Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

О. В. Маркова, Д. Ю. Новочадов

ГРАФЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ СУММЫ КОЛЕЦ И ПОЛУПРОСТЫХ АРТИНОВЫХ КОЛЕЦ

§1. Введение

Бинарные отношения на ассоциативных кольцах, в частности, на матричном кольце являются важным предметом исследований современной математики, активно используемым в многочисленных приложениях. На сегодняшний день эффективным способом исследовать данное отношение является изучение так называемого *графа отношения*, вершинами которого являются элементы некоторого множества, при этом две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда рассматриваемые элементы состоят в отношении.

Изучение алгебраических структур, базирующееся на исследовании соответствующих им графов отношений, находится в центре внимания математиков в течение нескольких десятилетий. Так, в последнее время активно изучаются граф отношения коммутирования и графы делителей нуля, см. работы [11–15] и их библиографию. Эти отношения тесно связаны с отношением ортогональности, исследуемым в данной работе. Напомним, что элементы r, s кольца R называются *ортогональными*, если $rs = sr = 0$. Отношение ортогональности используется в работах [5, 23, 24], в которых изучаются некоторые частичные порядки на матричной алгебре и отображения матриц, монотонных относительно этих порядков. В теории колец важную роль играет основанное на отношении ортогональности понятие ортогональной полноты [3, 4]. Условие ортогональности также встречается в линейной алгебре и функциональном анализе при изучении проекторов (операторов проектирования).

Ключевые слова: графы отношений в кольцах, граф ортогональности, прямая сумма колец, полупервичные кольца Голди, полупростые артиновы кольца.

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению No. 075-15-2022-284.

В работе [2] было введено понятие графа отношения ортогональности, получено описание возможных значений диаметров графов ортогональности коммутативных артиновых колец, исследован граф ортогональности полной матричной алгебры над произвольным полем, доказана связность и вычислены диаметры графов ортогональности некоторых классических семейств матриц.

В дальнейшем отношение ортогональности было исследовано в кольцах верхнетреугольных матриц [16] и полных кольцах матриц над телами [6], а также обобщено на тропические полукольца [17]. В работе [22] найдена группа автоморфизмов графа ортогональности конечного полупростого кольца.

В данной работе продолжено исследование графа ортогональности в терминах теории колец. Изучается поведение некоторых основных метрических свойств графов ортогональности (компоненты связности и их диаметр) при взятии прямых сумм, а также в отдельных важных классах колец (полупростые, полупервичные).

Вопрос о связности и возможных значениях диаметра полностью решен для графов ортогональности коммутативных колец, см. [2, §3]. Для некоммутативных колец изучение структуры графа ортогональности также естественно начать с исследования компонент связности, в частности, изолированных вершин.

Мы покажем, что изолированных вершин нет в графах полупростых артиновых, первичных колец и полупервичных колец Голди, однако это утверждение не распространяется на произвольные полупервичные кольца.

Отдельно мы исследуем компоненты связности и значение диаметра графа ортогональности при переходе от двух произвольных колец к их прямой сумме. Будет показано, что граф ортогональности прямой суммы колец может в общем случае состоять из изолированных вершин и одной большой связной компоненты, диаметр которой может принимать любое целое значение от 1 до 4. Найдены критерии отсутствия изолированных вершин.

Работа построена следующим образом. В §2 приведены необходимые сведения из теорий колец и графов, в частности, основные известные результаты о графе ортогональности коммутативных и матричных колец. §3 посвящён графам ортогональности полупростых и полупервичных колец: установлены достаточные условия отсутствия в них изолированных вершин, а также постоянства расстояний между вершинами подкольца при переходе ко всему кольцу. В §4 описано поведение функции диаметра графа ортогональности при взятии прямой суммы двух колец, в качестве следствия найден диаметр произвольного полупростого артинова кольца.

§2. Основные определения и вспомогательные результаты

Напомним некоторые определения из теории графов. Понятия теории графов, использованные в статье, можно найти, например, в [9, глава 2].

Граф Γ – это совокупность непустого множества вершин $V(\Gamma)$ и набора пар вершин $E(\Gamma)$ (связей между вершинами или рёбер).

Если v_1, v_2 – вершины, а $e = (v_1, v_2)$ – соединяющее их ребро, то вершина v_1 и ребро e называются *инцидентными*, вершина v_2 и ребро e тоже *инцидентны*.

Петля – ребро, для которого две инцидентные ему вершины совпадают. Сразу оговорим, что в данной статье граф – граф без кратных рёбер, но, возможно, с петлями. Граф без петель – *простой граф*.

В графе Γ *путём (маршрутом)* называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Длина маршрута (обозначается буквой d) – количество рёбер в маршруте с учётом кратности их вхождения.

Цепь – маршрут, все рёбра которого различны.

Связный граф – это граф, в котором для любой пары вершин существует соединяющая их цепь.

Компонента связности графа Γ – максимальный (по включению) связный подграф графа Γ.

Расстоянием $d(u, v)$ между двумя *различными* вершинами u и v называется длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Если такой цепи не существует, то говорят, что $d(u, v) = \infty$.

Диаметр $\operatorname{diam}(\Gamma)$ графа Γ – это максимум расстояний между вершинами для всех пар вершин.

Полный граф – простой граф, в котором каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной.

Граф Γ назовём *полным графом с петлями*, если любые две его вершины (в частности, совпадающие) соединены ребром.

Граф $\Gamma = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на две части $V = V_1 \cup V_2$ таким образом, что никакая пара различных вершин из одной части не соединена ребром. Подмножества V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа Γ.

Двудольный граф называется *полным двудольным*, если для каждой пары вершин $u \in V_1$, $v \in V_2$ существует ребро $(u, v) \in E$.

В данной статье все рассматриваемые кольца – ассоциативные кольца (не обязательно с единицей). Напомним, что элемент a кольца R называется *левым (правым) делителем нуля*, если существует ненулевой элемент $b \in R$ такой, что $ab = 0$ (соответственно, $ba = 0$). Элемент, являющийся одновременно и левым и правым делителем нуля, называется двусторонним делителем нуля. Под *редуцированным кольцом* понимаем кольцо, в котором нет делителей нуля, кроме 0, т.е. из равенства $ab = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$.

Для произвольного подмножества X кольца R, $0 \in X$, для краткости обозначим $X^0 = X \setminus \{0\}$.

Понятие *графа делителей нуля* в литературе используется для нескольких различных объектов, в данной работе так будет называться ориентированный граф с петлями, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля и в котором ребро $x \to y$ имеется тогда и только тогда, когда $xy = 0$.

Для данного кольца R напомним основные определения, связанные с графом отношения ортогональности (подробнее см. [2]).

Определение 2.1. Говорят, что два элемента $r_1 \in R$ и $r_2 \in R$ *ортогональны* ($r_1 \perp r_2$), если $r_1 r_2 = r_2 r_1 = 0$.

Через $O_R(X)$, где X – подмножество R, обозначим множество элементов из R, ортогональных каждому элементу из X.

Замечание 2.2. Нулевой элемент кольца $0 \in R$ ортогонален любому элементу кольца. Наоборот, если элемент $r \in R$ не является делителем нуля хотя бы с одной стороны, то не существует такого ненулевого элемента $x \in R$, что $xr = rx = 0$, а значит, не существует ненулевых ортогональных r элементов кольца R. Поэтому, изучая определяемый далее граф ортогональности, мы будем заранее исключать из множества вершин 0 и элементы, хотя бы с одной из сторон не являющиеся делителями нуля.

Определение 2.3 ([2, определение 2.15]). С каждым кольцом R можно связать *граф ортогональности* $O(R)$, множеством вершин которого являются все двусторонние делители нуля кольца R, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы кольца ортогональны.

Лемма 2.4 ([2, лемма 2.17]). *Множество вершин $O(R)$ пусто тогда и только тогда, когда R является кольцом без делителей нуля.*

Ниже мы приведем необходимые теоретико-кольцевые понятия и обозначения, которые будут использованы в данной работе (см., например, [7]).

Левым аннулятором подмножества X кольца R называется левый идеал $l_R(X) = \{r \in R \,|\, rx = 0 \ \forall x \in X\}$. Аналогично определяется правый аннулятор $r_R(X)$ подмножества X. В случае коммутативного кольца, $l_R(X) = r_R(X) = O_R(X)$, а в общем случае $O_R(X) = l_R(X) \cap r_R(X)$.

Кольцо R называется *артиновым слева (справа)*, если оно не содержит бесконечных убывающих цепей левых (правых) идеалов (это равносильно тому, что любое непустое множество левых (правых) идеалов в кольце R содержит минимальный элемент). Под *артиновым кольцом* мы понимаем артиново слева и справа кольцо. Например, все конечные кольца и конечномерные алгебры над полем – артиновы.

Левый идеал I кольца R называется *максимальным*, если R/I – неприводимый модуль [7, §3.1].

Радикалом Джекобсона кольца R называется пересечение всех максимальных левых (равносильно, правых) идеалов кольца R. Известно (см. [7, следствие 3.5.1]), что радикал Джекобсона артинова слева (справа) кольца R является наибольшим нильпотентным идеалом. Далее $J(R)$ обозначает радикал Джекобсона кольца R, а R^*– группу обратимых элементов кольца R. Кольцо R называется *полупростым* в смысле Джекобсона (или *полупримитивным*), если $J(R) = 0$.

Хорошо известна (см., например, [8, теорема 5.16]) теорема Молина–Веддербёрна–Артина о равносильности следующих условий для кольца R:

1) R – полупростое артиново слева кольцо;
2) R — полупростое артиново справа кольцо;
3) кольцо R изоморфно конечной прямой сумме колец матриц над телами.

