Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

О. В. Маркова

ФУНКЦИЯ ДЛИНЫ И ОДНОВРЕМЕННАЯ ТРИАНГУЛИЗУЕМОСТЬ ПАР МАТРИЦ

§1. Введение

Обозначим через $M_n(\mathbb{F})$ алгебру $n \times n$ квадратных матриц над полем $\mathbb{F}$ и через $T_n(\mathbb{F})$ – её подалгебру верхнетреугольных матриц.

Определение 1.1. Множество матриц $\{A_i | i \in I\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется *триангулизуемым*, если существует обратимая матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C^{-1}A_iC \in T_n(\mathbb{F})$ для всех $i \in I$. Эквивалентным образом говорят, что матрицы $A_i \in M_n(\mathbb{F}),\ i \in I$, *одновременно триангулизуемы*, если триангулизуемо множество $\{A_i | i \in I\}$.

Вопрос об одновременной триангулизуемости пары комплексных матриц является классическим вопросом линейной алгебры. Его теоретическое решение даёт известная теорема Маккоя (подробнее см., например, [9, 17, 20]).

Теорема 1.2 (теорема Маккоя, [17])**.** *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда матрица $p(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна для любого многочлена $p(x, y)$ от некоммутирующих переменных.*

Аналогичный критерий справедлив и для произвольного семейства матриц.

Теорема 1.3 ([20])**.** *Множество $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ триангулизуемо тогда и только тогда, когда матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \dots, A_{i_m},\ A_{i_{m+1}},\ A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$.*

Хотя известен критерий одновременной триангулизуемости, ни формулировка, ни различные доказательства теоремы Маккоя не дают конечной процедуры проверки данного свойства. Ряд алгоритмов для

Ключевые слова: длины множеств и алгебр, наследственная длина, гипотеза Паза, одновременная триангулизуемость.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 22-21-00267).

проверки одновременной триангулизуемости двух матриц были позднее предложены в работах Альпина и Корешкова [1] и Буржуа [6, 7].

Теорема 1.4 ([1, Теорема 6]). *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда любая матрица из конечного множества*

$$\mathcal{B}(n^2-1) = \{C_1 \cdots C_k(AB-BA) | C_i \in \{A, B\}, i = 1, \ldots, k, 0 \leq k \leq n^2-1\} \tag{1.1}$$

имеет нулевой след.

Теорема 1.5 ([6, Предложение 3.3]). *Алгоритм, индуцированный теоремой* 1.4*, имеет мультипликативную сложность (количество необходимых умножений комплексных чисел)* $O(2^{n^2}n^3)$.

Отметим, что множество, определённое равенством (1.1), построено из произведений заданных матриц. При изучении произведений образующих конечномерной алгебры важным инструментом является такой числовой инвариант как длина (см. определения 2.2 и 3.2 ниже). Вычисление этой величины само по себе является интересной и трудной задачей. Например, длина полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ до сих пор неизвестна, хотя проблема её вычисления была поставлена Пазом в 1984 г. На сегодняшний день известны лишь некоторые оценки длины алгебры $M_n(\mathbb{F})$, например, доказанные Пазом [19], Паппаченой [18], Шитовым [21]. Много результатов было получено для длин собственных подалгебр, а также полной алгебры матриц при дополнительных ограничениях на порождающие множества, см., например, [2–4, 10–16, 18] и их библиографию. Мы также более подробно приведём некоторые из результатов по данной теме в §2.

В данной статье мы связываем вопрос одновременной триангулизуемости с проблемой Паза и известными результатами о длине матричной алгебры. Сначала в §2 мы применяем функцию длины к алгоритму, основанному на теореме 1.4, и показываем, как уменьшить его мультипликативную сложность. В §3 мы вводим определение наследственной длины алгебры, восполняющее отсутствие свойства монотонности исходной функции длины, и обсуждаем проблему её вычисления для матричных алгебр. В §4 в качестве основного результата этой статьи мы приводим асимптотически лучшую процедуру одновременной проверки триангулизуемости для пары комплексных матриц, основанную на результатах о длине верхнетреугольных матричных алгебр (см. теорему 4.5).

§2. Длина множеств и алгебр

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная конечномерная алгебра с единицей над произвольным полем $\mathbb{F}$ и $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ – конечная система образующих этой алгебры. Следуя [18], определим длину системы порождающих и алгебры.

