

В. В. Промыслов

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОТАЛЬНЫХ И РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ТРХТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

§1. ВВЕДЕНИЕ И НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В 2008 году Андерсон и Бадави [6] ввели понятия регулярного и тотального графов коммутативного кольца с единицей, а несколько позже аналогичные графы были рассмотрены и над некоммутативными кольцами.

Пусть \mathbb{F} – некоторое поле, $M_n(\mathbb{F})$ – кольцо матриц размера $n \times n$ над полем \mathbb{F} , $GL_n(\mathbb{F})$ – множество невырожденных матриц.

Определение 1.1. *Тотальным графом кольца $M_n(\mathbb{F})$ называется граф $T_n(\mathbb{F})$ с множеством вершин $M_n(\mathbb{F})$ такой, что различные матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $\det(A + B) = 0$.*

Определение 1.2. *Регулярным графом кольца $M_n(\mathbb{F})$ называется подграф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ графа $T_n(\mathbb{F})$, порожденный вершинами, являющимися невырожденными матрицами.*

В 2009 году Акбари, Джамаали и Факхари доказали, что если характеристика поля \mathbb{F} не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно. В связи с этим, тот же коллектив авторов поставил вопрос (см. [9, задача 525, стр. 1082–1083]) о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. В 2015 году Томон дал отрицательный ответ на поставленный вопрос (см. [12, теорема 2.4]), доказав, что при натуральном $n \geq 2$ и простом $p \geq 3$ выполнено

$$\chi(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}_p})) = \infty,$$

где $\overline{\mathbb{F}_p}$ – алгебраическое замыкание поля \mathbb{F}_p из p элементов. Однако вопрос остается открытым для полей характеристики 0, в частности, для \mathbb{Q} , \mathbb{R} и \mathbb{C} .

Ключевые слова: регулярный граф кольца матриц, тотальный граф кольца матриц, классификация графов с точностью до изоморфизма.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 22-11-00052 (параграф 2), а также в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (параграф 3).

Для исследования этого вопроса в статье [2] были введены понятия регулярного и тотального графов для произвольного подмножества векторного пространства \mathbb{F}^n .

Определение 1.3. Пусть n – натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- Тотальным графом множества A называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин \mathbb{F}^n такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $\frac{x+y}{2} \in A$.
- Регулярным графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $\frac{x+y}{2} \in A$.

Эти графы обладают интересными свойствами, а также порождают ряд любопытных вопросов. Например, неизвестно, является ли конечным хроматическое число регулярного графа $\Gamma_C(\mathbb{R}^2)$ единичной окружности C на евклидовой плоскости.

Заметим, что регулярный граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ кольца квадратных матриц порядка n над полем \mathbb{F} является частным случаем графа множества. Действительно, пусть

- X – квадратная матрица, состоящая из n^2 формальных переменных;
- $\det(X)$ – многочлен, соответствующий определителю матрицы X ;
- $V(\det(X))$ – множество нулей этого многочлена.

Тогда $\Gamma_n(\mathbb{F}) = \Gamma_{V(\det(X))}(\mathbb{F}^{n^2})$.

Этот факт позволяет установить связь между свойствами графов кольца матриц и множества. Например, доказано, что из бесконечности хроматического числа графа $\Gamma_C(\mathbb{R}^2)$ следовала бы бесконечность хроматического числа регулярного графа кольца вещественных матриц порядка выше двух. Этот результат и некоторые свойства регулярного и тотального графов множества описаны в статье [2].

Отдельный интерес представляет вопрос описания автоморфизмов регулярного и тотального графов кольца матриц. В 2017 году Джоу, Вонг и Ма доказали, что автоморфизмы тотального графа кольца 2×2 матриц над конечным полем имеют вид, описанный в теореме ниже.

Теорема 1.4 ([13, теорема 1.2]). Пусть F_q – поле из q элементов. Если $\text{char}(F_q) \neq 2$, то отображение $\sigma: M_2(F_q) \rightarrow M_2(F_q)$ является

автоморфизмом графа $T(\Gamma(M_2(F_q)))$ тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F_q)$ или

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} Q,$$

или

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{pmatrix} Q,$$

где P, Q – невырожденные матрицы над полем F_q , а f – некоторый автоморфизм пол F_q .

В статье [10] сформулирована гипотеза о том, что и в общем случае автоморфизмы имеют схожий вид.

Гипотеза 1.5 ([10, гипотеза 1.4]). Пусть \mathbb{F} – поле характеристики отличной от двух. Тогда для любого автоморфизма T графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ или

$$T(A) = PA^fQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F}),$$

или

$$T(A) = P(A^t)^fQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F})$$

для некоторых невырожденных матриц $P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ и некоторого автоморфизма f поля \mathbb{F} (через A^f обозначается поэлементное применение автоморфизма f к элементам матрицы A).

Мы подойдем к этому вопросу с другой стороны, а именно классифицируем графы некоторых множеств с точностью до изоморфизма и изучим их структуру.

На вопрос о том, какими могут быть изоморфные тотальные и регулярные графы множеств, частично отвечает следующее утверждение, установленное в [2]. В нем доказано, что широким классом изоморфизмов являются аффинные преобразования.

Утверждение 1.6 ([2, утверждение 2.3]). **а)** Пусть \tilde{A} является образом множества A при некотором невырожденном аффинном преобразовании пространства \mathbb{F}^n , т.е. $\tilde{A} = \{Ca + b \mid a \in A\}$ для некоторой невырожденной матрицы C порядка n и вектора $b \in \mathbb{F}^n$. Тогда $T_A(\mathbb{F}^n) \cong T_{\tilde{A}}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_A(\mathbb{F}^n) \cong \Gamma_{\tilde{A}}(\mathbb{F}^n)$.

б) Аналогичное утверждение выполняется и для графов многочлена. Пусть некоторые многочлены $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{p}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in$

$\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ таковы, что $p(x) = \tilde{p}(Cx+b)$ для некоторой невырожденной матрицы C порядка n и вектора $b \in \mathbb{F}^n$. Тогда $T_p(\mathbb{F}^n) \cong T_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n) \cong \Gamma_{\tilde{p}}(\mathbb{F}^n)$.

Иными словами, графы инвариантны (с точностью до изоморфизма) относительно невырожденного аффинного преобразования пространства.

Доказательство. Искомым изоморфизмом является отображение $x \mapsto Cx + b$. \square

Однако далеко не все изоморфизмы имеют такой вид. То, что изоморфные тотальные и регулярные графы множества устроены гораздо сложнее, показывает следующий пример.

Пример 1.7 ([2, пример 2.4]). Для множеств $A = \{0, 1, \sqrt{2}\}$ и $B = \{0, 1, \sqrt{3}\}$ и многочленов $p(x) = x(x-1)(x-\sqrt{2})$ и $q(x) = x(x-1)(x-\sqrt{3})$ с множествами нулей $V(p) = A$ и $V(q) = B$ имеем $\Gamma_A(\mathbb{R}) \cong \Gamma_B(\mathbb{R})$ и $\Gamma_p(\mathbb{R}) \cong \Gamma_q(\mathbb{R})$, но $A \neq \{Cb + d \mid b \in B\}$ для любых $C, d \in \mathbb{R}$.

Тот факт, что уже для множества из трех элементов утверждение, обратное к утверждению 1.6, неверно, наводит на вопрос о том, какова в целом структура тотальных и регулярных графов в этом минимальном нетривиальном случае. Поэтому далее мы займемся классификацией регулярных и тотальных графов множества, состоящего из трёх точек. Введем следующее определение.