Кольцо R называется *локальным*, если $R/J(R)$ – тело.

Кольцо R называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов.

Идеал P кольца R называется *первичным*, если P – собственный идеал и для любых идеалов A и B кольца R из включения $AB \subset P$ следует, что либо $A \subset P$, либо $B \subset P$. Кольцо R называется *первичным*, если 0 – его первичный идеал. Кольцо R первично тогда и только тогда, когда $1 \neq 0$ и для любых ненулевых элементов a, b кольца R существует элемент $r \in R$, такой что $arb \neq 0$ (см., например, [7, следствие в конце §3.1]).

Кольцо R называется *полупервичным*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий (см., например, [7, §3.2, предложение 2]):
1) 0 – единственный нильпотентный идеал кольца R;
2) пересечение первичных идеалов кольца R равно 0;
3) если A и B – идеалы кольца R и $AB = 0$, то $A \cap B = 0$.

Говорят, что кольцо удовлетворяет *правым условиям Голди*, если оно удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек для аннуляторных правых идеалов и не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов. Из теорем Голди [10, глава 7] следует, что полупервичное кольцо R, удовлетворяющее условиям Голди с обеих сторон, вкладывается как *двусторонний порядок* в полупростое артиново кольцо $Q = M_{n_1}(\mathbb{D}_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{D}_k)$, которое является его кольцом частных, то есть для всякого $q \in Q$ существуют элементы $a, b, c, d \in R$, такие что $q = ab^{-1} = c^{-1}d$ в кольце Q.

Для коммутативных колец исследуемый граф ортогональности совпадает с графом делителей нуля, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5 ([15, теорема 2.3]). *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Тогда граф $O(R)$ является связным, и* $\operatorname{diam} O(R) \leqslant 3$.

В работе [21] найден диаметр графа делителей нуля произвольного коммутативного кольца с единицей. Сформулируем здесь указанный результат в терминах графа ортогональности.

Теорема 2.6 ([21, теорема 2.6]). *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей.*

1) $\operatorname{diam} O(R) = 0$ *тогда и только тогда, когда R – нередуцированное кольцо, изоморфное $\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{Z}_2[t]/(t^2)$.*

2) $\operatorname{diam} O(R) = 1$ *тогда и только тогда, когда произведение любых двух различных делителей нуля равно* 0 *и R содержит по крайней мере два ненулевых делителя нуля.*

3) $\operatorname{diam} O(R) = 2$ *тогда и только тогда, когда либо* (а) R – *редуцированное кольцо, содержащее ровно два минимальных простых идеала и хотя бы три ненулевых делителя нуля, либо* (б) *множество делителей нуля кольца* R *является идеалом с ненулевым квадратом и любые два различных делителя нуля* a, b *имеют ненулевой аннулятор* $O_R(\{a, b\})$.

4) $\operatorname{diam} O(R) = 3$ *тогда и только тогда, когда в* R *найдутся делители нуля* $a \neq b$ *такие, что* $O_R(\{a, b\}) = 0$, *причем либо* (а) R – *редуцированное кольцо, содержащее больше двух минимальных простых идеалов, либо* (б) R – *нередуцированное кольцо.*

В случае артиновых колец условия из работы [21] упрощаются и принимают следующий вид.

Теорема 2.7 ([2, теорема 3.3])**.** *Пусть* R – *коммутативное артиново кольцо с единицей, не являющееся полем.*

1) $\operatorname{diam} O(R) = 0$ *тогда и только тогда, когда* R – *локальное кольцо и* $|J(R)| = 2$ *(в этом случае* R *изоморфно* $\mathbb{Z}_4$ *или* $\mathbb{Z}_2[t]/(t^2)$*).*

2) $\operatorname{diam} O(R) = 1$ *тогда и только тогда, когда либо* R – *локальное кольцо с* $J(R)^2 = 0$ *и* $|J(R)| > 2$, *либо* $R \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

3) $\operatorname{diam} O(R) = 2$ *тогда и только тогда, когда либо* R – *локальное кольцо с* $J(R)^2 \neq 0$, *либо* R *изоморфно прямой сумме двух полей, хотя бы одно из которых содержит более двух элементов.*

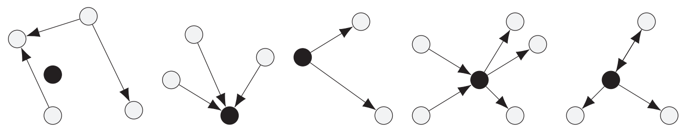
4) $\operatorname{diam} O(R) = 3$ *тогда и только тогда, когда либо* $R \cong R_1 \oplus R_2$, *где* R_1 *и* R_2 – *локальные кольца, и* $J(R_i) \neq 0$ *для некоторого* $i = 1, 2$, *либо* R *раскладывается в прямую сумму более двух локальных колец.*

Пусть теперь R – произвольное некоммутативное кольцо с ненулевыми делителями нуля. Множество вершин $O(R)$ в этом случае непусто (см. лемму 2.4), и в общем случае кольцо R разбивается на следующие непересекающиеся множества элементов (некоторые из них могут быть пустыми):

I. множества, не являющиеся вершинами графа ортогональности $O(R)$:
(1) $\mathcal{I}_R = \{r \in R : l_R(r) = r_R(r) = \{0\}\}$ – *регулярные* элементы кольца;
(2) и (3) $\mathcal{LD}_R = \{r \in R : l_R(r) \neq \{0\},\ r_R(r) = \{0\}\}$ и $\mathcal{RD}_R = \{r \in R : l_R(r) = \{0\},\ r_R(r) \neq \{0\}\}$ – односторонние делители нуля;
(4) $\{0\}$.
II. множества, являющиеся вершинами:

(1) $\mathcal{IZD}_R = \{r \in R : l_R(r) \neq \{0\},\ r_R(r) \neq \{0\},\ O_R(r) = \{0\}\}$ – изолированные вершины;
(2) $\mathcal{OZD}_R = \{r \in R : O_R(r) \neq \{0\}\}$ – неизолированные вершины.

На иллюстрации приведены схематические изображения вершин из этих множеств в графе делителей нуля (кроме вершин из $\mathcal{I}_R$, которые в него не входят).



$\mathcal{I}_R$ $\mathcal{LD}_R$ $\mathcal{RD}_R$ $\mathcal{IZD}_R$ $\mathcal{OZD}_R$

Граф ортогональности некоммутативного кольца в общем случае не обязательно связен. Для полного матричного кольца над телом компоненты его связности, а также их диаметры, были установлены в работах [2, 6].

Теорема 2.8 ([6, теорема 2.1]). *Пусть $\mathbb{D}$ – произвольное тело. Тогда при $n \geqslant 3$ граф ортогональности $M_n(\mathbb{D})$ связен,* $\operatorname{diam} O(M_n(\mathbb{D})) = 4$.

Лемма 2.9 ([2, лемма 4.1]; [6, лемма 2.2]). *Пусть $\mathbb{D}$ – тело. Граф ортогональности $O(M_n(\mathbb{D}))$ при $n = 1$ пуст. При $n = 2$ граф $O(M_n(\mathbb{D}))$ несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

(1) *множество $V_1 = V_{1a} \cup V_{1b}$, где*

$$V_{1a} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{1b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{D}^* \right\};$$

(2) *множество*

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{D}^* \right\};$$

(3) *множество*

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{D}^* \right\};$$

(4) *для каждого* $\alpha \in \mathbb{D}^*$ *множество* $V_{4,\alpha} = V_{4,\alpha,a} \cup V_{4,\alpha,b}$, *где*

$$V_{4,\alpha,a} = \left\{ \begin{pmatrix} c & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{4,\alpha,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha d \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{D}^* \right\};$$

(5) *для каждого* $\alpha \in \mathbb{D}^*$ *множество* $V_{5,\alpha} = V_{5,\alpha,a} \cup V_{5,\alpha,b}$, *где*

$$V_{5,\alpha,a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c\alpha \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{5,\alpha,b} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha d & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{D}^* \right\};$$

(6) *для каждой неупорядоченной пары* $\{\alpha, \beta\}, \alpha, \beta \in \mathbb{D}^*$, *множество* $V_{6,\alpha,\beta} = V_{6,\alpha,\beta,a} \cup V_{6,\alpha,\beta,b}$, *где*

$$V_{6,\alpha,\beta,a} = \left\{ \begin{pmatrix} -a\alpha & a \\ -\beta a\alpha & \beta a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{D}^* \right\},$$

$$V_{6,\alpha,\beta,b} = \left\{ \begin{pmatrix} -b\beta & b \\ -\alpha b\beta & \alpha b \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{D}^* \right\}.$$

При $\alpha = \beta$ *имеем* $V_{6,\alpha,\alpha} = V_{6,\alpha,\alpha,a} = V_{6,\alpha,\alpha,b}$.

Каждая компонента связности Y, *соответствующая множествам вершин* V_1, $V_{4,\alpha}$, $V_{5,\alpha}$, $V_{6,\alpha,\beta}$ *с условием* $\beta \neq \alpha$, *является полным двудольным графом с долями* Y_a *и* Y_b, *соответствующими указанным выше разбиениям* $Y = Y_a \cup Y_b$, *и имеет диаметр* 2.

Каждая компонента связности, отвечающая множествам вершин V_2, V_3 *и* $V_{6,\alpha,\alpha}$, *является полным графом с петлями и имеет диаметр* 1.

