \sum_{l=1}^{n} s_{k-l+1} c_{m-l+1} = 0.
\end{aligned}$$

Заменим индекс суммирования l на p, полагая $p = l$ в первых четырех суммах и $p = l - 1$ в остальных:

$$\sum_{p=1}^{n} c_{p-k}s_{p-m} + \sum_{p=1}^{n} s_{p-k}c_{p-m} + \sum_{p=1}^{n} c_{k-p}s_{m-p}$$
$$+ \sum_{p=1}^{n} s_{k-p}c_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} c_{p-k}s_{p-m} - \sum_{p=0}^{n-1} s_{p-k}c_{p-m}$$
$$- \sum_{p=0}^{n-1} c_{k-p}s_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} s_{k-p}c_{m-p} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$c_{n-k}s_{n-m} - c_{-k}s_{-m} + s_{n-k}c_{n-m} - s_{-k}c_{-m} + c_{-(n-k)}s_{-(n-m)}$$
$$- c_k s_m + s_{-(n-k)}c_{-(n-m)} - s_k c_m = 0.$$

Так как C – циркулянт, а S – косой циркулянт, то можно записать

$$2c_{n-k}s_{n-m} + 2s_{n-k}c_{n-m} - 2c_k s_m - 2s_k c_m = 0,$$

или

$$c_{n-k}s_{n-m} - s_k c_m = c_k s_m - s_{n-k}c_{n-m}.$$

Заменяя k на $n - k$, получаем

$$c_k s_{n-m} - c_m s_{n-k} = c_{n-k}s_m - c_{n-m}s_k. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение две вспомогательные $(n-1) \times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, задавая их формулами

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} c_1 & s_{n-1} \\ c_2 & s_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & s_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} c_{n-1} & s_1 \\ c_{n-2} & s_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_1 & s_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Из вида матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ легко видеть связь между ними

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}. \tag{15}$$

Определим вспомогательные величины

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{km} = \det\begin{pmatrix} c_k & s_{n-k} \\ c_m & s_{n-m} \end{pmatrix} = c_k s_{n-m} - c_m s_{n-k},$$
$$\triangle^{\mathcal{G}}_{km} = \det\begin{pmatrix} c_{n-k} & s_k \\ c_{n-m} & s_m \end{pmatrix} = c_{n-k}s_m - c_{n-m}s_k.$$

Теперь (13) принимает вид

$$\triangle_{km}^{\mathcal{F}} = \triangle_{km}^{\mathcal{G}}, \qquad k, m = 1, \ldots, n-1. \tag{16}$$

На основании равенств (16) рассмотрим несколько взаимоисключающих случаев, определяемых значениями рангов матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. При этом, в силу соотношения (15), значения рангов матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ совпадают. Дальнейшее исследование мы будем излагать в порядке усложнения случаев.

I. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нулевые. Тогда T является скалярной матрицей, а значит матрица T_2 нулевая. Условия задачи (T_1 и T_2 – ненулевые матрицы) не выполнены.

II. Сначала рассмотрим случай, когда матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$.

Применяя лемму из [3], можем заменить равенства (16) эквивалентным матричным равенством

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} W, \tag{17}$$

где W – матрица, определитель которой равен единице.

Умножая (17) слева на $\mathcal{P}_{n-1}$ и учитывая соотношения (15), получим условие

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} W,$$

из которого вместе с (17) следует соотношение

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} W = \mathcal{F} W^2,$$

или

$$\mathcal{F}\left(I_2 - W^2\right) = 0.$$

Так как матрица $\mathcal{F}$ имеет полный ранг, можем написать

$$W^2 = I_2,$$

а условие равенства единице определителя W позволяет утверждать, что $W = I_2$ или $W = -I_2$.

В случае, если $W = I_2$, справедливо равенство $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, из которого следует, что циркулянт C является симметричной матрицей, а косой циркулянт S – кососимметричной матрицей. Тогда исходная задача может трактоваться как условие равенства квадратов симметричного циркулянта и кососимметричного косого циркулянта. Решением является описание класса 1.