Определение 1.8. Пусть \mathbb{F} – поле. Через $T^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\Gamma^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будем обозначать графы $T_A(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ соответственно, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Цель этой работы – получить полную классификацию тотальных и регулярных графов трёхточечных множеств над полем нулевой характеристики. Эта классификация будет получена в теореме 3.10.

Для доказательства основных результатов нам будет полезно следующее предложение, позволяющее параллельно классифицировать как тотальные, так и регулярные графы.

Предложение 1.9. Пусть для некоторых чисел $n, m \in \mathbb{N}$ и множеств $\{a_1, b_1, c_1\} \subset \mathbb{F}^n$, $\{a_2, b_2, c_2\} \subset \mathbb{F}^m$ тотальные графы $T^n(a_1, b_1, c_1)$ и $T^m(a_2, b_2, c_2)$ изоморфны. Тогда также изоморфны и регулярные графы $\Gamma^n(a_1, b_1, c_1)$ и $\Gamma^m(a_2, b_2, c_2)$.

Доказательство. Заметим, что всеми вершинами степени два в графе $T^n(a_1, b_1, c_1)$ являются в точности a_1, b_1, c_1 . Все остальные вершины имеют степень три. То же верно и для графа $T^m(a_2, b_2, c_2)$. Поэтому при изоморфизме графов вершины a_1, b_1, c_1 перейдут в a_2, b_2, c_2 . Осталось заметить, что регулярный граф $\Gamma^n(a_1, b_1, c_1)$ является подграфом тотального и, соответственно, переходит в $\Gamma^m(a_2, b_2, c_2)$ при изоморфизме. \square

§2. РЕГУЛЯРНЫЕ И ТОТАЛЬНЫЕ ГРАФЫ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ НА ПРЯМОЙ

В этом параграфе мы классифицируем графы $\Gamma^1(a, b, c)$ с точностью до изоморфизма. Везде далее \mathbb{F} обозначает поле нулевой характеристики. В поле нулевой характеристики всегда можно выделить подкольцо целых чисел, которое мы отождествим с \mathbb{Z} , и подполе рациональных чисел, которое мы отождествим с \mathbb{Q} .

Лемма 2.1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда $T^1(a, b, c) \simeq T^1(0, 1, f)$ а $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Рассмотрим аффинное отображение $x \rightarrow (x-a)(b-a)^{-1}$. Тогда $a \rightarrow 0, b \rightarrow 1$, а $c \rightarrow (c-a)(b-a)^{-1} = f$. Согласно утверждению 1.6, получаем $T^1(a, b, c) \simeq T^1(0, 1, f)$ и $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, f)$. \square

Нам понадобится следующая широко известная лемма.

Лемма 2.2. Пусть V – некоторое векторное пространство, S – линейно независимая система векторов. Тогда систему S всегда можно дополнить до базиса Гамеля пространства V .

Лемма 2.3. При $f_1, f_2 \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ графы $T^1(0, 1, f_1)$ и $T^1(0, 1, f_2)$ изоморфны.

Доказательство. По лемме 2.2, мы можем выбрать два базиса Гамеля \mathbb{F} как векторного пространства над \mathbb{Q} :

$$G_1 = \{u_0 = 1, u_1 = f_1\} \cup \{u_\alpha \mid \alpha \in I\},$$

$$G_2 = \{v_0 = 1, v_1 = f_2\} \cup \{v_\alpha \mid \alpha \in I\},$$

здесь I может быть несчетным.

Для каждого $x = k_0 + k_1 f_1 + k_{\alpha_1} u_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n} u_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) определим

$$\psi(x) = k_0 + k_1 f_2 + k_{\alpha_1} v_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n} v_{\alpha_n}.$$

Заметим, что $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(f_1) = f_2$. Получаем, что $\psi(x)$ биективно отображает \mathbb{F} на \mathbb{F} (то есть переводит множество вершин $T^1(0, 1, f_1)$ в множество вершин $T^1(0, 1, f_2)$) и аддитивно (то есть сохраняют множество ребер), а, следовательно, отображение

$$f: T^1(0, 1, f_1) \rightarrow T^1(0, 1, f_2)$$

является изоморфизмом графов $T^1(0, 1, f_1)$ и $T^1(0, 1, f_2)$. Таким образом, $T^1(0, 1, f_1) \simeq T^1(0, 1, f_2)$. \square

Замечание 2.4. Заметим, что множества $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ и $\{0, 1, \sqrt{3}\}$ не являются аффинно эквивалентными. Это, учитывая лемму 2.3, обосновывает пример 1.7.

Учитывая наличие порядка на множестве рациональных чисел, мы можем считать, что при $q \in \mathbb{Q}$ граф $T^1(0, 1, q)$ изоморфен $T^1(0, 1, q')$, а граф $\Gamma^1(0, 1, q)$ изоморфен $\Gamma^1(0, 1, q')$ для некоторого $q' \in \mathbb{Q}$, $q > 1$.

Утверждение 2.5. *Графы $\Gamma^1(0, 1, q)$ не являются изоморфными при различных $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$.*

Прежде чем доказать это утверждение, рассмотрим подробнее граф $\Gamma^1(0, 1, q)$.

Пусть $q = \frac{p_1}{q_1}$, где $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$. Тогда, применив аффинное преобразование $x \rightarrow q_1 \cdot x - q_1$ и, быть может, $x \rightarrow -x$, получим, что $\Gamma^1(0, 1, q) \cong \Gamma^1(-m, 0, n)$ для некоторых натуральных и взаимно простых $m \leq n$. Учитывая этот факт, достаточно показать, что графы $\Gamma^1(-m, 0, n)$ неизоморфны при различных m, n .

Рассмотрим структуру графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$, где $m \leq n$ и m взаимно просто с n . Если две произвольные вершины x, y в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ соединены ребром, то возможен только один из трех случаев:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 2n, \\ x + y = -2m. \end{cases}$$

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 2.6. *Множество соседей произвольной вершины x в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ имеет вид $N_1(x) = \{-x, 2n-x, -2m-x\} \setminus \{-m, 0, n\}$.*

Несложно заметить, что, за исключением того случая, когда $n = m = 1$, единственную клику размера три в этом графе образуют вершины $K_{m,n} = \{n - m, n + m, -n - m\}$. А в случае $n = m = 1$ в графе

$\Gamma^1(-1, 0, 1)$ нет ни одной клики размера 3. Поэтому граф $\Gamma^1(-1, 0, 1)$ можно считать уникальным и не изоморфным ни одному из графов $\Gamma^1(-m, 0, n)$ при $n > 1$.

Пусть теперь $n > 1$. Отдельно рассмотрим случай $\Gamma^1(-1, 0, 2)$. В этом графе присутствует единственная вершина степени один: $\{1\}$. Поскольку при остальных значениях m, n в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ нет вершин степени один, случай $m = 1, n = 2$ тоже уникален.

Отметим, что, за исключением случая $n = 2, m = 1$, в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ ровно шесть вершин имеют степень два:

$$T_{m,n} = \{-n, m, -2m, 2n, -n - 2m, 2n + m\}.$$

Все остальные вершины имеют степень три.

Можно заметить, что при достаточно больших x граф $\Gamma^1(-m, 0, n)$ имеет в окрестности вершины x структуру, указанную на рис. 1.

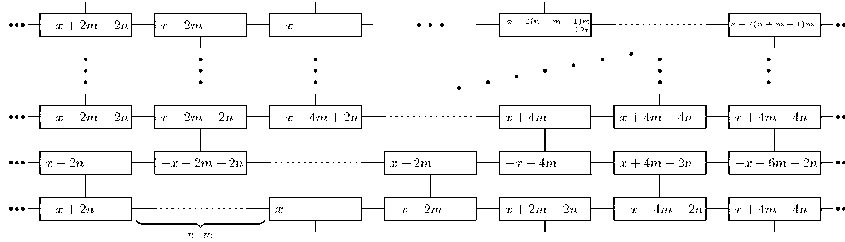


Рис. 1. Структура графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$ вдали от клики и вершин степени два.