Определение 2.1. *Словом* от $\mathcal{S}$ будем называть произведение элементов множества $\mathcal{S}$. *Длина* слова $a_{i_1} \ldots a_{i_t}$, где $a_{i_j} \in \mathcal{S}$, равна t. Будем считать единицу 1 алгебры $\mathcal{A}$ словом *длины* 0 (пустым словом).

Для любого $i \geq 0$ через $\mathcal{S}^i$ обозначим множество всех слов длины не большей i над афавитом $\mathcal{S}$ и будем использовать обозначение $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle M \rangle$ обозначает линейную оболочку подмножества M некоторого векторного пространства над $\mathbb{F}$.

Пусть

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$$

обозначает линейную оболочку всех слова в алфавите $\mathcal{S}$. Заметим, что $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ – подалгебра с единицей в $\mathcal{A}$, порождённая множеством $\mathcal{S}$.

Согласно определению пространств $\mathcal{L}_k$ получаем, что для $0 \leq i \leq j$ выполнены включения $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_j(\mathcal{S})$. Более того, поскольку алгебра $\mathcal{A}$ конечномерна, то существует такое число h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. В то же время,

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}).$$

Тогда по индукции получаем, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geq h$.

Определение 2.2. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\},$$

а *длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Из определения пространств $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ следует, что для длины произвольной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ выполнена тривиальная верхняя оценка $\dim \mathcal{A} - 1$ (см. [18, первый абзац на стр. 536]).

Следуя определению 2.2, можно определить *длину произвольного множества* $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ как длину системы образующих в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

В следующей лемме мы покажем, как конструкция, используемая в теореме 1.4, связана с функцией длины.

Лемма 2.3. *В теореме* 1.4 *достаточно проверить условие равенства следа нулю для матриц из конечного множества* $\mathcal{B}(l(\{A,B\}))$.

Доказательство. Доказательство теоремы 1.4 основано на построении базиса левого идеала $\mathcal{L}(\{A,B\})(AB-BA)$. Из определения этого идеала следует, что если слова $V_1,\dots,V_m \in \mathcal{L}(\{A,B\})$ образуют базис алгебры $\mathcal{L}(\{A,B\})$, то линейная оболочка произведений

$$V_1(AB-BA),\dots,V_m(AB-BA)$$

совпадает с указанным выше идеалом. Из определения функции длины вытекает, что пространство $\mathcal{L}(\{A,B\})$ совпадает с линейной оболочкой множества $\{A,B\}^{l(\{A,B\})}$, поэтому множество $\mathcal{B}(l(\{A,B\}))$ содержит базис левого идеала $\mathcal{L}(\{A,B\})(AB-BA)$. $\square$

Таким образом, для оценки мультипликативной сложности процедуры, индуцированной леммой 2.3, нужна оценка длины произвольной пары матриц. В этих терминах результат теоремы 1.4 основан на тривиальной оценке $l(\mathcal{S}) \le \dim M_n(\mathbb{F}) - 1$.

Исследования функции длины для полной алгебры матриц над полем начались в 1950-х годах в контексте механики сплошных сред [22]. В общем случае задача вычисления длины матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ как функции порядка матриц была поставлена в 1984 году Пазом [19] и до сих пор является открытой. Известные нетривиальные верхние оценки принадлежат Пазу, Паппачене и Шитову.

Теорема 2.4 ([19, теорема 1, замечание 2])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ – *произвольное поле. Тогда*

$$l(M_n(\mathbb{F})) \le \lceil (n^2+2)/3 \rceil.$$

Теорема 2.5 ([18, следствие 3.2])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ – *произвольное поле. Тогда*

$$l(M_n(\mathbb{F})) < n\sqrt{2n^2/(n-1)+1/4} + n/2 - 2.$$

Теорема 2.6 ([21, теорема 3])**.** *Для всех множеств* $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$ *выполнена оценка* $l(\mathcal{S}) \le 2n\log_2 n + 4n - 4$.

Отметим, что эти оценки нелинейны. В то же время Паз предположил, что должна существовать линейная верхняя оценка длины матричной алгебры.

Гипотеза 2.7 (Гипотеза Паза [19])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$*. Тогда* $l(\mathcal{S}) \leq 2n-2$*.*

Учитывая существование систем порождающих длины $2n-2$ (см., например, [12, стр. 131]), гипотеза Паза известна и в следующей формулировке.