Следствие 2.10 ([6, следствие 2.3]). *Пусть* R *– простое артиново кольцо,* n *– мощность максимального множества попарно ортогональных ненулевых идемпотентов в* R *(можно также определить* n *как* $\dim_{\mathbb{D}} V$, *где* $\mathbb{D} = \mathrm{End}_R V$, V *– простой левый* R*-модуль). Тогда*
(1) *при* $n = 1$ *кольцо* R *– кольцо без делителей нуля, и граф* $O(R)$ *пуст*;
(2) *при* $n = 2$ *граф* $O(R)$ *не является связным, компоненты связности графа* $O(R)$ *имеют диаметры либо* 1 *и* 2, *если* $|\mathbb{D}| > 2$, *либо* 0 *и* 1, *если* $\mathbb{D} = \mathbb{Z}_2$;
(3) *при* $n \geqslant 3$ *граф* $O(R)$ *связен и имеет диаметр* 4.

Поэтому естественным образом возникают следующие вопросы.

Вопрос 2.11. 1. Для каких классов некоммутативных колец граф ортогональности является связным?
2. Какие значения диаметра могут иметь компоненты связности графа ортогональности для произвольных колец?

Полное исследование первого вопроса из 2.11 на данный момент представляется слишком общим, поэтому в данной статье будет начато исследование его частного случая – вопроса об отсутствии изолированных вершин в графе $O(R)$. Отметим отдельно, что вершину графа $O(R)$, из которой исходит единственная петля, мы не считаем изолированной. Для $a \in O(R)$ по определению $l_R(a) \neq \{0\}$ и $r_R(a) \neq \{0\}$, и при нашем соглашении условие, что вершина изолирована, записывается как $O_R(a) = l_R(a) \cap r_R(a) = \{0\}$.

Вопрос 2.12. Для каких классов колец ортогонализатор любого двустороннего делителя нуля отличен от нуля? Иными словами, для каких колец R выполнено $\mathcal{IZD}_R = \varnothing$?

Решению этого вопроса для нескольких известных классов колец посвящен §3. Ответ на второй вопрос из 2.11 будет дан в §4 для колец, разложимых в прямую сумму. В частности, в качестве следствия будет найден диаметр произвольного полупростого артинова кольца.

§3. Изолированные вершины в графе ортогональности

Поскольку вопрос об ортогонализаторах связан с условиями на аннуляторы элементов, в данной статье будут рассмотрены кольца, удовлетворяющие некоторым условиям на аннуляторы, а именно, первичные, полупервичные кольца и кольца Голди. Мы покажем, что вопрос 2.12 решается положительно для первичных колец, но на класс полупервичных колец утверждение не обобщается. При этом будет показано, что если в классе полупервичных колец рассматривать кольца с условиями Голди, то вопрос 2.12 также решается положительно. Отдельно мы покажем, что утверждение справедливо в классе полупростых артиновых колец.

Для первичных колец утверждение об отсутствии изолированных вершин достаточно очевидно.

Предложение 3.1. *Пусть R – первичное кольцо. Если для $a \in R$ выполнены условия $l_R(a) \neq \{0\}$ и $r_R(a) \neq \{0\}$, то $O_R(a) \neq \{0\}$ и, следовательно, $a \in \mathcal{OZD}_R$.*

Доказательство. Пусть $b, c \neq 0$, $b \in l_R(a)$, $c \in r_R(a)$. Тогда из условия первичности кольца следует, что $cRb \neq \{0\}$, и для любого $x \in cRb$ имеем $ax = xa = 0$, т.е. $x \in O_R(a)$ и $O_R(a) \neq \{0\}$. $\square$

Приведем пример, показывающий, что на полупервичные кольца это условие не распространяется.

Пример 3.2. Пусть R, S – такие кольца, что в R есть элемент a с условиями $l_R(a) \neq \{0\}$, $r_R(a) = \{0\}$, в S – элемент b с условиями $l_S(b) = \{0\}$, $r_S(b) \neq \{0\}$. Тогда для элемента $t = (a, b)$ кольца $T = R \oplus S$ получаем $l_T(t) = l_R(a) \oplus \{0\} \neq \{0\}$, $r_T(t) = \{0\} \oplus r_S(b) \neq \{0\}$, но $O_T(t) = l_T(t) \cap r_T(T) = \{(0, 0)\}$.

Рассмотрим счётномерное линейное пространство V над некоторым полем $\mathbb{F}$. Возьмём $R = S = \mathrm{End}\,(V)$ и $T = R \oplus R$. Хорошо известно, что $\mathrm{End}\,(V)$ – первичное кольцо, и прямое произведение первичных колец является полупервичным кольцом.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ – базис V. Рассмотрим $a, b \in R$, $a(e_i) = e_{i+1}$, $b(e_1) = 0$, $b(e_{i+1}) = e_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $l_R(a) \neq \{0\}$, поскольку содержит элементы r с условием $0 = r(e_2) = r(e_3) = \cdots$ и произвольным заданием $r(e_1)$; аналогично, $r_R(b) \neq \{0\}$, поскольку содержит всевозможные элементы r с условием $r(e_i) = \lambda_i e_1$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$. С другой стороны, $r_R(a) = \{0\}$, поскольку если $r \neq 0$, то существует базисный вектор e_j, для которого $r(e_j) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i \neq 0$, откуда $ar(e_j) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_{i+1} \neq 0$; аналогично, $l_R(b) = \{0\}$, поскольку $\mathrm{Im}\, b = V$.

Из построенного примера также следует, что даже при условии связности графов ортогональности слагаемых граф ортогональности их прямой суммы может содержать изолированные вершины, поскольку построенные элементы a, b не являлись вершинами графов ортогональности слагаемых.

В случае полупростого артинова кольца вопрос об изолированных вершинах легко решается с помощью теоремы Молина–Веддербёрна–Артина.

Теорема 3.3. *Пусть $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_k$ – полупростое артиново кольцо, $Q_i \cong M_{n_i}(\mathbb{D}_i)$, $\mathbb{D}_i$ – тела. Тогда $\mathcal{IZD}_Q = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $x \in Q$ имеет нулевой ортогонализатор. Тогда $r_Q(x)Ql_Q(x) = r_Q(x)l_Q(x) = \{0\}$ (произведения рассматриваются как произведения односторонних идеалов, то есть конечные суммы попарных произведений элементов множителей). Образы проекций $l_Q(x)$ и $r_Q(x)$ на матричную алгебру $M_{n_i}(\mathbb{D}_i)$ из разложения Q – векторные пространства над $\mathbb{D}_i$ (левое и правое соответственно) размерности $n_i(n_i - \operatorname{rank} X_i)$ каждое: $r_{Q_i}(X_i)$ состоит из матриц, у которых столбцы принадлежат $\ker X_i$, а $l_{Q_i}(X_i)$ – из матриц, у которых строки принадлежат "левому ядру" X_i (подробнее о ранге над телом см. [1, глава I, §5]).

Если $r_Q(x)l_Q(x) = \{0\}$, то $r_{Q_i}(X_i)l_{Q_i}(X_i) = \{0\}$ для каждого i из разложения. Если матрица X_i невырождена, то $l_Q(x) = r_Q(x) = \{0\}$, и это равенство выполнено. Если же X_i вырождена, то существуют ненулевой $\mathbb{D}_i$-левый ковектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i})$ и ненулевой $\mathbb{D}_i$-правый вектор $(\beta_1, \dots, \beta_{n_i})^T$, для которых $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i})X_i = X_i(\beta_1, \dots, \beta_{n_i})^T = 0$. Пусть $\rho, \lambda \in M_{n_i}(\mathbb{D}_i)$, где

$$\rho = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n_i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{n_i} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\rho\lambda$ ранга 1 принадлежит $O_{Q_i}(X_i)$. Как среди β_j, так и среди α_j есть ненулевые координаты, и на пересечении соответствующих строки и столбца в произведении также будет находиться ненулевой элемент, поскольку $\mathbb{D}_i$ – тело. Поэтому $0 \neq \rho\lambda \in r_Q(x)l_Q(x)$, что противоречит равенству $r_Q(x)l_Q(x) = 0$. Следовательно, все матрицы X_i невырождены, и x, не являясь делителем нуля, не входит в граф ортогональности. □

Пусть теперь R – полупервичное кольцо Голди (двустороннее). Воспользуемся теоремами Голди и вложим его в полупростое артиново кольцо Q. Как мы доказали выше, в $O(Q)$ не может быть изолированных вершин, и поэтому вопросы о делителях нуля естественно поставить и для отношения ортогональности на кольце R. Наличие условий Голди позволяет немедленно установить следующее свойство R.

Предложение 3.4. *В полупервичном кольце Голди R нет односторонних делителей нуля.*

Доказательство. Если левый или правый аннулятор элемента $x \in R$ нулевой, то по [10, лемма 7.2.3] x – регулярный элемент кольца. □

Обратим внимание, что важно выполнение условий Голди с обеих сторон, поскольку в полупервичном правом кольце Голди леворегулярный элемент может являться правым делителем нуля [20, упр. 4, с. 326]. Перейдём к изолированным вершинам.

Теорема 3.5. *Пусть R – полупервичное кольцо Голди. Тогда $\mathcal{IZD}_R = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное; пусть $x \in \mathcal{IZD}_R$. По теореме Голди вложим R в своё полупростое классическое кольцо частных Q в качестве правого порядка.

Введём обозначения $S = l_R(x)$, $T = r_R(x)$, тогда $TRS = TS \subseteq O(x) = \{0\}$, и SRT – идеал в R с нулевым квадратом, также равный $\{0\}$ в силу полупервичности R. Рассмотрим $L = TQSR$ – правый R-подмодуль в Q. Имеем $L^2 = TQ(SRT)QSR = \{0\}$, откуда следует, что $(L \cap R)^2 = \{0\}$, и выполнено $L \cap R = \{0\}$ (так как это правый идеал в R). Далее, ненулевой элемент из L при домножении справа на свой знаменатель давал бы ненулевой элемент из $L \cap R$, поэтому и $L = \{0\}$, после чего аналогично устанавливается равенство $TQS = \{0\}$.