Пусть $k \geq 0$ – натуральное число. Рассмотрим множество

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x \leq [k/2], -[k/2] \leq y \leq [k/2], -[k/2] \leq x + y \leq [k/2]\}.$$

Заметим, что D_k содержит все целочисленные точки своей выпуклой оболочки, поскольку является пересечением выпуклых множеств и целочисленной решетки.

Множество D_k тесно связано со структурой графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$. Эта связь будет указана сразу после изучения некоторых свойств D_k .

Лемма 2.7. *Множество D_k обладает следующими свойствами:*

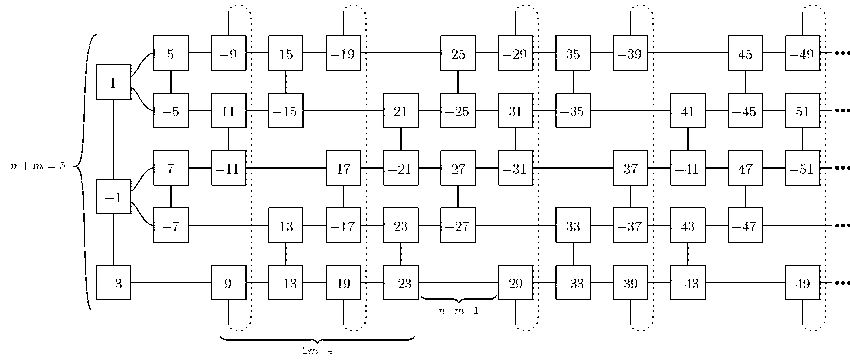


Рис. 2. Компонента графа $\Gamma^1(-2, 0, 3)$, содержащая клику.

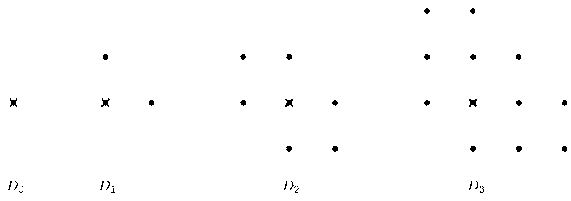


Рис. 3. Множества D_k для $k = 0, 1, 2, 3$.

- (1) $(a, b) \in D_k \implies |a| + |b| \leq k$;
- (2) $D_{k+1} = (-D_k) \cup (-D_k + (1, 0)) \cup (-D_k + (0, 1))$;
- (3) для множеств D_k при $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено рекуррентное соотношение

$$|D_{k+2}| = |D_k| + 3(k + 2); \tag{1}$$

$$(4) |D_k| = \frac{3}{4} \left(k^2 + 2k + \frac{7}{6} + (-1)^k \frac{1}{6} \right);$$

- (5) если $k = p + q$, $0 < p < q$, то число пар точек $A, B \in D_K$, таких что $\overline{AB} = (p, q)$, равняется $p + 1$.

Доказательство.

- (1) Поскольку $(a, b) \in D_k$, для a, b выполнена система неравенств

$$\begin{cases} -[k/2] \leq a \leq [k/2], \\ -[k/2] \leq b \leq [k/2], \\ -[k/2] \leq a + b \leq [k/2]. \end{cases}$$

Если a и b одного знака, то в силу третьего неравенства системы для абсолютных значений a и b справедливо неравенство $|a| + |b| \leq [k/2] \leq k$. Пусть a и b разных знаков. Без ограничения общности будем считать, что $a \leq 0 \leq b$. В таком случае для абсолютных значений a и b справедливы неравенства $|a| \leq [k/2]$, $|b| \leq [k/2]$. Отсюда $|a| + |b| \leq [k/2] + [k/2] = k$.

(2) Множество $(-D_k) \cup (-D_k + (1, 0)) \cup (-D_k + (0, 1))$ является объединением образов D_k при отражении относительно $(0, 0)$ и композиции этого отражения со сдвигами на единичный вектор по каждой из осей. Само множество D_k является пересечением трех полос

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x \leq [k/2]\}, \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq y \leq [k/2]\}, \\ L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x + y \leq [k/2]\}. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно рассмотреть образы этих полос при соответствующих отображениях. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} -L_1 &= -L_1 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x \leq [k/2]\}, \\ -L_1 + (1, 0) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] + 1 \leq x \leq [k/2] + 1\}, \\ -L_2 &= -L_2 + (1, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq y \leq [k/2]\}, \\ -L_2 + (0, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] + 1 \leq y \leq [k/2] + 1\}, \\ -L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x + y \leq [k/2]\}, \\ -L_3 + (1, 0) &= -L_3 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] + 1 \leq x + y \leq [k/2] + 1\}. \end{aligned}$$

Заметим, что равенства $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ выполнены для любого k . Учитывая эти равенства, получаем:

$$\begin{aligned} -L_1 &= -L_1 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x \leq \lfloor k/2 \rfloor\}, \\ -L_1 + (1, 0) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}, \\ -L_2 &= -L_2 + (1, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq y \leq \lfloor k/2 \rfloor\}, \\ -L_2 + (0, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 \leq y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}, \\ -L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x + y \leq \lfloor k/2 \rfloor\}, \\ -L_3 + (1, 0) &= -L_3 + (0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1 \leq x + y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}. \end{aligned}$$

Объединив эти неравенства, мы получим, что точки множества

$$\begin{aligned} &(-D_k) \cup (-D_k + (1, 0)) \cup (-D_k + (0, 1)) \\ &= ((-L_1) \cup (-L_1 + (1, 0)) \cup (-L_1 + (0, 1))) \\ &\cap ((-L_2) \cup (-L_2 + (1, 0)) \cup (-L_2 + (0, 1))) \\ &\cap ((-L_3) \cup (-L_3 + (1, 0)) \cup (-L_3 + (0, 1))) \end{aligned}$$

удовлетворяют системе

$$\begin{cases} -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil, \\ -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil, \\ -\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq x + y \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil. \end{cases}$$

Осталось заметить, что в точности эта система задает D_{k+1} .

(3) Точки $(x, y) \in D_k$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} -\lfloor k/2 \rfloor \leq x \leq \lfloor k/2 \rfloor, \\ -\lfloor k/2 \rfloor \leq y \leq \lfloor k/2 \rfloor, \\ -\lfloor k/2 \rfloor \leq x + y \leq \lfloor k/2 \rfloor. \end{cases}$$

Заметим, что $\lfloor (k+2)/2 \rfloor = \lfloor k/2 \rfloor + 1$, $\lfloor (k+1)/2 \rfloor = \lfloor k/2 \rfloor + 1$. Учитывая эти равенства, получим, что для точек множества D_{k+2} , в свою очередь, выполнены неравенства

$$\begin{cases} -\lfloor k/2 \rfloor - 1 \leq x \leq \lfloor k/2 \rfloor + 1, \\ -\lfloor k/2 \rfloor - 1 \leq y \leq \lfloor k/2 \rfloor + 1, \\ -\lfloor k/2 \rfloor - 1 \leq x + y \leq \lfloor k/2 \rfloor + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим множество $D_{k+2} \setminus D_k$. Поскольку это множество содержит только точки (x, y) с целыми координатами, из вида систем, задающих D_k и D_{k+2} , следует, что $D_{k+2} \setminus D_k$ – это в точности точки на границе D_{k+2} . Граница множества D_{k+2} состоит из отрезков шести прямых. Нетрудно заметить, что суммарное количество точек множества D_{k+2} на прямых $-[k/2] - 1 = x$, $x = [k/2] + 1$ равняется $k + 4$. Столько же точек лежит суммарно на парах прямых $-[k/2] - 1 = y$, $y = [k/2] + 1$ и $-[k/2] - 1 = x + y$, $x + y = [k/2] + 1$. Учитывая, что эти шесть отрезков прямых образуют шестиугольник и его вершины учтены дважды, получаем, что $|D_{k+2} \setminus D_k| = |D_{k+2}| - |D_k| = 3(k + 4) - 6 = 3(k - 2)$. Это равенство завершает доказательство.