Гипотеза 2.8 ([19])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Тогда* $l(M_n(\mathbb{F})) = 2n-2$*.*

Хотя в общем виде гипотеза Паза все ещё остается открытой, некоторые линейные оценки были доказаны при дополнительных ограничениях на системы порождающих (таких как условия на ранги или жорданову форму), см., например, [2–4, 10–16, 18] и их библиографию. В частности, Гутерманом, Лаффи, Марковой и Шмигоц [10] было установлено, что гипотеза Паза верна для следующего широкого класса порождающих множеств.

Определение 2.9. Матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с характеристическим.

Теорема 2.10 ([10, теорема 2.4])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Если система порождающих* $\mathcal{S}$ *матричной алгебры* $M_n(\mathbb{F})$ *содержит циклическую матрицу, то* $l(\mathcal{S}) \leq 2n-2$*.*

Далее будет установлено, что этот результат верен для произвольного множества, содержащего циклическую матрицу. Для этого мы покажем, как в общем случае перенести линейную оценку длины с системы образующих на произвольное множество.

Теорема 2.11. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* a, b *– положительные целые числа. Если неравенство* $l(\mathcal{S}) \leq an-b$ *выполняется для всех систем порождающих* $\mathcal{S}$ *алгебры* $M_n(\mathbb{F})$ *при всех* $n \geq 1$*, то оно выполнено и для всех подмножеств в* $M_n(\mathbb{F})$*. Более того, если* $b \geq 2$ *и* $\mathcal{L}(\mathcal{S}') \neq M_n(\mathbb{F})$*, то выполнено также и строгое неравенство* $l(\mathcal{S}') < an-b$*.*

Доказательство. Поскольку множество векторов над $\mathbb{F}$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда оно линейно зависимо над любым расширением $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{F}$, то длина множества $\mathcal{S}$, рассматриваемого как подмножество в $M_n(\mathbb{K})$, равна длине $l(\mathcal{S})$ над $\mathbb{F}$. В частности, длина над алгебраическим замыканием поля совпадает с длиной над исходным полем. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы в предположении, что поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

В этих ограничениях, если множество $\mathcal{S}'$ порождает собственную подалгебру $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$, то согласно [20, теорема 1.5.1] существует обратимая матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что каждая матрица $A \in C^{-1}\mathcal{A}C$ имеет блочную верхнетреугольную форму

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & & A_{2k} \\ 0 & 0 & A_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & A_{kk} \end{pmatrix},$$

где $k \geq 2$, $A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, и множество $\{1, \dots, k\}$ является дизъюнктным объединением подмножеств $J_1, J_2, \dots, J_l$ таких, что

(1) $\{A_{ii} : A \in C^{-1}\mathcal{A}C\} = M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$;

(2) если $i, j \in J_s$, то $A_{ii} = A_{jj}$ для всех $A \in C^{-1}\mathcal{A}C$;

(3) если $i \in J_r$, $j \in J_s$ и $r \neq s$, то $\{(A_{ii}, A_{jj}) : A \in C^{-1}\mathcal{A}C\} = M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$;

(4) если $i \in J_s$, то найдётся матрица $A \in C^{-1}\mathcal{A}C$ такая, что матрица A_{ii} единичная и $A_{jj} = 0$ при $j \notin J_s$.

Для длины блочно-треугольных матричных алгебр выполнена верхняя оценка (см. [2, следствие 5.4] и доказательство [11, предложение 3.6]):

$$l(C^{-1}\mathcal{S}'C) \leq \sum_{j=1}^{k} l(\mathcal{S}'_j) + k - 1,$$

где множества $\mathcal{S}'_i$ в $M_{n_i}(\mathbb{F})$ образованы всеми матрицами $A_{i,i} \in C^{-1}\mathcal{S}'C$, $i = 1, \dots, k$. Поскольку по построению каждый диагональный блок представляет собой полную матричную алгебру $M_{n_i}(\mathbb{F})$, то $l(\mathcal{S}'_i) \leq an_i - b$, $i = 1, \dots, k$.

Следовательно, $l(\mathcal{S}) = l(C^{-1}\mathcal{S}C) \leq \sum\limits_{j=1}^{k}(an_j - b) + k - 1 = an - kb + k - 1$. Если $b = 1$, то $-kb + k - 1 = -1 = -b$, в противном случае, при $b \geq 2$ и $k \geq 2$ имеем $kb - k + 1 \geq 2b - 1 > b$. $\square$

Следствие 2.12. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Если множество $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$ содержит циклическую матрицу A, то $l(\mathcal{S}) \leq 2n-2$. Более того, если $\mathcal{L}(\mathcal{S}) \neq M_n(\mathbb{F})$, то $l(\mathcal{S}) \leq 2n-3$.*

Доказательство. Данное утверждение доказывается аналогично теореме 2.11 с применением теоремы 2.10, поскольку для циклической матрицы A каждая её компонента $A_{i,i}$ тоже будет циклической. □

Теперь мы готовы показать, как оценки функции длины могут уменьшить мультипликативную сложность алгоритма, основанного на теореме 1.4 и лемме 2.3.