Но $TQS = r_Q(x) l_Q(x)$, так как R – двусторонний порядок в Q: всякий элемент из $r_Q(x)$ представляется в виде ab^{-1}, $a, b \in R$, поэтому a обязан лежать в $r_R(x)$, и аналогично для $l_R(x)$. По доказательству теоремы 3.3, элемент x обязан быть регулярным, что исключает его из графа ортогональности. Получаем противоречие. $\square$

Идея вышеизложенного доказательства взята из работы Бейдара и Михалёва [4], в которой доказывается равносильность равенств $SQT = 0$, $SRT = 0$, $TQS = 0$, $TRS = 0$ для произвольного полупервичного кольца R, его полного кольца частных Q и произвольных подмножеств $S, T \subseteq Q$.

В более частном случае возможно продвинуться дальше и установить, что ситуация с компонентами связности $O(R)$ и их диаметрами полностью идентична случаю полупростых колец, который будет непосредственно разобран в следующих разделах.

Если R – полупервичное правое кольцо Голди, то, по теореме Фейса–Утуми ([19, теорема 3]; [18, стр. 152, теорема 7.6A]), в R содержится подкольцо $P = M_{n_1}(F_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(F_k)$, где F_i – правый порядок в теле $\mathbb{D}_i$ из разложения Q, кольца частных для R. При дополнительных предположениях на порядки F_i возможно получить ответ на вопрос о графе ортогональности кольца R. Напомним, что, по определению правого порядка, всякое $d \in \mathbb{D}_i$ может быть представлено в виде $d = ab^{-1}$, где $a, b \in F_i$.

Граф ортогональности подкольца естественным образом вкладывается в граф ортогональности всего кольца. Назовём такое вложение *изометрическим*, если расстояния между каждой парой вершин подкольца в обоих графах равны (априори они могли бы уменьшиться за счёт появления путей через новые вершины). Изометрические вложения сохраняют метрические характеристики меньшего графа, в частности, компоненты связности и их диаметр и могут быть использованы для непосредственного переноса этих свойств с графа большего кольца, структура которого может быть проще. Оказывается, что вложения с подобным свойством достаточно распространены.

Теорема 3.6. *Пусть все F_i таковы, что в разложении элементов из $\mathbb{D}_i$ знаменатель b всегда можно брать из центра F_i (и, следовательно, F_i является двусторонним порядком в $\mathbb{D}_i$). Тогда естественное вложение графа $O(R)$ в $O(Q)$ изометрическое.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь $A_1 \perp A_2 \perp \ldots \perp A_m$ в графе $O(Q)$. Фиксируем индекс j от 1 до k и рассмотрим все элементы матриц в j-х матричных компонентах A_i для всех i, кроме 1 и m. У этих $(m-2)n_j^2$ элементов есть центральный “общий знаменатель” c относительно F_j (например, можно взять произведение центральных знаменателей всех этих элементов). Теперь домножим все j-е матричные компоненты в A_i на этот общий знаменатель. Легко видеть, что соотношения ортогональности сохранятся (из-за центральности), а ненулевые матричные компоненты остаются ненулевыми (из-за того, что скаляры – элементы тела). Проводя аналогичные операции для всех индексов j, получим путь $A_1 \perp \tilde{A}_2 \perp \ldots \perp \tilde{A}_{m-1} \perp A_m$ той же длины уже в графе $O(R)$. □

Добавленное ограничение на порядки F_i нетривиально, оно, например, исключает порядок элементов без отрицательных степеней в теле, подкрученных автоморфизмом бесконечного порядка рядов Лорана над полем (в центре такого порядка есть только константы). Ограничение тривиально выполнено в полях, но имеет место и в некоторых других случаях.

Предложение 3.7. *Пусть A – тело, содержащее $\mathbb{Q}$. Тогда всякий правый порядок в A, алгебраичный над $\mathbb{Q}$, удовлетворяет условию центральности знаменателей.*

Доказательство. Пусть F – такой порядок, $q = ab^{-1}$, $a, b \in F$, – произвольный ненулевой элемент A. Так как элемент b $\mathbb{Q}$-алгебраичен, то $\sum\limits_{i=0}^{s} \beta_i b^i = 0$, где $\beta_0 \neq 0$. Это равносильно равенству $b^{-1} = -\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i/\beta_0 b^{i-1}$, из которого следует, что $\mathbb{Q}$-линейная оболочка F равна A. При этом F замкнуто относительно $\mathbb{Z}$-линейных комбинаций, следовательно, знаменатель для элемента A всегда можно взять из $\mathbb{Z}$, и он будет централен. □

Это же рассуждение показывает, что в теле, алгебраичном над (простым) конечным полем, нетривиальные порядки отсутствуют, что, по теореме Фейса–Утуми, переносится и на матричные кольца над такими телами.

§4. Граф ортогональности прямой суммы колец

В этом параграфе мы исследуем компоненты связности, в частности, изолированные вершины, и возможные значения диаметра графа ортогональности прямой суммы колец. Исследование проводим отдельно для трёх случаев, в зависимости от отсутствия или наличия делителей нуля в прямых слагаемых.

Лемма 4.1. *Пусть $R, S \neq \{0\}$ – кольца без делителей нуля. Тогда граф $O(R \oplus S)$ является связным;* $\operatorname{diam} O(R \oplus S) = 1$, *если* $R \cong S \cong \mathbb{Z}_2$, *и* $\operatorname{diam} O(R \oplus S) = 2$ *в противном случае.*

Доказательство. Поскольку для $(r, s) \in R \oplus S$ имеем $l_{R\oplus S}((r, s)) = l_R(r) \oplus l_S(s)$ и $r_{R\oplus S}((r, s)) = r_R(r) \oplus r_S(s)$, то $l_{R\oplus S}((r, s)) \neq 0$ ($r_{R\oplus S}((r, s)) \neq 0$) тогда и только тогда, когда $l_R(r) \neq 0$ или $l_S(s) \neq 0$ ($r_R(r) \neq 0$ или $r_S(s) \neq 0$), что для колец без делителей нуля выполнено, если и только если $r = 0$ или $s = 0$.

Следовательно, вершинами графа $O(R \oplus S)$ будут $(r, 0)$ при $r \in R^0$ и $(0, s)$ при $s \in R^0$. Тогда $d((r, 0), (0, s)) = 1$, для всех ненулевых $r \in R$, $s \in S$. Если в кольце R есть два различных ненулевых элемента r_1 и r_2, то $d((r_1, 0), (r_2, 0)) > 1$, поскольку $r_1 r_2 \neq 0$, но, с другой стороны, существует путь $(r_1, 0) \perp (0, s) \perp (r_2, 0)$ длины 2, где s – произвольный ненулевой элемент кольца S. Аналогично для элементов вида $(0, s)$.

Отсюда следует, что если $\max\{|R|, |S|\} \geqslant 3$, то такие элементы на расстоянии 2 существуют, и $\operatorname{diam} O(R \oplus S) = 2$.

В противном случае $|R| = |S| = 2$, и остаётся заметить, что кольцо из двух элементов без делителей нуля изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_2$. □

Из доказательства леммы 4.1 видно, что граф ортогональности такой прямой суммы всегда является полным двудольным.

Перейдём к более сложному случаю, когда одно из прямых слагаемых содержит делители нуля.

Теорема 4.2. *Пусть $R, S \neq \{0\}$ – такие кольца, что ровно в одном из них, для определённости в R, нет делителей нуля. Тогда граф ортогональности кольца $T = R \oplus S$*
(1) *в общем случае состоит из изолированных вершин $\mathcal{IZD}_T = R^0 \times \mathcal{IZD}_S$ и связной компоненты, задаваемой множеством вершин*

$$\mathcal{OZD}_T = [R^0 \times \mathcal{OZD}_S] \cup [0 \times S^0] \cup [R^0 \times 0];$$

(2) *является связным и совпадает со своей связной компонентой $O(\mathcal{OZD}_T)$, если и только если граф ортогональности кольца S не имеет изолированных вершин;*
(3) *компонента $O(\mathcal{OZD}_T)$ имеет диаметр*

- 2, *если $\mathcal{OZD}_S = S^0$, $\operatorname{diam} O(S) \leqslant 2$ и $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) \neq \varnothing$ для любых $s_1, s_2 \in \mathcal{OZD}_S$;*
- 3, *если $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \leqslant 3$ и выполнено хотя бы одно из следующих трех условий: $\mathcal{OZD}_S \neq S^0$, или $\operatorname{diam} O(S) \geqslant 3$, или существуют $s_1, s_2 \in \mathcal{OZD}_S$, такие что $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) = \varnothing$;*
- 4, *если $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \geqslant 4$ (в частности, если граф $O(\mathcal{OZD}_S)$ не является связным).*

Доказательство. Рассмотрим элемент $(r, s) \in T$, являющийся вершиной графа $O(T)$. Аналогично рассуждению из леммы 4.1, $l_T((r, s)) = l_R(r) \oplus l_S(s) \neq 0$ и $r_T((r, s)) = r_R(r) \oplus r_S(s) \neq 0$. Поэтому вершинами графа $O(T)$ будут элементы $(0, s)$, $s \in S^0$, и (r, s), $r \in R^0$, $s \in \{0\} \cup \mathcal{IZD}_S \cup \mathcal{OZD}_S$.