(4) Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного k . Для четного k , используя рекуррентное соотношение (1) и равенство $|D_0| = 1$, получаем $|D_k| = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot k = 1 + 3 \frac{(k+2)k}{4}$. При нечетном k наименьший индекс имеет $|D_1| = 3$, поэтому рекуррентное соотношение (1) дает равенство $|D_k| = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + 3 \cdot k = 3 \frac{(k+1)^2}{4}$. Совмещая эти равенства при четном и нечетном k , получаем доказываемую формулу.

(5) Пусть, как определено выше,

$$L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -[k/2] \leq x + y \leq [k/2]\}.$$

Предположим, что пара точек (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (p, q)$, где $p + q = k$, лежит внутри полосы L_3 . Это возможно только тогда, когда (x_1, y_1) лежит на прямой $x + y = -[k/2]$, а (x_2, y_2) – на прямой $x + y = [k/2]$.

Таким образом, если пара точек (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (p, q)$ лежит внутри D_k , то из $D_k \subset L_3$ следует, что $x_1 + y_1 = -[k/2]$. Рассмотрим точки $(0, -[k/2])$, $(-1, -[k/2] + 1), \dots, (-p, -[k/2] + p)$ на прямой $x + y = -[k/2]$, а (x_2, y_2) и соответствующие им точки $(p, q - [k/2])$, $(p - 1, q - [k/2] + 1), \dots, (0, q - [k/2] + p) = (0, [k/2])$ на прямой $x + y = [k/2]$. Это все пары точек, которые лежат в D_k и отличаются на вектор (p, q) . Действительно, точки на прямой $x + y = -[k/2]$ с координатой $y < -[k/2]$ уже не будут лежать в области D_k , как и точки на прямой $x + y = [k/2]$ с координатой $y > [k/2]$. Для завершения доказательства осталось заметить, что указанных выше пар точек ровно $p + 1$. \square

Следующая лемма устанавливает связь между множествам D_k и соседями произвольной вершины в графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$.

Лемма 2.8. Пусть z – некоторая вершина графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$. Тогда если среди соседей вершины z нет вершин степени два, то есть $N_l(z) \cap T_{m,n} = \emptyset$ для каждого $l \in \{0, 1, \dots, k\}$, то

$$N_k(z) = \{2an - 2bm + (-1)^k z \mid (a, b) \in D_k\}. \quad (2)$$

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по параметру k .

База индукции. При $k = 0$ множество D_0 состоит из одной точки $(0, 0)$, как и множество $N_0(z) = \{z\}$, что полностью соответствует доказываемому утверждению.

Шаг индукции. Пусть для некоторого k выполнено $N_k(z) = \{-2an + 2bm + (-1)^k z \mid (a, b) \in D_k\}$. Докажем, что и для $k + 1$ это тоже верно. Согласно предложению 2.6, и учитывая, что $m, 0, -n \notin N_k(z)$, соседями вершины $2an - 2bm + (-1)^k z$ будут три точки: $-2an + 2bm + (-1)^{k+1} z$, $2(-a + 1)n + 2bm + (-1)^{k+1} z$, $-2an - 2(-b + 1) + (-1)^{k+1} z$. Заметим, что для вершины $-2an + 2bm + (-1)^k z$ пара коэффициентов (a, b) при числах $2n$ и $-2m$ у соседей принимает одно из трех значений: $(-a, -b)$, $(-a + 1, -b)$, $(-a, -b + 1)$. Это в точности соответствует отражению точки (a, b) относительно точки $(0, 0)$ в комбинации со сдвигом на нулевой вектор, вектор $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тем самым, требуемое утверждение следует из пункта 2 леммы 2.7. \square

Перейдем к доказательству утверждения 2.5.

Доказательство. Доказательство утверждения 2.5 напрямую следует из леммы 2.7. Действительно, пусть для некоторых взаимно простых n_1, m_1 и n_2, m_2 есть изоморфизм

$$\psi: \Gamma^1(-m_1, 0, n_1) \rightarrow \Gamma^1(-m_2, 0, n_2).$$

Поскольку существует лишь конечное множество вершин z , для которых выполнено неравенство $|z| \leq 8 \max(n_1 m_1, n_2 m_2)$, найдутся две вершины $z_1 \in \Gamma^1(-m_1, 0, n_1)$ и $z_2 \in \Gamma^1(-m_2, 0, n_2)$ графа $\Gamma^1(-m, 0, n)$ такие, что $\psi(z_1) = z_2$ и

$$|z_1|, |z_2| > 8 \max(n_1 m_1, n_2 m_2).$$

Из леммы 2.8 следует, что соседи вершин z_1 и z_2 имеют вид

$$\begin{aligned} N_k(z_1) &= \{2an_1 - 2bm_1 + (-1)^k z_1 \mid (a, b) \in D_k\}, \\ N_k(z_2) &= \{2an_2 - 2bm_2 + (-1)^k z_2 \mid (a, b) \in D_k\}. \end{aligned}$$

Пусть для некоторых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ выполнено неравенство

$$|a_1| + |b_1|, |a_2| + |b_2| \leq \max(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$$

и для некоторых $s, t \in \mathbb{N}_0$ имеем место равенство

$$2a_1n_1 - 2b_1m_1 + (-1)^s z_1 = 2a_2n_1 - 2b_2m_1 + (-1)^t z_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(-1)^s z_1 - (-1)^t z_1| &= |2(a_2 - a_1)n_1 - 2(b_2 - b_1)m_1| \\ &\leq 2(|a_2| + |a_1|)n_1 + 2(|b_2| + |b_1|)m_1 \\ &< 2(|a_2| + |a_1|)n_1 + 2(|b_2| + |b_1|)n_1 \\ &= 2(|a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2|)n_1 \\ &\leq 4 \max(n_1 + m_1, n_2 + m_2)n_1 < z_1. \end{aligned}$$

Поскольку $|(-1)^s z_1 - (-1)^t z_1|$ равняется либо 0, либо $2z_1$, из неравенства выше следует, что s и t одной четности и $2(a_2 - a_1)n_1 = 2(b_2 - b_1)m_1$. Поскольку n_1 и m_1 взаимно простые, заключаем, что $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) + r \cdot (m_1, n_1)$, где $r \in \mathbb{N}$.

Таким образом, если $k < n_1 + m_1$, то $|D_k| = |N_k(z_1)|$. Если же $k = n_1 + m_1$, то $|N_k(z_1)| = |D_k| - m_1$ по пункту (5) леммы 2.7. Аналогичное верно и для графа $\Gamma^1(-m_2, 0, n_2)$: если $k < n_2 + m_2$, то $|D_k| = |N_k(z_2)|$; если $k = n_2 + m_2$, то $|N_k(z_2)| = |D_k| - m_2$. Поскольку вершина z_2 является образом z_1 при изоморфизме, то $|N_k(z_1)| = |N_k(z_2)|$ для всех k . С учетом последних равенств, это означает справедливость системы

$$\begin{cases} n_1 + m_1 = n_2 + m_2, \\ m_1 = m_2. \end{cases}$$

Это возможно, только если $n_1 = n_2$ и $m_1 = m_2$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.9. Пусть \mathbb{F} – поле нулевой характеристики, $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда граф $T^1(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих не изоморфных друг другу типов графов:

- $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $T^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.