Лемма 2.13. *Если матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяют неравенству $l(\{A,B\}) \leq M$, то мультипликативная сложность алгоритма, основанного на лемме 2.3, есть $O(2^M n^3)$.*

Доказательство. Пользуясь леммой 2.3, аналогично доказательству теоремы 1.5, необходимо проверить, что $2^{M+1}-2$ матрицы имеют нулевой след. Для этой проверки требуется 2^{M+1} матричных умножений в $M_n(\mathbb{C})$. Отсюда следует результат. □

Следствие 2.14. *Существует версия алгоритма, основанного на лемме 2.3, с мультипликативной сложностью $O(2^{4n} n^{2n+3})$.*

Доказательство. Следует из леммы 2.13 и теоремы 2.6. □

Следствие 2.15. *Если гипотеза Паза верна, то можно предъявить алгоритм проверки одновременной триангулизуемости для пары комплексных $n \times n$ матриц с мультипликативной сложностью $O(2^{2n} n^3)$.*

Следствие 2.16. *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ циклическая, то для проверки одновременной триангулизуемости матриц $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ есть алгоритм с мультипликативной сложностью $O(2^{2n} n^3)$.*

Доказательство. Следует из леммы 2.13 и следствия 2.12. □

§3. Наследственная длина

Отметим, что лемма 2.3 приводит к вычислительной задаче получения оценки для длины любого подмножества $\mathcal{S}'$ в алгебре $\mathcal{A}$, которое может порождать собственную подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, а не всю алгебру $\mathcal{A}$. Эквивалентная задача состоит в том, чтобы найти такое число $M \in \mathbb{N}$, что для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ выполняется оценка: $l(\mathcal{A}') \leq M$.

Используя тривиальную оценку длины $l(\mathcal{A}') \le \dim \mathcal{A}' - 1$, всегда можно положить $M = \dim \mathcal{A} - 1$. Недостатком является то, что тривиальная оценка не обязательно точна. С другой стороны, любое подмножество содержится в порождающей системе всей алгебры, поэтому естественно было предположить, что длина подалгебры ограничена длиной алгебры. Однако эта гипотеза неверна, и опровергающие примеры были построены в матричных алгебрах, начиная с матриц порядка 4 (см. [2, пример 9.3, предложение 9.4]).

Более того, известно, что разность между длинами подалгебры и содержащей её алгебры может быть сколь угодно большой:

Теорема 3.1 ([2, теорема 9.19, следствие 9.20]). *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и пусть $k, n, m \in \mathbb{N}$, $n \ge m$. Тогда*

(1) *существуют алгебры $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset M_{2k+2}(\mathbb{F})$ такие, что $l(\mathcal{A}') - l(\mathcal{A}) = k$;*
(2) *существует индекс $N \in \mathbb{N}$ и такие алгебры $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset M_N(\mathbb{F})$, что $\dfrac{l(\mathcal{B}')}{l(\mathcal{B})} = 1 + \dfrac{m}{n}$.*

Ввиду леммы 2.3 и теоремы 3.1, мы предлагаем следующий вариант определения функции длины алгебры.

Определение 3.2. *Наследственной длиной алгебры* $\mathcal{A}$ назовём число

$$l_h(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Отметим, что наследственная длина равна максимальной длине среди всех подалгебр с той же единицей в данной алгебре.

Из тривиальной оценки длины следует, что эта величина также корректно определена и удовлетворяет той же оценке $l_h(\mathcal{A}) \le \dim \mathcal{A} - 1$. Понятие наследственной длины алгебры в некотором смысле более естественно, поскольку оно восполняет отсутствие свойства монотонности исходной функции длины. С другой стороны, задача её вычисления более сложна, так как требует рассмотрения всех конечных подмножеств алгебры, а не только систем порождающих.