Для вершин $(r, s) \in R^0 \times \mathcal{IZD}_S$ получаем, что $l_T((r, s)) = \{0\} \oplus l_S(s)$ и $r_T((r, s)) = \{0\} \oplus r_S(s)$, $O_T((r, s)) = (\{0\} \oplus l_S(s)) \cap (\{0\} \oplus r_S(s)) = \{0\}$, значит такие вершины изолированы.

I. Вычислим расстояния между неизолированными вершинами всевозможных видов.

(1) Пусть хотя бы одна из вершин имеет вид $(r, 0)$. Тогда

(a) $d((r,0),(0,s)) = 1$ для всех $r \in R^0$, $s \in S^0$.

(b) Для $A_1 = (r_1, 0)$, $A_2 = (r_2, 0)$, $r_1, r_2 \in R^0$, имеем $A_1 A_2 \neq 0$, так как $r_1 r_2 \neq 0$, т.е. $d(A_1, A_2) > 1$, но существует путь $A_1 \perp (0, s) \perp A_2$ для любого $s \in S^0$, значит, $d(A_1, A_2) = 2$.

(c) Для $A_1 = (r_1, 0)$, $A_2 = (r_2, s_2)$, $r_1, r_2 \in R^0$, $s_2 \in \mathcal{OZD}_S$, имеем $A_1 A_2 \neq 0$, но существует путь $A_1 \perp (0, s) \perp A_2$ для любого $s \in O_S^0(s_2)$, значит, $d(A_1, A_2) = 2$.

(2) Пусть хотя бы одна из вершин имеет вид (r, s), $r \in R^0, s \in \mathcal{OZD}_S$. Тогда

(a) Для $A_1 = (r_1, s_1)$, $A_2 = (0, s_2)$, $r_1 \in R^0$, $s_1 \in \mathcal{OZD}_S$, $s_2 \in S^0$, имеем:

- $d(A_1, A_2) = 1$, если s_2 – делитель нуля и $d(s_1, s_2) = 1$ в графе $O(S)$;
- из A_1 рёбра выходят только в вершины вида $(0, s_3)$, $s_3 \in O_S^0(s_1)$;
- если для какой-то вершины s_3 в $O(S)$ имеем $s_2 \in O_S^0(s_3)$, то существует путь $A_1 \perp (0, s_3) \perp A_2$ длины 2;
- всегда существует путь $A_1 \perp (0, s_3) \perp (r, 0) \perp A_2$ длины 3.

(b) Для $A_1 = (r_1, s_1)$, $A_2 = (r_2, s_2)$, $r_1, r_2 \in R^0, s_1, s_2 \in \mathcal{OZD}_S$, имеем:

- $A_1 A_2 \neq 0$, так как $r_1 r_2 \neq 0$, т.е. $d(A_1, A_2) > 1$;
- из A_1 и A_2 рёбра выходят только в вершины вида $(0, s)$;
- если $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) \neq \varnothing$, то, взяв $s_3 \in O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2)$, получим путь $A_1 \perp (0, s_3) \perp A_2$ длины 2;
- если $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) = \varnothing$, то, взяв $s_3 \in O_S^0(s_1)$, $s_4 \in O_S^0(s_2)$, получим либо путь $A_1 \perp (0, s_3) \perp (0, s_4) \perp A_2$ длины 3 в том случае, когда $s_3 s_4 = 0 = s_4 s_3$, либо путь $A_1 \perp (0, s_3) \perp (r, 0) \perp (0, s_4) \perp A_2$ длины 4 в противном случае.

(3) Вершины вида $(0, s)$:
Для $A_1 = (0, s_1)$, $A_2 = (0, s_2)$, $s_1, s_2 \in S^0$, имеем путь $A_1 \perp (r, 0) \perp A_2$ для любого $r \in R^0$, значит, $d(A_1, A_2) \leqslant 2$.

Таким образом, мы доказали, что компонента $O(\mathcal{OZD}_T)$ является связной и имеет диаметр не больше 4, причём от структуры кольца R значение диаметра не зависит. Заметим, что для любого кольца S

с делителями нуля множество $\mathcal{OZD}_S$ непусто (следует из доказательства [2, лемма 2.17]), поэтому $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) \geqslant 2$ (есть вершины из пункта 1(c) для любых колец R и S). Вершины из пунктов 1 и 3 значение 2 для $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T)$ не увеличат, то есть нужно рассматривать, для каких колец S реализуются возможности из пункта 2.

II. Исследуем все три возможности для значения диаметра $O(\mathcal{OZD}_T)$.

(1) Равенство $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) = 2$ возможно тогда и только тогда, когда в пункте (I.2.a) $\operatorname{diam} O(S) \leqslant 2$ и $\mathcal{OZD}_S = S^0$ и в пункте (I.2.b) для любых $s_1, s_2 \in \mathcal{OZD}_S$ выполнено $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) \neq \varnothing$.

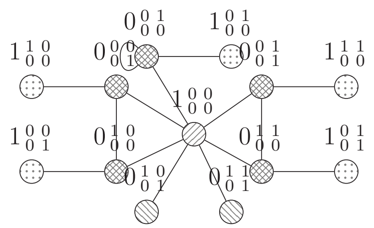
(2) Согласно доказанному в (I.2.b), равенство $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) = 4$ равносильно наличию элементов $s_1, s_2 \in \mathcal{OZD}_S$ таких, что $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) = \varnothing$ и никакие два элемента $s_3 \in O_S^0(s_1)$, $s_4 \in O_S^0(s_2)$ не ортогональны. Если бы $d(s_1, s_2) = 1$, то s_1 и s_2 были бы ортогональны, и можно было бы взять $s_3 = s_2$, $s_4 = s_1$, противоречие, поэтому $d(s_1, s_2) > 1$. В этом случае, в терминах расстояний между вершинами, условие $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) = \varnothing$ означает, что $d(s_1, s_2) \neq 2$, откуда $d(s_1, s_2) > 2$, а условие отсутствия ортогональных элементов $s_3 \in O_S^0(s_1)$, $s_4 \in O_S^0(s_2)$ означает, что s_1 и s_2 нельзя соединить путём длины 3. Таким образом, $d(s_1, s_2) > 3$, или, эквивалентно, $d(s_1, s_2) \geqslant 4$, что соответствует условию $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \geqslant 4$.

(3) Равенство $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) = 3$ равносильно выполнению двух неравенств $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) > 2$ и $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) < 4$. Как показано выше, условие $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T) < 4$ означает, что $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) < 4$, т.е. $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \leqslant 3$. При этом невыполнение равенства $\operatorname{diam} O\ (\mathcal{OZD}_T) = 2$ равносильно тому, что либо $\mathcal{OZD}_S \neq S^0$, либо $\operatorname{diam} O(S) \geqslant 3$, либо существуют $s_1, s_2 \in \mathcal{OZD}_S$, такие что $O_S^0(s_1) \cap O_S^0(s_2) = \varnothing$.

□

Перед тем как перейти к наиболее общему случаю, приведём примеры реализуемости всех возможных значений диаметра. Диаметра 2 или 3 легко добиться уже для коммутативных колец (можно взять $R = \mathbb{Z}_2$ и $S = O_2$ – кольцо с нулевым умножением порядка 2 либо $S = \mathbb{Z}_4$ соответственно). Приведем некоммутативный пример диаметра 4.

Пример 4.3. Пусть $R = \mathbb{Z}_2$, $S = T_2(\mathbb{Z}_2)$ – кольцо из 8 верхнетреугольных матриц. Тогда $\mathcal{IZD}_S = \varnothing$ (жорданова клетка не является изолированной, так как её квадрат нулевой), $|O(S)| = 5$, $O(S)$ состоит из трёх компонент связности. Для $T = R \oplus S$ имеем следующий граф:



Легко видеть, что его диаметр равен 4 (например, путь $(1, \begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}) \perp (0, \begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}) \perp (1, \begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}) \perp (0, \begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}) \perp (1, \begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix})$ кратчайший). При этом между отдельными парами вершин из $\mathcal{C}_1$ есть и более короткие пути, однако на диаметр они не влияют.

Перейдём к наиболее общему случаю.

Лемма 4.4. *Пусть R, S – кольца, в каждом из которых есть делители нуля (т.е. графы $O(R)$ и $O(S)$ непусты). Тогда граф ортогональности кольца $T = R \oplus S$ состоит из изолированных вершин*

$$\mathcal{IZD}_T = [\mathcal{LD}_R \times \mathcal{RD}_S] \cup [\mathcal{RD}_R \times \mathcal{LD}_S] \cup [\mathcal{IZD}_R \times \mathcal{IZD}_S] \cup \\ [(\mathcal{I}_R \cup \mathcal{LD}_R \cup \mathcal{RD}_R) \times \mathcal{IZD}_S] \cup [\mathcal{IZD}_R \times (\mathcal{I}_S \cup \mathcal{LD}_S \cup \mathcal{RD}_S)]$$

и множества $\mathcal{OZD}_T = [\mathcal{OZD}_R \times S] \cup [R \times \mathcal{OZD}_S] \cup [0 \times S^0] \cup [R^0 \times 0]$.

Доказательство. Пусть $O_T((r,s)) = 0$, тогда $O_R(r) = 0$ и $O_S(s) = 0$, что эквивалентно $r \in \mathcal{I}_R \cup \mathcal{LD}_R \cup \mathcal{RD}_R \cup \mathcal{IZD}_R$, $s \in \mathcal{I}_S \cup \mathcal{LD}_S \cup \mathcal{RD}_S \cup \mathcal{IZD}_S$.