Граф $\Gamma^1(a, b, c)$, в свою очередь, изоморфен одному из следующих не изоморфных друг другу типов графов:

- $\Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $\Gamma^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что $T^1(a, b, c)$ изоморфен $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$. Если $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, то, согласно лемме 2.3, все такие графы изоморфны. Тогда, как следует из предложения 1.9, изоморфны и графы $\Gamma^1(a, b, c)$ и $\Gamma^1(0, 1, f)$.

Если же $f = q \in \mathbb{Q}$, то можно считать, что $q > 1$ и, согласно утверждению 2.5, при разных q графы $\Gamma^1(0, 1, q)$ неизоморфны. Отсюда, снова по предложению 1.9, следует, что при разных $q > 1$ не могут быть изоморфны и графы $\Gamma^1(0, 1, q)$.

Ввиду предложения 1.9, осталось доказать, что графы $\Gamma^1(0, 1, f)$ при $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ и $\Gamma^1(0, 1, q)$ при $q \in \mathbb{Q}$ не изоморфны друг другу. Действительно, как было показано выше, граф $\Gamma^1(0, 1, q)$ изоморфен $\Gamma^1(-m, 0, n)$ для некоторых взаимно простых $m < n \in \mathbb{N}$. В графе $\Gamma^1(-m, 0, n)$ единственную клику размера 3 образуют вершины $K_{m,n} = \{n - m, n + m, -n - m\}$. Кроме того, в нем ровно шесть вершин степени два: $T_{m,n} = \{-n, m, -2m, 2n, -n - 2m, 2n + m\}$. Также несложно заметить, что вершины степени два лежат в двух компонентах связности, причем в одной из них лежит клика.

Если же мы рассматриваем граф $\Gamma^1(0, 1, f)$ при $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, то в нем клику размера три образуют вершины $K_f = \{f + 1, -f + 1, f - 1\}$, а вершины степени два выглядят следующим образом:

$$T_f = \{-f, -f + 2, -1, 2f - 1, 2, 2f\}.$$

Можно заметить, что вершины степени два в этом графе содержатся в трех, но не в двух компонентах связности. Кроме того, клика не лежит ни в одной из этих трех компонент. Это замечание завершает доказательство. \square

§3. РЕГУЛЯРНЫЕ И ТОТАЛЬНЫЕ ГРАФЫ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ В \mathbb{F}^n

В этом параграфе мы переместим фокус на случай произвольной размерности. Рассмотрим графы $\Gamma^n(a, b, c)$ и $T^n(a, b, c)$, где $a, b, c \in \mathbb{F}^n$. Как будет показано, граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен графу $T^1(a', b', c')$ для некоторых $a', b', c' \in \mathbb{F}$ — доказательству этого факта и посвящен §3.

Поскольку $\Gamma^n(a, b, c)$ является подграфом $T^n(a, b, c)$, то, согласно предложению 1.9, $\Gamma^n(a, b, c) \simeq \Gamma^1(a', b', c')$ для тех же $a', b', c' \in \mathbb{F}$. Тем самым, с учетом теоремы 2.9, для описания графов $\Gamma^n(a, b, c)$ и $T^n(a, b, c)$ достаточно исследовать только свойства графа $T^n(a, b, c)$, что и будет сделано ниже.

Замечание 3.1. Согласно определению, соседними в графе $T^n(a, b, c)$ являются вершины, полусумма которых как векторов в \mathbb{F}^n принадлежит множеству $A = \{a, b, c\}$. Иначе этот факт можно сформулировать так: вершины x и y соединены ребром в графе $T^n(a, b, c)$, если точка y получена отражением точки x относительно одной из точек a, b, c .

Предложение 3.2. Для графа $T^n(a, b, c)$ выполнены следующие свойства.

- (1) Если выполнено $2(b - a) = 2(c - b) = c - a$ с точностью до перестановки a, b, c , то в графе $T^n(a, b, c)$ отсутствуют клики размера три.
- (2) За исключением случая п. (1), в графе $T^n(a, b, c)$ существует единственная клика размера три. Её образуют вершины $\{-a + b + c, a - b + c, a + b - c\}$.
- (3) В графе $T^n(a, b, c)$ ровно три вершины имеют степень 2 – это в точности $\{a, b, c\}$.
- (4) За исключением $\{a, b, c\}$, все вершины графа $T^n(a, b, c)$ имеют степень 3.

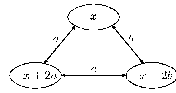


Рис. 4. Клика в графе $T^n(a, b, c)$.

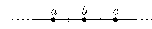


Рис. 5. Расположение a, b, c при отсутствии клики.

Доказательство. (1), (2). Если в графе есть клика размера три, то найдется такая вершина x , при отражении которой относительно точек a и b получатся симметричные относительно c точки (см. рис. 4). Таким образом, будет выполнено следующее равенство:

$$-x + 2b = x - 2a + 2c \iff x = +2b = a + b - c.$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} x = a + b - c, \\ -x + 2a = a - b + c, \\ -x + 2b = -a + b + c. \end{cases}$$

Клики размера три нет только в том случае, если некоторые из этих точек совпадают. Это происходит в точности тогда, когда выполняются соотношения $2(b - a) = 2(c - b) = c - a$ или одно из двух других, которое можно получить перестановкой точек a, b, c (см. рис. 5).

(3), (4). Действительно, как было отмечено в замечании 3.1, каждый сосед получается отражением относительно одной из точек a, b, c . В случае, если отражаемая вершина не совпадает ни с одной из точек a, b, c , после отражения получатся три различные точки. Если же вершина совпадает с одной из точек a, b, c , то отразить получится только относительно двух оставшихся. \square

Лемма 3.3. *Компонента связности вершины x в графе $T^n(a, b, c)$ совпадает с множеством*

$$C_x = \{(-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc \mid k, l, m \in \mathbb{Z}, k + l + m = 0 \\ \text{или } k + l + m = 1\}.$$

Доказательство. Действительно, смежными по ребру с вершиной x являются $\{-x + 2a, -x + 2b, -x + 2c\}$, которые содержатся в C_x . Заметим, что если для некоторой вершины $y = (-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc$ было выполнено свойство $k + l + m = 0$ или $k + l + m = 1$, то и для смежных с y вершин будет выполнено соответствующее свойство, т.е. они также будут содержаться в множестве C_x . Верно и обратное включение: любую точку $y = (-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc$ множества C_x можно получить, применив к точке x в некотором порядке k отражений относительно a , l относительно b и m относительно c . Согласно замечанию 3.1, после отражений получатся вершины, достижимые из x . \square

Пусть G – группа с порождающим множеством $S \subset G$. Обозначим через $\text{Cay}(G, S)$ граф Кэли группы G относительно порождающего множества S , вершинами которого является множество G , а ребрами – множество $\{\{g, h\} \mid g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$.