Лемма 3.3. *Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$-алгебру $\mathcal{A}$ и её подалгебру $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Тогда $l_h(\mathcal{A}') \le l_h(\mathcal{A})$.*

В терминах наследственной длины леммы 2.3 и 2.13 дают следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Мультипликативная сложность алгоритма, основанного на лемме* 2.3, *есть* $O(2^{l_h(M_n(\mathbb{F}))}n^3)$.

Из теоремы 2.11 следует, что выполнение гипотезы 2.8 влечёт выполнение гипотезы 2.7. Таким образом, существует естественная переформулировка гипотезы Паза в терминах наследственной длины.

Гипотеза 3.5. *Для произвольного поля* $\mathbb{F}$ *и порядка матриц* n *выполнено равенство*

$$l_h(M_n(\mathbb{F})) = l(M_n(\mathbb{F})) = 2n - 2.$$

Более того, $l(\mathcal{A}) < l(M_n(\mathbb{F}))$ *для любой собственной подалгебры с единицей* $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$.

§4. Алгоритм проверки одновременной триангулизуемости, основанный на длине алгебры верхнетреугольных матриц

В этом разделе мы предлагаем асимптотически лучшую процедуру одновременной проверки триангулизуемости для пары комплексных матриц, основанную на результатах автора о длине верхнетреугольных матричных алгебр.

Сначала напомним линейную оценку длины треугольных матричных алгебр.

Теорема 4.1 ([2, теорема 4.1])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Тогда* $l(T_n(\mathbb{F})) = n - 1$.

Лемма 4.2 ([2, лемма 4.2])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* $\mathcal{A}$ *– произвольная подалгебра алгебры* $T_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $l(\mathcal{A}) \leq n - 1$.

Следствие 4.3. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Если множество* $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$ *триангулизуемо, то* $l(\mathcal{A}) \leq n - 1$.

Мы также можем сформулировать этот результат для наследственной длины.

Следствие 4.4. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Тогда* $l_h(T_n(\mathbb{F})) = n-1$.

Основываясь на данном результате, можно предложить алгоритм проверки триангулизуемости пары $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, в котором требуется $O(2^n n^4) \ll O(2^{2n} n^3)$ умножений комплексных чисел.

Теорема 4.5. *Существует алгоритм проверки одновременной триангулизуемости пары матриц $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, имеющий мультипликативную сложность $2^{n+1}(n^4 + n^3)$.*

Доказательство. Сначала опишем алгоритм.

Шаг 1. Вычисляем все слова из множества $\mathcal{B}(n)$. Слова разной длины упорядочим по возрастанию длин, а слова одной длины, например, лексикографически.

Шаг 2. Последовательно вычисляем следы матриц из $\mathcal{B}(n)$. На первой матрице с ненулевым следом проверка останавливается. В этом случае пара A, B не триангулизуема по лемме 2.3.

Шаг 3. Пусть все следы матриц из $\mathcal{B}(n)$ нулевые. Вычисляем $\dim \mathcal{B}(n) - \dim \mathcal{B}(n-1)$.

Если $\dim \mathcal{B}(n) - \dim \mathcal{B}(n-1) = 0$, то равенства $\dim \mathcal{B}(s) = \dim \mathcal{B}(n-1)$ выполнены для всех $s \geq n$. Значит, все матрицы из $\mathcal{B}(l(\{A, B\}))$ имеют нулевой след, и пара A, B триангулизуема по лемме 2.3.

Если $\dim \mathcal{B}(n) - \dim \mathcal{B}(n-1) > 0$, то

$$\dim \mathcal{L}_n(\{A, B\}) > \dim \mathcal{L}_{n-1}(\{A, B\}).$$

Соответственно, $l(\mathcal{L}(\{A, B\})) \geq n$, и пара A, B не триангулизуема согласно следствию 4.3.

Теперь найдём мультипликативную сложность этого алгоритма. На шаге 1 выполняются 2^{n+1} умножения матриц, они соответствуют $2^{n+1}n^3$ умножениям комплексных чисел. Для вычисления $\dim \mathcal{B}(n) - \dim \mathcal{B}(n-1)$ на шаге 3 мы преобразуем все матрицы из $\mathcal{B}(n)$ в строки длины n^2. Тогда задача вычисления $\dim \mathcal{B}(n-1)$ превратится в задачу вычисления ранга матрицы H_n размера $(2^n - 1) \times n^2$ и сравнения его с рангом матрицы, полученной из H_n дописыванием ещё 2^n строк, что можно сделать методом элементарных преобразований, используя $2^{n+1}n^4$ умножений чисел. $\square$

Замечание 4.6. Заметим, что мульпликативная сложность нашего алгоритма основана на сложности задач умножения матриц и вычисления ранга прямоугольной матрицы, и мы оценили её при условии использования стандартных методов решения этих задач. Используя алгоритм быстрого умножения матриц [5] и основанный на нём алгоритм вычисления ранга [8], можно понизить сложность нашего алгоритма до $O(2^n n^{2(\omega-1)})$, где $\omega < 2,373$ – показатель в задаче быстрого умножения матриц.