Если $(r,s) \in \mathcal{I}_R \times \mathcal{I}_S$, то $(r,s) \in \mathcal{I}_T$, аналогично,

$$(r,s) \in \mathcal{I}_R \times (\mathcal{LD}_S \cup \mathcal{RD}_S) \Rightarrow (r,s) \in \mathcal{LD}_T \cup \mathcal{RD}_T,$$
$$(r,s) \in (\mathcal{LD}_R \cup \mathcal{RD}_R) \times \mathcal{I}_S \Rightarrow (r,s) \in \mathcal{LD}_T \cup \mathcal{RD}_T,$$
$$(r,s) \in \mathcal{LD}_R \times \mathcal{LD}_S \Rightarrow (r,s) \in \mathcal{LD}_T,$$
$$(r,s) \in \mathcal{RD}_R \times \mathcal{RD}_S \Rightarrow (r,s) \in \mathcal{RD}_T,$$

и, как отмечено выше, никакой из этих элементов по определению не будет вершиной графа ортогональности $O(T)$.

Если $(r,s)\in\mathcal{LD}_R\times\mathcal{RD}_S$ либо $(r,s)\in\mathcal{RD}_R\times\mathcal{LD}_S$, то $l_T((r,s))\neq 0$, $r_T((r,s))\neq 0$, но $O_T((r,s))=0$, и $(r,s)\in\mathcal{IZD}_T$, как показано в примере 3.2. Для элементов $(r,s)\in(\mathcal{I}_R\cup\mathcal{LD}_R\cup\mathcal{RD}_R)\times\mathcal{IZD}_S$ и $(r,s)\in\mathcal{IZD}_R\times(\mathcal{I}_S\cup\mathcal{LD}_S\cup\mathcal{RD}_S)$ также $l_T((r,s))\neq 0, r_T((r,s))\neq 0$, но $O_T((r,s))=0$, и $(r,s)\in\mathcal{IZD}_T$. Наконец, элементы $\mathcal{IZD}_R\times\mathcal{IZD}_S$ также принадлежат $\mathcal{IZD}_T$.

Для остальных ненулевых элементов $(r,s)\in T$ имеем $O_T((r,s))\neq 0$. Это будут элементы из $\mathcal{OZD}_R\times S$, $0\times S^0$, $R^0\times 0$ и $R\times\mathcal{OZD}_S$. □

Обозначение 4.5. Пусть R,S – ненулевые кольца, в каждом из которых есть делители нуля (графы $O(R)$ и $O(S)$ непусты). Положим $T=R\oplus S$. Вершины графа $O(\mathcal{OZD}_T)$ можно разбить на следующие непересекающиеся множества:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{(\alpha,0)|\ \alpha\in R^0\setminus\mathcal{OZD}_R\},\\
\mathcal{A}_2 &= \{(0,\beta)|\ \beta\in S^0\setminus\mathcal{OZD}_S\},\\
\mathcal{B}_1 &= \{(\mu,0)|\ \mu\in\mathcal{OZD}_R\},\\
\mathcal{B}_2 &= \{(0,\nu)|\ \nu\in\mathcal{OZD}_S\},\\
\mathcal{C}_1 &= \{(\alpha,\nu)|\ \alpha\in R^0\setminus\mathcal{OZD}_R,\nu\in\mathcal{OZD}_S\},\\
\mathcal{C}_2 &= \{(\mu,\beta)|\ \mu\in\mathcal{OZD}_R,\beta\in S^0\setminus\mathcal{OZD}_S\},\\
\mathcal{D} &= \{(\mu,\nu)|\ \mu\in\mathcal{OZD}_R,\nu\in\mathcal{OZD}_S\}.
\end{aligned}$$

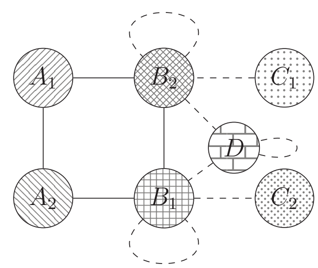
С точки зрения отношения ортогональности, элементы внутри каждого из этих семи классов обладают сходными свойствами. Левая из следующих таблиц иллюстрирует результат леммы 4.4; в правой подклассы из леммы 4.4 сгруппированы в соответствии с данными выше определениями $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}$.

	0	$\mathcal{I}_S$	$\mathcal{LD}_S$	$\mathcal{RD}_S$	$\mathcal{IZD}_S$	$\mathcal{OZD}_S$
0	0	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$
$\mathcal{I}_R$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{LD}$	$\mathcal{RD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{OZD}$
$\mathcal{LD}_R$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{LD}$	$\mathcal{LD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{OZD}$
$\mathcal{RD}_R$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{RD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{RD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{OZD}$
$\mathcal{IZD}_R$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{IZD}$	$\mathcal{OZD}$
$\mathcal{OZD}_R$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$	$\mathcal{OZD}$

$\rightsquigarrow$

	0	$S^0\setminus\mathcal{OZD}_S$	$\mathcal{OZD}_S$
0	0	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{B}_2$
$R^0\setminus\mathcal{OZD}_R$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{IZD}\cup\ldots$	$\mathcal{C}_1$
$\mathcal{OZD}_R$	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{D}$

Последнюю из таблиц удобнее представить в виде графа с петлями уже между классами вершин, в котором есть два типа рёбер: *сплошное* ребро между классами X, Y означает, что в графе ортогональности кольца T каждая вершина из X соединена с каждой вершиной из Y; *прерывистое* – что каждая вершина из X имеет в $O(T)$ хотя бы одну смежную вершину в Y и наоборот; *отсутствие* ребра – что рёбер из вершин X в вершины Y нет вовсе. Из определений классов легко понять, что отношения между семью классами вершин исчерпываются тремя этими типами, и построить для общего случая (когда в каждом из колец R, S есть ненулевые элементы вне $\mathcal{OZD}$) граф этих семи классов. На изображениях графов ортогональности в данной статье, приведённых в качестве примеров, узорами обозначены классы, к которым принадлежат вершины графа.



Далее с помощью этого графа мы исследуем структуру всего графа ортогональности. В тех случаях, когда хотя бы в одном из колец ненулевые элементы вне $\mathcal{OZD}$ отсутствуют, некоторые из семи этих классов исчезают, однако доказательство легко распространяется и на эти случаи.

Лемма 4.6. *Пусть R, S – ненулевые кольца, в каждом из которых есть делители нуля (графы $O(R)$ и $O(S)$ непусты). Тогда компонента графа $O(R \oplus S)$, соответствующая множеству вершин $\mathcal{OZD}_{R\oplus S}$, является связной и имеет диаметр не более 4.*

Доказательство. Положим $T = R \oplus S$. В обозначениях 4.5 вычислим расстояния между вершинами всевозможных видов.

(1) Заметим, что $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i \subset O_T(\mathcal{A}_{3-i}) \cap O_T(\mathcal{B}_{3-i})$, $i = 1, 2$, поэтому $d(a, b) = 1$ для любых $a \in \mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$, $b \in \mathcal{A}_{3-i} \cup \mathcal{B}_{3-i}$, $i = 1, 2$.

(2) Любые две различные вершины $b_1 = (\mu_1, 0)$, $b_2 = (\mu_2, 0) \in \mathcal{B}_1$ можно соединить путём $b_1 \perp (0, s) \perp b_2$ (для произвольного элемента $s \in S^0$) или, если μ_1 и μ_2 связаны в $O(R)$ путём $\mu_1 \perp u_1 \perp \ldots \perp u_k \perp \mu_2$, то путём $b_1 \perp (u_1, 0) \perp \ldots \perp (u_k, 0) \perp b_2$, поэтому $d(b_1, b_2) \leqslant \min\{d(\mu_1, \mu_2), 2\} \leqslant \min\{\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_R), 2\}$.

(3) Аналогично пункту (2), любые две различные вершины $b_1 = (0, \nu_1)$, $b_2 = (0, \nu_2) \in \mathcal{B}_2$ можно соединить путём $b_1 \perp (r, 0) \perp b_2$ (для произвольного элемента $r \in R^0$) или, если ν_1 и ν_2 связаны в графе $O(S)$ путём $\nu_1 \perp v_1 \perp \ldots \perp v_l \perp \nu_2$, то путём $b_1 \perp (v_1, 0) \perp \ldots \perp (v_l, 0) \perp b_2$, поэтому

$$d(b_1, b_2) \leqslant \min\{d(\nu_1, \nu_2), 2\} \leqslant \min\{\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S), 2\}.$$

(4) Аналогично пунктам 2 и 3, для $i = 1, 2$ произвольную вершину $a_1 \in \mathcal{A}_i$ можно соединить путём $a_1 \perp (0, s) \perp a_2$ (либо путём $a_1 \perp (r, 0) \perp a_2$) с вершиной $a_2 \in \mathcal{A}_i$ для произвольно выбранных элементов $r \in R^0$, $s \in S^0$, но, по определению, нельзя соединить путём длины 1, поэтому $d(a_1, a_2) = 2$.

(5) При $i = 1, 2$ для вершины $a \in \mathcal{A}_i$ и вершины $b \in \mathcal{B}_i$ имеем $O_T(a) = 0 \times R$, $O_T(a) \cap \mathcal{B}_i = \varnothing$, поэтому $d(a, b) \geqslant 2$. С другой стороны, a и b соединяются путём $a \perp (0, s) \perp b$ (либо $a \perp (r, 0) \perp b$) для произвольно выбранных элементов $r \in R^0$, $s \in S^0$, поэтому $d(a, b) = 2$.

Таким образом, мы построили пути и оценили расстояния между любыми вершинами из первых четырёх групп.