Лемма 3.4. Пусть векторы $b - a, c - a \in \mathbb{F}^n$ линейно независимы над $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$. Тогда компоненты связности графа $T^n(a, b, c)$, не содержащие клику и вершины степени два, изоморфны графу Кэли $\text{Cay}(G, S)$ группы G симметрий $S = \{a, b, c\}$ относительно точек a, b, c :

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = e \rangle.$$

Доказательство. Пусть a, b, c – симметрии относительно точек a, b, c соответственно. Поскольку $b - a, c - a \in \mathbb{F}^n$ линейно независимы над \mathbb{Q} , группа симметрий, порожденная a, b, c , совпадает с группой симметрий плоскости относительно трёх точек общего положения. Общеизвестен факт, что такая группа задается соотношениями

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = e \rangle.$$

Согласно лемме 3.3, компонента связности вершины x совпадает с множеством

$$C_x = \{(-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc \mid k, l, m \in \mathbb{Z}, k+l+m=0 \text{ или } k+l+m=1\}.$$

Определим отображение $\psi: G \rightarrow C_x$, сопоставив каждому элементу группы G , определенной выше, точку множества C_x , полученную из вершины x в результате соответствующей последовательности отражений относительно точек a, b, c . Заметим, что корректность определения ψ следует из того факта, что G является группой отражений плоскости относительно трех точек a, b, c , а множество C_x , в свою очередь, – множеством всех точек, которые можно получить из x путем отражений относительно a, b, c (см. также замечание 3.1), т.е. орбитой элемента x под действием G . Отсюда также следует, что ψ является сюръекцией.

Докажем, что ψ – инъекция. Достаточно показать, что если для элемента g группы G выполнено $\psi(g) = x$, то $g = e$. Сократим в записи g все вхождения $a^2, b^2, c^2, (abc)^2$. Тем самым, учитывая равенства $a^{-1} = a, b^{-1} = b, c^{-1} = c$, элемент g можно считать словом из букв a, b, c , где каждые соседние буквы различны. Пусть в результате последовательности отражений g из вершины x получается вершина $(-1)^{k+l+m}x + 2ka + 2lb + 2mc$, где $k+l+m=0$ или $k+l+m=1$.

Если $k+l+m=1$, то $x = -x + 2ka + 2lb + 2mc$, откуда $x = ka + lb + mc$. Заметим, что если k, l и m нечётны, то x лежит в компоненте связности клики. Если же одно из чисел k, l или m нечетно, а остальные четны, то

x лежит в одной из компонент связности вершин степени два. Другие варианты невозможны, поскольку $k + l + m = 1$.

Если же $k + l + m = 0$, то $x = x + 2ka + 2lb + 2mc$, откуда следует, что $0 = ka + lb + mc$. Поскольку $k + l + m = 0$, получаем

$$0 = ka + lb + mc = (-l - m)a + lb + mc = l(b - a) + m(c - a).$$

В силу линейной независимости $b - a$ и $c - a$ над \mathbb{Q} , получаем $l = m = k = 0$. Заметим, что, например, каждое вхождение буквы a на нечетной позиции в слове g увеличивает l на единицу, и, наоборот, вхождение a на четной позиции в слове g уменьшает l на единицу. Тогда равенства $l = m = k = 0$ возможны только в том случае, когда вхождений каждого из отражений $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ на четных и нечетных позициях в записи g поровну. Осталось заметить, что $hqh = q^{-1}$ для любого несобственного (являющегося композицией нечетного числа симметрий) движения $h \in G$ и собственного $q \in G$, что следует из соотношений $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{abc})^2 = e$. Такое преобразование позволяет сократить число вхождений каждого из отражений $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в записи g , сохраняя соотношение $k + l + m = 0$. Таким образом, применяя это преобразование необходимое число раз, мы сократим все буквы и получим, что g тождественно.

Получаем, что ψ – биекция множества вершин, сохраняющая ребра, а значит и изоморфизм соответствующих графов. \square

Лемма 3.4 означает, что в случае линейной независимости a, b, c над \mathbb{Q} все компоненты графа $T^n(a, b, c)$, которые не содержат максимальной клики и вершин степени 2, имеют вид $\text{Cay}(G, S)$, т.е. гексагональной сетки (см. рис. 6), и, следовательно, изоморфны.

Лемма 3.5. Пусть $b - a, c - a \in \mathbb{F}^n$ линейно зависимы над $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$. Тогда существуют такие $a', b', c' \in \mathbb{F}$, что для каждой компоненты связности графа $T^n(a, b, c)$ найдется изоморфная ей в графе $T^1(a', b', c')$. Более того, все компоненты связности графа $T^n(a, b, c)$, которые не содержат клику и вершины степени два, изоморфны друг другу и соответствующим компонентам в графе $T^1(a', b', c')$.

Доказательство. Рассмотрим параллельный перенос \mathbb{F}^n на вектор $-a$. Согласно утверждению 1.6, полученный при таком преобразовании граф $T^n(0, b - a, c - a)$ будет изоморфен исходному. Из линейной зависимости $b - a$ и $c - a$ над \mathbb{Q} следует, что $\lambda_1(b - a) + \lambda_2(c - a) = 0$

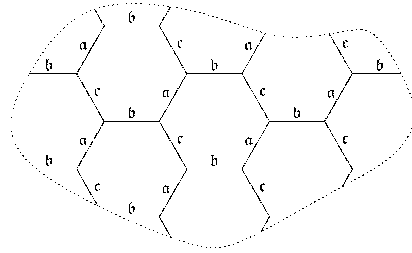


Рис. 6. Граф Кэли $\text{Cay}(G, S)$, имеющий структуру гексагональной сетки.

для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$. Поскольку векторы $b - a$ и $c - a$ коллинеарны, поворотом и растяжением можно добиться того, что $b - a$ и $c - a$ перейдут в векторы $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ и $\frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e_1$. Поскольку эти преобразования являются аффинными, по лемме 1.6 получаем, что графы $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^n(0, e_1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e_1)$ изоморфны. Более того, поскольку $\frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$, применив подходящее аффинное преобразование, мы можем перевести векторы $e_1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e_1$ в $-m \cdot e_1, n \cdot e_1$ для некоторых взаимнопростых $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $m \leq n$. Тогда $T^n(0, b - a, c - a) \simeq T^n(0, e_1, \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} e_1) \simeq T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$. Ниже мы покажем, что компоненты связности графа $T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$ изоморфны соответствующим компонентам $T^1(-m, 0, n)$.

Шаг 1. Сначала докажем, что изоморфны компоненты, содержащие клику или вершины степени два. Заметим, что, согласно предложению 3.2, клика размера три, как и вершины степени два, содержится в линейной оболочке $\langle e_1 \rangle$. Поэтому построим линейное отображение $\varphi: \langle e_1 \rangle \rightarrow \mathbb{Q}$ так, чтобы $\varphi(e_1) = 1$. Тогда $\varphi(-m \cdot e_1) = -m$, $\varphi(n \cdot e_1) = n$, и полученное отображение является изоморфизмом компонент графов $T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$ и $T^1(-m, 0, n)$, содержащихся в $\langle e_1 \rangle$ и \mathbb{Q} соответственно, т. е., в частности, компонент с кликой размера три или вершинами степени два.