Автор выражает благодарность Н. А. Колегову и Д. Ю. Новочадову за обсуждение результатов статьи.

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, Н. А. Корешков, *Об одновременной триангулизуемости матриц.* — Матем. заметки **68**, No. 5 (2000), 648–652.
2. О. В. Маркова, *Вычисление длин матричных подалгебр специального вида.* — Фунд. прикл. матем. **13**, No. 4 (2007), 165–197.
3. О. В. Маркова, *Функция длины и матричные алгебры.* — Фунд. прикл. матем. **17**, No. 6 (2012), 65–173.
4. О. В. Маркова, Д. Ю. Новочадов, *Системы порождающих полной матричной алгебры, содержащие циклические матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 157–171.
5. J. Alman, V. Vassilevska Williams, *A refined laser method and faster matrix multiplication.* — Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 522–539.
6. G. Bourgeois, *Pairs of matrices, one of which commutes with their commutator.* — Electron. J. Linear Algebra **22** (2011), 593–597.
7. G. Bourgeois, *Common invariant subspace and commuting matrices.* — Linear Algebra Appl. **438**, No. 7 (2013), 3030–3038.
8. Ho Yee Cheung, Tsz Chiu Kwok, Lap Chi Lau, *Fast matrix rank algorithms and applications.* — J. ACM **60**, No. 5, Art. 31 (2013), 1–25.
9. M. P. Drazin, J. W. Dungey, K. W. Gruenberg, *Some theorems on commutative matrices.* — J. London Math. Soc. **26** (1951), 221–228.
10. A. E. Guterman, T. Laffey, O. V. Markova, H. Šmigoc, *A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix.* — Linear Algebra Appl. **543** (2018), 234–250.
11. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Lengths of quasi-commutative pairs of matrices.* — Linear Algebra Appl. **498** (2016), 450–470.
12. T. J. Laffey, *Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity.* — Linear Algebra Appl. **84** (1986), 123–138.
13. M. S. Lambrou, W. E. Longstaff, *On the lengths of pairs of complex matrices of size six.* — Bull. Austral. Math. Soc. **80**, No. 2 (2009), 177–201.
14. W. E. Longstaff, *Irreducible families of complex matrices containing a rank-one matrix.* — Bull. Austral. Math. Soc. **102**, No. 2 (2020), 226–236.
15. W. E. Longstaff, A. C. Niemeyer, Oreste Panaia, *On the lengths of pairs of complex matrices of size at most five.* — Bull. Austral. Math. Soc. **73**, No. 3 (2006), 461–472.
16. W. E. Longstaff, P. Rosenthal, *On the lengths of irreducible pairs of complex matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **139**, No. 11 (2011), 3769–3777.
17. N. H. McCoy, *On the characteristic roots of matrix polynomials.* — Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 592–600.
18. C. J. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra,* — J. Algebra **197** (1997), 535–545.
19. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.

20. H. Radjavi, P. Rosenthal, *Simultaneous triangularization.* Springer, New York, NY, 2000.
21. Ya. Shitov, *An improved bound for the lengths of matrix algebras.* — Algebra Number Theory **13**, No. 6 (2019), 1501–1507.
22. A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, *The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua.* — Arch. Ration. Mech. Anal. **2** (1959), 309–336.

Markova O. V. Length function and simultaneous triangularization of matrix pairs.

The present paper links the simultaneous triangularization problem for matrix pairs with the Paz problem and known results on the length of the matrix algebra. The length function is applied to the Al'pin–Koreshkov algorithm, and it is demonstrated how to reduce its multiplicative complexity. An asymptotically better procedure for verifying the simultaneous triangularizability of a pair of complex matrices is provided. This procedure is based on results on the lengths of upper triangular matrix algebras. Also the definition of hereditary length of an algebra is introduced, and the problem of computing the hereditary lengths of matrix algebras is discussed.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
119991, Москва
E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 28 сентября 2022 г.