(6) Для произвольной вершины $c = (\alpha, \nu) \in \mathcal{C}_1$ имеем $O_T(c) = 0 \times O_S(\nu) \subseteq \mathcal{B}_2$, т.е. вершину c можно соединить путём длины 1 с некоторой вершиной $b \in \mathcal{B}_2$ и нельзя соединить путём длины 1 ни с одной вершиной из других групп. Тогда для произвольной вершины $a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1$ имеем $d(c, a) = 2$, для $a \in \mathcal{A}_2$ выполнено $d(c, a) = 3$. Для $a = (0, \nu') \in \mathcal{B}_2$, $\nu' \neq \nu$, если $\nu \perp v_1 \perp \ldots \perp v_k \perp \nu'$ – путь в $O(S)$, то $(\alpha, \nu) \perp (0, v_1) \perp \ldots \perp (0, v_k) \perp (0, \nu')$ – путь в $O(T)$, и $d(c, a) \leqslant d_{O(S)}(\nu, \nu') \leqslant \operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S)$. С другой стороны, всегда существует путь $(\alpha, \nu) \perp (0, v_1) \perp (r, 0) \perp (0, \nu')$, $v_1 \in O_S^0(\nu)$, $r \in R^0$. Таким образом, $d(c, a) \leqslant \min\{3, \operatorname{diam} \mathcal{OZD}_S\}$ при $\nu \neq \nu'$. При $\nu' = \nu$ возьмём $s \in O_S^0(\nu)$, тогда если $s = \nu$ (т.е. $\nu^2 = 0$), то $d(c, a) = 1$, иначе $d(c, a) = 2$.

(7) Аналогично пункту 6, для любой вершины $c = (\mu, \beta) \in \mathcal{C}_2$ имеем $O_T(c) \subseteq \mathcal{B}_1$, т.е. вершину c можно соединить путём длины 1 с некоторой вершиной $b \in \mathcal{B}_1$ и нельзя соединить путём длины 1 ни с одной вершиной из других групп. Тогда для произвольной вершины $a \in \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{A}_2$ имеем $d(c, a) = 2$, для $a \in \mathcal{A}_1$ выполнено $d(c, a) = 3$, для $a = (\mu', 0) \in \mathcal{B}_1$, $\mu' \neq \mu$, $d(c, a) \leqslant \min\{3, \operatorname{diam} \mathcal{OZD}_R\}$. При $\mu' = \mu$ возьмём $r \in O_R^0(\mu)$, тогда если $r = \mu$ (т.е. $\mu^2 = 0$), то $d(c, a) = 1$, а иначе $d(c, a) = 2$.

(8) Для двух различных вершин $c_i = (\alpha_i, \nu_i) \in \mathcal{C}_1$, $i = 1, 2$, также имеем $O_T(c_i) = 0 \times O_S(\nu_i) \subseteq \mathcal{B}_2$, откуда, в частности, следует, что $d(c_1, c_2) \geqslant 2$. Возьмём $b_i \in O_T^0(c_i)$, $i = 1, 2$. Всегда существует путь $c_1 \perp b_1 \perp (r, 0) \perp b_2 \perp c_2$ длины 4 для произвольно выбранного элемента $r \in R^0$, поэтому $d(c_1, c_2) \leqslant 4$.

Если возможно выбрать $b_1 = b_2$, т.е. $O_T^0(c_1) \cap O_T^0(c_2) \neq \varnothing$, то $d(c_1, c_2) = 2$. Если b_1 и b_2 можно соединить путём длины 1, то $d(c_1, c_2) = 3$. Значит, $d(c_1, c_2) \leqslant 3$ при $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \leqslant 3$. Если $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \geqslant 4$, то для ν_1, ν_2 находящихся на расстоянии не менее 4 в $O(S)$ нет более короткого пути, откуда $d(c_1, c_2) = 4$.

Также для двух различных вершин $c_i = (\mu_i, \beta_i) \in \mathcal{C}_2$ получаем, что $d(c_1, c_2) \leqslant 3$ при $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_R) \leqslant 3$ и $d(c_1, c_2) \leqslant 4$ в противном случае, и есть вершины на расстоянии 4.

(9) Для вершин $c_1 = (\alpha, \nu) \in \mathcal{C}_1$, $c_2 = (\mu, \beta), \in \mathcal{C}_2$ имеем путь $c_1 \perp (0, v) \perp (u, 0) \perp (\mu, \beta)$ длины 3 для произвольных $v \in O_S^0(\nu)$, $u \in O_R^0(\mu)$, т.е. $d(c_1, c_2) \leqslant 3$. С другой стороны, по построению, $d(c_1, c_2) > 1$ и $d(c_1, c_2) \neq 2$, поскольку $O_T^0(c_1) \cap O_T^0(c_2) = \varnothing$. Значит, $d(c_1, c_2) = 3$.

(10) Вершину $d = (\mu, \nu) \in \mathcal{D}$ можно соединить путями длины 1 с некоторыми вершинами $b_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, поэтому, по доказанному выше, есть путь из d в вершину любой другой группы. Отсюда также следует, что $d(d, a) \leqslant 2$, $d(d, b) \leqslant 2$ для $a \in \mathcal{A}_i, b \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, для произвольной вершины $c = (\alpha, \nu) \in \mathcal{C}_1$ имеем путь $d \perp (\mu', 0) \perp (0, \nu') \perp c$, где $\mu' \in O_R^0(\mu)$, $\nu' \in O_S^0(\nu)$, и, аналогично, для произвольной вершины $C = (\mu, \beta) \in \mathcal{C}_2$ имеем путь $d \perp (0, \nu') \perp (\mu', 0) \perp c$, где $\mu' \in O_R^0(\mu)$, $\nu' \in O_S^0(\nu)$, т.е. $d(d, c) \leqslant 3$ для $c \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

(11) Для двух различных вершин $d_1 = (\mu_1, \nu_1)$, $d_2 = (\mu_2, \nu_2) \in \mathcal{D}$ имеем $d(d_1, d_2) = 1$, если $d_1 d_2 = d_2 d_1 = 0$, $d(d_1, d_2) = 2$, если $d_1 d_2$ и $d_2 d_1$ не равны нулю одновременно и $O_T^0(d_1) \cap O_T^0(d_2) \neq \varnothing$,

что возможно, если и только если существует либо путь длины 2 между μ_1 и μ_2 в $O(R)$, либо путь длины 2 между ν_1 и ν_2 в $O(S)$. В частности, элементы вида (μ,ν_1) и (μ,ν_2) связаны путём $(\mu,\nu_1)\perp(\mu',0)\perp(\mu,\nu_2)$ длины 2 для $\mu'\in O^0_R(\mu)$, но не связаны путём длины 1, если $\mu^2\neq 0$. В любом случае, существует путь $d_1\perp b_1\perp b_2\perp d_2$, где $b_i\in B_i\cap O^0_T(d_i)$, $i=1,2$, откуда $d(d_1,d_2)\leqslant 3$.

Таким образом, мы доказали, что компонента $O(\mathcal{OZD}_T)$ является связной и имеет диаметр не больше 4. Поскольку независимо от структуры колец R и S множества $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ непусты и их вершины соединены путями длины 1, то $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_T)\geqslant 1$. □

Приведём кратчайшие гарантированные длины путей, которые существуют между произвольной парой вершин из заданных подмножеств $\mathcal{OZD}$ для общего случая. В показателях степеней указаны пункты леммы, в которых даются эти оценки. Чёрным цветом отмечены точно известные расстояния, серым – верхние оценки.

	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D
A_1	2^4	1^1	2^5	1^1	2^6	3^7	2^{10}
A_2		2^4	1^1	2^5	3^6	2^7	2^{10}
B_1			2^2	1^1	2^6	3^7	2^{10}
B_2				2^3	3^6	2^7	2^{10}
C_1					4^8	3^9	3^{10}
C_2						4^8	3^{10}
D							3^{11}

С помощью этих данных можно установить все возможности для значения диаметра $O(\mathcal{OZD}_T)$. Введём обозначения

$$m=\min\{\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_R),\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S)\},$$
$$M=\max\{\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_R),\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S)\}.$$

Следствие 4.7. *Пусть R,S – ненулевые кольца, $R=\mathcal{OZD}_R\cup\{0\}$ и $S=\mathcal{OZD}_S\cup\{0\}$. Тогда, в силу пунктов 1–3, 10, 11 леммы 4.6, подмножество графа $O(R\oplus S)$, соответствующее множеству вершин $\mathcal{OZD}_{R\oplus S}$, является его компонентой связности и имеет диаметр*

- 1, *если $M\leqslant 1$ и в R и S выполнено тождество $x^2=0$;*

- 2, *если либо* 1) $M \leqslant 1$ *и в одном из колец не выполнено тождество* $x^2 = 0$, *либо* 2) $M = 2$, *либо* 3) *одновременно* $m \leqslant 2$, $M \geqslant 3$ *и в графе ортогональности кольца с диаметром не более* 2 *любые две вершины имеют общую смежную;*
- 3 *в противном случае.*

Приведённые выше результаты дают существенные априорные ограничения на диаметр произвольной прямой суммы двух колец, однако не всякая из указанных возможностей обязана реализовываться, поскольку доказательства фактически проводятся в более общей категории полугрупп с нулём. В частности, пункт 1) для диаметра 2 нереализуем. Действительно, пусть в кольце $R = \mathcal{OZD}_R \cup \{0\}$ граф ортогональности полный (возможно, за исключением петель), то есть для любых ненулевых попарно различных x и y выполнено $xy = 0$ (если такой пары нет, то в кольце не более 2 элементов, и оно либо изоморфно $\mathbb{Z}_2$, либо имеет нулевое умножение). Однако тогда $(x+y)y = 0$, поскольку $x + y$ также не равно y, и $y^2 = 0$, откуда получаем, что в кольце нулевое умножение. Авторам также не удалось найти ни одного кольца вида $R = \mathcal{OZD}_R \cup \{0\}$ с диаметром 3 и более; исключение этой возможности позволило бы существенно упростить формулировки данного и следующего результатов.