Шаг 2. Докажем, что изоморфны и те компоненты, которые не содержат клику размера три или вершины степени два. По лемме 3.3, компонента связности вершины x в графе $T^n(-m \cdot e_1, 0, n \cdot e_1)$ имеет

вид

$$C_x = \{(-1)^{r+s+t}x - 2rm \cdot e_1 + 2tn \cdot e_1 \mid r, s, t \in \mathbb{Z}, r+s+t=0 \text{ или } r+s+t=1\}.$$

Рассмотрим произвольную вершину x' графа $T^1(-m, 0, n)$, которая не содержится в компоненте вершин степени два или клики размера три. Определим отображение φ следующим образом:

$$\varphi((-1)^{r+s+t}x - 2rm \cdot e_1 + 2tn \cdot e_1) = (-1)^{r+s+t}x' - 2rm + 2tn.$$

Такое определение отображения φ корректно. Действительно, пусть для некоторых r_1, s_1, t_1 и r_2, s_2, t_2 оказалось, что

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x - 2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x - 2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1,$$

но

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x' - 2r_1m + 2t_1n \neq (-1)^{r_2+s_2+t_2}x' - 2r_2m + 2t_2n.$$

Тогда, если $r_1 + s_1 + t_1 \neq r_2 + s_2 + t_2$, то из равенства

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x - 2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x - 2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1$$

следует, что $x = \pm((r_1 - r_2)m + (t_2 - t_1)n)$. Ввиду предложения 3.2 и леммы 3.3, это означает, что x лежит в компоненте связности клики размера три или вершин степени два, что невозможно.

Если же $r_1 + s_1 + t_1 = r_2 + s_2 + t_2$, то равенство

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x - 2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x - 2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1$$

влечет $-2r_1m \cdot e_1 + 2t_1n \cdot e_1 = -2r_2m \cdot e_1 + 2t_2n \cdot e_1$. Из этого следует равенство

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x' - 2r_1m + 2t_1n = (-1)^{r_2+s_2+t_2}x' - 2r_2m + 2t_2n,$$

что приводит к противоречию с неравенством

$$(-1)^{r_1+s_1+t_1}x' - 2r_1m + 2t_1n \neq (-1)^{r_2+s_2+t_2}x' - 2r_2m + 2t_2n.$$

Тем самым, определение φ корректно. Заметим, что рассуждение выше также доказывает сюръективность φ . Доказательство инъективности φ получается переменной мест

$$(-1)^{r+s+t}x - 2rm \cdot e_1 + 2tn \cdot e_1 \text{ и } (-1)^{r+s+t}x' - 2rm + 2tn$$

из рассуждений выше. Заметим также, что φ сохраняет ребра в компонентах связности. Таким образом, φ является искомым изоморфизмом. \square

Замечание 3.6. Лемма 3.5 означает, что в случае линейной независимости $b - a$ и $c - a$ структура компонент связности графа $T^n(a, b, c)$ не зависит от размерности n .

Этот факт наводит на мысль о том, что, раз некоторые компоненты связности устроены одинаково в разных размерностях, то и сами графы могут быть изоморфны некоторым одномерным аналогам. Следующие утверждения покажут, что это действительно так.

Теорема 3.7. Пусть $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} = \infty$ и $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ различны. Тогда граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен графу $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Рассмотрим параллельный перенос \mathbb{F}^n на вектор $-a$. Согласно утверждению 1.6, полученный при таком преобразовании граф $T^n(0, b - a, c - a)$ будет изоморфен исходному. Теперь в два шага найдем такой изоморфизм f , что $T^n(0, b - a, c - a) \simeq T^1(0, 1, f)$, и построим этот изоморфизм.

Шаг 1: построение отображения $\psi: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ и нахождение подходящего f .

Случай 1. Пусть векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы над \mathbb{Q} . Возьмем $f \in \mathbb{F}$ такой, что векторы 1 и f линейно независимы над \mathbb{Q} в \mathbb{F} . Согласно лемме 2.2, мы можем дополнить системы $\{b - a, c - a\}$ и $\{1, f\}$ до базиса Гамеля \mathbb{F}^n и \mathbb{F} над \mathbb{Q} соответственно:

$$G_1 = \{u_0 = b - a, u_1 = c - a\} \cup \{u_\alpha \mid \alpha \in I_1\},$$

$$G_2 = \{v_0 = 1, v_1 = f\} \cup \{v_\alpha \mid \alpha \in I_2\}.$$

Заметим, что множества I_1 и I_2 имеют одинаковую мощность. Это позволяет определить отображение $\psi(x)$ на элементе $x = k_0(b - a) + k_1(c - a) + k_{\alpha_1}u_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}u_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) следующим образом:

$$\psi(x) = k_0 + k_1f + k_{\alpha_1}v_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}v_{\alpha_n}.$$

Случай 2. Пусть векторы $b - a$ и $c - a$ линейно зависимы над \mathbb{Q} . Тогда, как и в первом случае, по лемме 2.2 дополним системы $\{b - a\}$ и $\{1\}$ до базиса Гамеля \mathbb{F}^n и \mathbb{F} над \mathbb{Q} соответственно:

$$G_1 = \{u_0 = b - a\} \cup \{u_\alpha \mid \alpha \in I_1\}, \quad G_2 = \{v_0 = 1\} \cup \{v_\alpha \mid \alpha \in I_2\}.$$

Как и выше, множества I_1 и I_2 имеют одинаковую мощность. Тогда для каждого $x = k_0(b - a) + k_{\alpha_1}u_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}u_{\alpha_n}$ ($k_i \in \mathbb{Q}$) определим

$$\psi(x) = k_0 + k_{\alpha_1}v_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_n}v_{\alpha_n}.$$

В этом случае возьмем $f = \psi(c - a)$.

Шаг 2: завершение доказательства.

Заметим, что как в первом, так и во втором случае, $\psi(0) = 0$, $\psi(b - a) = 1$, $\psi(c - a) = f$. Получаем, что, как и в доказательстве леммы 2.3, $\psi(x)$ биективно отображает \mathbb{F} на \mathbb{F}^n (т. е. сохраняет множество вершин) и аддитивно (т. е. сохраняет множество ребер). Следовательно, отображение $\psi: T^n(0, b - a, c - a) \rightarrow T^1(0, 1, f)$ является изоморфизмом графов $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$. Таким образом, $T^n(a, b, c) \simeq T^n(0, b - a, c - a) \simeq T^1(0, 1, f)$. \square

Лемма 3.8. Пусть $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} < \infty$, а точки $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ различны и таковы, что векторы $b - a$ и $c - a$ линейно зависимы над \mathbb{Q} . Тогда граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен графу $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Поскольку векторы $b - a$ и $c - a$ линейно зависимы, согласно лемме 3.5, найдутся такие $a', b', c' \in \mathbb{F}$, что компоненты связности графа $T^n(a, b, c)$ изоморфны компонентам связности $T^1(a', b', c')$. Тогда осталось заметить, что множества компонент связности каждого типа (содержащие клику размера три, вершины степени два, или отличные от первых двух) имеют равные мощности в графах $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$, а именно: компонента, содержащая клику размера три, одна; компонент, содержащих вершины степени два, от двух до трех в зависимости от взаимного расположения точек, но, как следует из доказательства леммы 3.5, одинаковое количество в графах $T^n(a, b, c)$ и $T^1(a', b', c')$; компонент, не содержащих ни клику, ни вершины степени два, счетное число. Отсюда автоматически следует существование покомпонентного изоморфизма между соответствующими графами.

Завершая доказательство, отметим, что аффинным преобразованием набор точек (a', b', c') можно перевести в $(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$. Принимая во внимание предложение 1.6, получаем, что $T^n(a, b, c) \simeq T^1(a', b', c') \simeq T^1(0, 1, f)$. \square

Теорема 3.9. Пусть $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} < \infty$, а точки $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ различны и таковы, что векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы над \mathbb{Q} . Тогда

- если $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} > 1$, то граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен графу $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$;
- если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, то $T^n(a, b, c)$ изоморфен $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$.