Если же $W = -I_2$, из равенства $\mathcal{F} = -\mathcal{G}$ получаем, что циркулянт C является кососимметричной матрицей, в то время как косой циркулянт S – симметричной матрицей. Исходная задача превращается в нахождение условия равенства квадратов кососимметричного циркулянта и симметричного косого циркулянта. Этот случай не дает решений.

III. И, наконец, исследуем наиболее сложный случай, когда $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$. Данный случай разобъем на три подслучая: у матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ второй столбец нулевой; первый столбец нулевой; нет нулевых столбцов.

Пусть сначала у матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ второй столбец нулевой. Тогда матрица T является циркулянтом, как и матрицы T_1 и T_2, которые запишем как

$$T_1 = F_n^* D_1 F_n, \quad T_2 = F_n^* D_2 F_n,$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Решаемое уравнение приобретает вид

$$D_1^2 = D_2^2,$$

из которого следует, что

$$D_2 = D_1 D_0,$$

где $D_0 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)}\right)$ – инволютивная диагональная матрица, для которой

$$d_j^{(0)} = -d_{n+2-j}^{(0)}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Последние условия нужны для обеспечения коссимметричности T_2. Кроме того, $d_1^{(2)} = 0$ в силу косой симметрии T_2, поэтому $d_1^{(1)} = 0$, и если $n = 2k$, то $d_{k+1}^{(2)} = 0$ и $d_{k+1}^{(1)} = 0$.

В результате получаем соотношение

$$T_2 = F_n^* D_2 F_n = F_n^* D_1 F_n F_n^* D_0 F_n = T_1 C_0,$$

где C_0 – инволютивный циркулянт. Условие $d_1^{(1)} = 0$ эквивалентно требованию $T_1 u = 0$ для $u = (1, 1, \ldots, 1)$. В случае $n = 2k$ соотношение $d_{k+1}^{(1)} = 0$ означает, что $T_1 v = 0$ для $v = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$. Пара (T_1, T_2) принадлежит классу 2.

Если же у матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ первый столбец нулевой, то матрица T является косым циркулянтом, а T_1 и T_2 суть косые циркулянты вида

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \qquad T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*,$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Подставляя в уравнение (7), снова имеем соотношение

$$D_2 = D_1 D_0,$$

где $D_0 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)}\right)$ – инволютивная диагональная матрица, для которой

$$d_1^{(0)} = -d_2^{(0)}, \quad d_j^{(0)} = -d_{n+3-j}^{(0)}, \quad j = 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

что обеспечивает косую симметрию T_2. Заметим, что если $n = 2k+1$, то из условия кососимметричности T_2 имеем равенство $d_{k+1}^{(2)} = 0$, откуда следует ограничение $d_{k+2}^{(1)} = 0$.

В этом случае можем записать

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_0 F_n G_{-1}^* = T_1 S_0,$$

где S_0 – инволютивный косой циркулянт.

Если $n = 2k+1$, то условие $d_{k+2}^{(1)} = 0$ преобретает вид $T_1 u = 0$ для $u = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1)$. Пара (T_1, T_2) принадлежит классу 3. Теорема доказана.

Для полного решения исследуемой задачи осталось рассмотреть случай, когда циркулянт C и косой циркулянт S ненулевые, а векторы, образованные первой строкой C и первым столбцом S, линейно зависимы. Но это уже тема для будущих публикаций.

Список литературы

1. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* М., Наука, 1987.
2. В. Н. Чугунов, *Нормальные и перестановочные теплицевы и ганкелевы матрицы.* М., Наука, 2017.
3. Н. В. Ефимов, Е. Р. Розендорн, *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* М., Наука, 1975.

Chugunov V. N. Pairs of symmetric and skew-symmetric Toeplitz matrices whose squares coincide.

A description of some sets of pairs of symmetric and skew-symmetric Toeplitz matrices whose squares coincide is provided.

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики
им. Г. И. Марчука Российской академии наук
ул. Губкина, 8
119333 Москва, Россия
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило 1 сентября 2022 г.