Пример 4.8. Диаметр 1 реализуется для колец $R = O_{\kappa_1}$, $S = O_{\kappa_2}$ с нулевым умножением для произвольных кардиналов κ_i (и только для этих колец); пример диаметра 2 (пункт 2)) – кольца $R = \mathbb{Z}_2 \oplus O_2$, $S = O_2 = \{0, a\}$ (в этом случае, диаметр $O(S)$ формально не определён, однако, в силу наличия петли в $O(S)$, можно считать его малым, т.е. меньшим или равным 1). В этом случае, $O(R \oplus S)$ содержит звёздный подграф.

Следствие 4.9. *Пусть* R, S – *ненулевые кольца,* $R \neq \mathcal{OZD}_R \cup \{0\}$ *и* $S = \mathcal{OZD}_S \cup \{0\}$. *Тогда, в силу пунктов* 1–6, 8, 10, 11 *леммы* 4.6, *подмножество графа* $O(R \oplus S)$, *соответствующее множеству вершин* $\mathcal{OZD}_{R\oplus S}$, *является его компонентой связности и имеет диаметр*

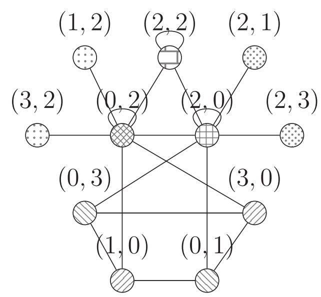
- 2, *если* $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \leqslant 2$ *и в* $O(\mathcal{OZD}_S)$ *любые две вершины имеют общую смежную;*
- 3, *если* $\operatorname{diam} O(\mathcal{OZD}_S) \leqslant 3$ *и либо* 1) *выполнено* $m \geqslant 3$, *либо* 2) *в* $O(\mathcal{OZD}_S)$ *есть две вершины без общей смежной;*
- 4 *в противном случае.*

Примером диаметра 2 является $T = M_2(\mathbb{Z}_2) \oplus O_2$, во второй компоненте которого ненулевой элемент смежен сам с собой. Поскольку единица не является делителем нуля, в классе колец с единицей случаи двух вышеприведённых следствий не реализуются.

Следствие 4.10. *Пусть R, S – ненулевые кольца, $R \neq \mathcal{OZD}_R \cup \{0\}$ и $S \neq \mathcal{OZD}_S \cup \{0\}$. Тогда, в силу леммы 4.6, подмножество графа $O(R \oplus S)$, соответствующее множеству вершин $\mathcal{OZD}_{R \oplus S}$, является его компонентой связности и имеет диаметр*

- 3*, если $M \leqslant 3$,*
- 4 *в противном случае.*

Пример 4.11. Для построения примера диаметра 3 возьмём кольца $R = S = \mathbb{Z}_4$. Граф ортогональности R состоит из одной вершины с петлёй (он имеет "малый" диаметр), граф ортогональности $R \oplus S$ приведён ниже. Он содержит пары вершин на расстоянии 3, в частности, $(1,2) \perp (0,2) \perp (2,0) \perp (2,1)$, однако кратчайших путей с длиной 4 нет.



Пример 4.12. В качестве примера с диаметром 4 можно взять $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $S = T_2(\mathbb{Z}_2)$. Двукратное применение теоремы 4.2 (для $\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus T_2(\mathbb{Z}_2)))$ позволяет подсчитать диаметр этого графа вторым способом.

Собирая воедино результаты утверждений 2.9, 2.8, 4.1, 4.2, 4.10 и пользуясь теоремой Молина–Веддербёрна–Артина, мы получаем возможность найти диаметр произвольного полупростого артинова кольца. Поскольку случай простого кольца был описан ранее в [2, 6], см. следствие 2.10, сформулируем теорему для двух и более матричных компонент.

Теорема 4.13. *Пусть* $R \cong R_1 \oplus \dots \oplus R_k = M_{n_1}(\mathbb{D}_1) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{D}_k)$, $k \geqslant 2$, *– полупростое артиново кольцо, не являющееся простым. Тогда граф* $O(R)$ *не имеет изолированных вершин, связен, и его диаметр равен*

- 1, *если* $k = 2$ *и* $R_1 \cong R_2 \cong \mathbb{Z}_2$,
- 2, *если* $k = 2$ *и* R_1, R_2 *– другая пара тел,*
- 3, *если* $k > 2$ *и* $R_1, \dots, R_k$ *– тела,*
- 4, *если существует* $n_i > 1$.

§5. Заключение и открытые вопросы

В данной работе продолжено исследование графа ортогональности в терминах теории колец. Если ранее исследования проводились в основном для колец матриц, то в данной работе начато общее систематическое исследование структуры и числовых характеристик графов ортогональности некоммутативных колец. Изучено поведение некоторых основных метрических свойств графов ортогональности (компоненты связности и их диаметр) при взятии прямых сумм колец, а также в отдельных важных классах колец (полупростые, полупервичные).

Для дальнейшего исследования авторам представляются актуальными следующие задачи.

Задача 5.1. Описать конечные кольца с 1, имеющие несвязный граф ортогональности.

Задача 5.2. Для любого натурального n построить некоммутативное кольцо со связным графом ортогональности диаметра n.

По итогам §3 возникают следующие задачи.

Задача 5.3. Исследовать другие метрические характеристики графов полупростых или полупервичных колец (размеры клик, хроматическое число, изоморфные типы подграфов) и связать их с теоретико-кольцевыми особенностями.

Задача 5.4. Описать тела, в которых для всех порядков выполнено условие центральности знаменателей в смысле §3. Существуют ли тела, конечномерные или алгебраические над своим центром, в которых оно не выполняется?

По итогам §4 можно поставить следующие задачи.

Задача 5.5. Описать такие кольца S с делителями нуля, что граф ортогональности кольца $R \oplus S$, где R – кольцо без делителей нуля, имеет диаметр а) 2, б) 3, в) 4.

Задача 5.6. Найти кольцо вида $R = \mathcal{OZD}_R \cup \{0\}$ с диаметром графа ортогональности прямой суммы не менее 3.

Список литературы

1. Э. Артин, *Геометрическая алгебра*, М., Наука, 1969.
2. Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 49–80.
3. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, *Ортогональная полнота и алгебраические системы.* — УМН **40**, No. 6 (1985), 79–115.
4. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, *Ортогональная полнота в теории колец.* — Итоги науки техн. сер. Соврем. мат. прил. **4** (1993), 1–44.
5. А. Э. Гутерман, М. А. Ефимов, *Монотонные отображения матриц индекса* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 67–96.
6. А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы ортогональности матриц над телами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 81–93.
7. И. Ламбек, *Кольца и модули*, М., Мир, 1971.
8. А. А. Туганбаев, *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, М., МЦНМО, 2009.
9. Ф. Харари, *Теория графов.* М., Мир, 1973.
10. И. Н. Херстейн, *Некоммутативные кольца*, М., Мир, 1972.
11. S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings.* — Linear Algebra Appl. **390** (2004), 345–355.
12. S. Akbari, A. Mohammadian, *On the zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **274** (2004), 847–855.
13. S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings.* — J. Algebra **296** (2006), 462–479.
14. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs.* — Linear Algebra Appl. **418** (2006), 161–176.
15. D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **217** (1999), 434–447.
16. B. R. Bakhadly, *Orthogonality graph of the algebra of upper triangular matrices.* — Oper. Matrices **11** (2017), No. 2, 455–463.
17. B. R. Bakhadly, A. E. Guterman, M. J. de la Puente, *Orthogonality for* $(0, -1)$ *tropical normal matrices.* — Spec. Matrices **8** (2020), 40–60.
18. C. Faith, *Rings and Things and a Fine Array of Twentieth Century Associative Algebra*, Math. Surveys Monogr. **65**, AMS, 2004.
19. C. Faith, Y. Utumi, *On Noetherian prime rings.* — Trans. Amer. Math. Soc. **114**, No. 1 (1965), 53–60.
20. T. Lam, *Lectures on Modules and Rings* (Grad. Texts Math. **189**), Springer-Verlag, 1999.

21. T. G. Lucas, *The diameter of a zero divisor graph.* — J. Algebra **301** (2006), 174–193.
22. Shikun Ou, Dehan Ren, Hailin Liu, Dein Wong, *On automorphism group of orthogonality graph of finite semisimple rings.* — Comm. Algebra **50**, No. 5 (2022), 2233–2249.
23. P. G. Ovchinnikov, *Automorphisms of the poset of skew projections.* — J. Funct. Anal. **115** (1993), 184–189.
24. P. Šemrl, *Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 481–490.

Markova O. V., Novochadov D. Yu. Orthogonality graphs of direct sums of rings and semisimple Artinian rings.

The paper studies the orthogonality relation graphs for noncommutative rings. Known results on the diameters of the connected components of simple Artinian rings are generalized to larger ring classes, particularly, to semisimple Artinian and semiprime two-sided Goldie rings. Also the existence of isolated vertices in the graphs of the above ring classes is considered, and the behavior of the diameter function under taking a direct sum for pairs of arbitrary rings is studied.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова
119991, Москва;
Московский центр фунд. и прикл. математики
119991, Москва
E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 29 сентября 2022 г.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова
119991, Москва
E-mail: dnovochadov@yandex.ru