Доказательство. Параллельным переносом \mathbb{F}^n на вектор $-a$ добьемся того, что $T^n(a, b, c) \simeq T^n(0, b-a, c-a)$. Компоненты связности графов $T^n(0, b-a, c-a)$ и $T^1(0, 1, f)$ (как и графа $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$) разбиваются на несколько типов: содержащие клику, содержащие вершины степени два и не содержащие ни того, ни другого. Оказывается, что в каждом случае структура этих компонент не зависит от размерности n – этот факт позволит построить изоморфизм ψ покомпонентно. Докажем этот факт последовательно для каждого типа компоненты связности.

Шаг 1. Сначала определим ψ на компонентах, содержащих клику или вершины степени два. Заметим, что, согласно предложению 3.2, клика размера три, как и вершины степени два, содержится в линейной оболочке $\langle b-a, c-a \rangle$ векторов $b-a$ и $c-a$ над \mathbb{Q} .

Случай 1. Если $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{F} > 1$, возьмем $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ и определим линейное отображение $\varphi: \langle b-a, c-a \rangle \rightarrow \langle 1, f \rangle$ так, чтобы выполнялись равенства $\varphi(b-a) = 1$, $\varphi(c-a) = f$. Тогда полученное отображение биективно и, по определению, линейно, а значит является изоморфизмом компонент графов $T^n(0, b-a, c-a)$ и $T^1(0, 1, f)$, содержащихся в $\langle b-a, c-a \rangle$ и $\langle 1, f \rangle$ соответственно. Теперь определим $\psi(x) = \varphi(x)$ в точности для тех вершин, которые лежат в компонентах, содержащих клику размера три или вершины степени два.

Случай 2. Если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, то линейное отображение $\varphi: \langle b-a, c-a \rangle \rightarrow \mathbb{Q}^2$ определим так, чтобы выполнялись равенства $\varphi(b-a) = (1, 0)$, $\varphi(c-a) = (0, 1)$. Тогда, как и в случае 1, полученное отображение будет являться изоморфизмом компонент графа $T^n(0, b-a, c-a)$, содержащихся в $\langle b-a, c-a \rangle$ и $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$. В этом случае также определим $\psi(x) = \varphi(x)$ в точности для тех вершин, которые лежат в компонентах, содержащих клику размера три или вершины степени два.

Шаг 2. Теперь перейдем к компонентам, не содержащим ни клику размера три, ни вершины степени два. Обозначим множество таких компонент через \mathcal{H}_1 . Прежде всего заметим, что, согласно лемме 3.4, все эти компоненты изоморфны графу Кэли группы, порожденной тремя отражениями плоскости, т.е. графу, имеющему структуру гексагональной сетки (см. рис. 6).

Такую же структуру имеют компоненты графа $T^1(0, 1, f)$ в случае 1 (и графа $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ в случае 2), не содержащие ни клику размера три, ни вершины степени два – множество таких компонент

обозначим через \mathcal{H}_2 . Это означает наличие изоморфизма между произвольной компонентой $H_1 \in \mathcal{H}_1$ в графе $T^n(0, b - a, c - a)$ и произвольной компонентой $H_2 \in \mathcal{H}_2$ в графе $T^1(0, 1, f)$ (соответственно, $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$). Можно заметить, что множество \mathcal{H}_1 счетно, как и множество \mathcal{H}_2 (это, например, следует из счетности \mathbb{F} , \mathbb{F}^n и вида компонент связности, описанного в лемме 3.3). Это означает, что можно построить покомпонентный изоморфизм ψ подграфов, образованных множествами \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 .

Доопределив ψ на компоненты с кликой или вершинами степени два так, как было описано в шаге 1, получим покомпонентный изоморфизм графов $T^n(0, b - a, c - a)$ и $T^1(0, 1, f)$ (или $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ соответственно). \square

Теорема 3.10. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих не изоморфных друг другу типов графов:*

- $T^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $T^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны;
- граф $T^n(a, b, c)$ изоморфен графу $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ только в том случае, когда $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы.

Граф $\Gamma^n(a, b, c)$, в свою очередь, изоморфен одному из не изоморфных друг другу типов графов:

- $\Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- $\Gamma^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны;
- граф $\Gamma^n(a, b, c)$ изоморфен графу $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ только в том случае, когда $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а векторы $b - a$ и $c - a$ линейно независимы.

Доказательство. Ввиду предложения 1.9, все утверждения, за исключением случая $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, следуют из теорем 2.9, 3.7, 3.9 и леммы 3.8.

Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. Согласно лемме 3.8 и теореме 3.9, осталось лишь доказать, что при $q \in \mathbb{Q}$ графы $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ и $\Gamma^1(0, 1, q)$ неизоморфны. Из этого, по предложению 1.9, будет следовать, что также неизоморфны и графы $T^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ и $T^1(0, 1, q)$.

Докажем, что графы $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ и $\Gamma^1(0, 1, q)$ неизоморфны. Действительно, в графе $\Gamma^1(0, 1, q)$ при $q \in \mathbb{Q}$, как было показано в доказательстве теоремы 2.9, все вершины степени два содержатся в двух компонентах связности, одна из которых содержит клику. Напротив, в графе $\Gamma^2((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ вершины степени два лежат в трех компонентах связности, причем клика размера три не лежит ни в одной из них. Это завершает доказательство теоремы. \square

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Александру Васильевичу Михалёву и профессору Александру Эмилевичу Гутерману за интерес к задаче, а также Артёму Максимовичу Максаеву за обсуждения, ценные вопросы и предложения, которые привели к улучшению результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. И. Бунина, А. В. Михалев, А. Г. Пинус, *Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр*. М., МЦНМО 2015.
2. А. М. Максаев, В. В. Промыслов, *О тотальном и регулярном графах многочлена*. — *Фунд. прикл. мат.* **23**, No. 4 (2021), 113–142.
3. В. В. Промыслов, *Классификация регулярных графов трёхточечных множеств*. — *Интел. системы. Теория прил.* **25**, No. 4 (2021), 205–208.
4. Ф. Харари, *Теория графов*, М., Мир, 1973.
5. S. Akbari, M. Jamaali, S. A. Seyed Fakhari, *The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite*. — *Linear Algebra Appl.* **431** (2009), 1715–1718.
6. D. F. Anderson, A. Badawi, *The total graph of a commutative ring*. — *J. Algebra* **320** (2008) 2706–2719.
7. S. Akbari, M. Aryapoor, M. Jamaali, *Chromatic number and clique number of subgraphs of regular graph of matrix algebras*. — *Linear Algebra Appl.* **436** (2012) 2419–2424.
8. S. Akbari, F. Heydari, *The regular graph of a noncommutative ring*. — *Bull. Austral. Math. Soc.* **89**, No. 1 (2014), 132–140.
9. P. J. Cameron, *Research problems from the BCC22*. — *Discrete Math.* **311** (2011), 1074–1083.
10. А. Е. Гутерман, А. М. Максаев, В. В. Промыслов, *Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras*. — *Linear Algebra Appl.* **644** (2022), 1–27.
11. U. Knauer, K. Knauer, *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices*. 2nd Rev. and Ext. ed., de Gruyter, 2015.
12. I. Tomon, *On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras*. — *Linear Algebra Appl.* **475** (2015), 154–162.
13. J. Zhou, D. Wong, X. Ma, *Automorphism group of the total graph over a matrix ring*. — *Linear Multilinear Algebra* **65**, No. 3 (2017), 572–581.

Promyslov V. V. Classification of the total and regular graphs of three-point sets.

The paper studies the structures of the total and regular graphs of sets of three elements over fields of characteristic zero. The graphs themselves are classified up to isomorphism.

Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва, 101000, Россия;
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия;
Московский Центр
фундаментальной и прикладной математики,
Москва, 119991, Россия
E-mail: valentin.promyslov@gmail.com

Поступило 6 октября 2022 г.