Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

Е. К. Куликов, А. А. Макаров

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

§1. Введение

В последние десятилетия активное развитие получили локальные методы аппроксимации, в которых коэффициенты при базисных функциях определяются как значения аппроксимационных функционалов, представляющих собой, например, линейные комбинации значений функции и ее производных в нескольких точках (подробнее см. [1–6]). Локальные схемы, в которых достигается максимальный порядок точности, называют *квазиинтерполяцией*, а возникающие при их построении функционалы – *квазиинтерполяционными.*

Методы, основанные на квазиинтерполяции, неоднократно применялись при построении алгоритмов приближения решений интегральных уравнений. В частности, в работах [7,8] было показано, что замена решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода линейной комбинацией B-сплайнов, коэффициенты при которых вычисляются с помощью квазиинтерполяции функций, входящих в уравнение, позволяет получать достаточно точные приближения к решению при использовании целого ряда подходов (например, метод Галеркина, метод Канторовича, метод итераций Слоана [9]), метод Кулкарни [10], метод вейвлет-Галеркина [11] и др.). Построение аппроксимационных функционалов для минимальных сплайнов [12, 13] (сплайн-функций, получаемых из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и порождающей вектор-функции и обладающих минимальным носителем) позволило построить модифицированный метод сплайн-коллокаций для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода [14].

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма первого рода, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, метод коллокаций, регуляризация по Тихонову, некорректно поставленная задача, минимальные сплайны, аппроксимационные функционалы, квазиинтерполяция.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Проект No. FSEE-2021-0015).

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода является примером некорректно поставленной вычислительной задачи, поэтому его решение не может быть получено непосредственным аналогом метода, предложенного для решения уравнений второго рода. В таких случаях, как правило, исходную задачу сводят к системе линейных алгебраических уравнений, к которой в дальнейшем применяют регуляризацию по Тихонову [15] либо, ввиду ее недостаточной точности, используют некоторые иные усовершенствования, см., например, [16, 17] и цитируемую там литературу. Известен и альтернативный подход, основанный на регуляризации исходного уравнения, т.е. на замене уравнения первого рода соответствующим уравнением второго рода. Такие идеи были предложены, например, в работе [18] и апробированы на ряде модельных задач. При этом полученное в результате регуляризации уравнение второго рода предлагалось решать любыми известными методами. Данный подход был отмечен как один из перспективных в обзоре [19].

В данной работе предлагается метод решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, который совмещает в себе упомянутую схему регуляризации с последующим применением модифицированного метода сплайн-коллокаций, ранее предложенного авторами. Приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают высокую точность данного подхода на ряде модельных задач, а также преимущества применения минимальных сплайнов неполиномиального вида по сравнению с обычными полиномиальными B-сплайнами.

§2. Пространство квадратичных минимальных сплайнов

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{R}^3$ – множество трехмерных вектор-столбцов с компонентами из множества $\mathbb{R}^1$ всех вещественных чисел. Компоненты векторов, например, вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, будем обозначать квадратными скобками и нумеровать целыми числами, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$, где T – операция транспонирования.

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X:

$$a = x_{-2} = x_{-1} = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = b. \quad (1)$$

Введем вспомогательные обозначения

$$J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}, \quad i, k \in \mathbb{Z}, \quad i < k; \quad M := \bigcup_{j \in J_{0,n-1}} (x_j, x_{j+1});$$

$$S_j := [x_j, x_{j+3}], \quad j \in J_{-2,n-1}.$$

Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов*. Предположим, что квадратные матрицы третьего порядка $(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$, составленные из вектор-столбцов $\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$, неособенные:

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0, \qquad j \in J_{0,n-1}. \tag{2}$$

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию (столбец)

$$\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

с компонентами из пространства $C^2[a, b]$ и ненулевым вронскианом:

$$\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}''(t)) \neq 0, \quad t \in [a, b]. \tag{3}$$

Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M.

Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M)$, $j \in J_{-2,n-1}$, удовлетворяют тождествам

$$\begin{gathered} \sum_{j'=k-2}^{k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv 0, \quad t \in M \backslash S_j, \quad j \in J_{-2,n-1}. \end{gathered} \tag{4}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$, $k \in J_{0,n-1}$, соотношения (4) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду предположения (2), система (4) имеет единственное решение, причем $\operatorname{supp} \omega_j \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов*. Тождества (4) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* (или *генерирующей*) сплайн вектор-функцией.

Положим $\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}(x_j)$, $\boldsymbol{\varphi}'_j := \boldsymbol{\varphi}'(x_j)$, $\boldsymbol{\varphi}''_j := \boldsymbol{\varphi}''(x_j)$, $j \in J_{-2,n+2}$, и рассмотрим цепочку векторов $\{\mathbf{a}^N_j\}_{j \in J_{-2,n-1}}$, заданную формулой

$$\mathbf{a}^N_j := \boldsymbol{\varphi}_{j+1} - \frac{\mathbf{d}^T_{j+2}\, \boldsymbol{\varphi}_{j+1}}{\mathbf{d}^T_{j+2}\, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}}\, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}, \tag{5}$$

где векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^3$ задаются тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_j', \boldsymbol{\varphi}_j'', \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Известно [20], что при условии (3) для цепочки векторов $\mathbf{A}^N := \{\mathbf{a}_j^N\}$, $j \in J_{0,n-1}$, выполнено неравенство (2), при этом для каждого $j \in J_{-2,n-1}$ функции удовлетворяют условиям $\omega_j \in C^1[a,b]$. Возможность использования кратных узлов в сетке (1) рассмотрена в работе [21].

Если вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}^N$ такова, что ее нулевая компонента равна 1, т.е. $\boldsymbol{\varphi}^N = \boldsymbol{\varphi}$, где $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$, то имеет место свойство разбиения единицы:

$$\sum_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) = 1, \quad t \in [a,b].$$

В этом случае, функции $\omega_j(t)$ называются *нормализованными квадратичными минимальными координатными $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами*; для них справедливо представление

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}^N(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}^N(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}^N(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}^N(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{6}$$

Пространство, образованное их линейной оболочкой, есть

$$\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi}^N) := \left\{ u(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j \, \omega_j(t), \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \ t \in [a,b] \right\}.$$

§3. Усредняющие аппроксимационные функционалы

Здесь мы будем рассматривать различные сетки. Поэтому, для удобства, некоторые объекты, рассматриваемые, например, на сетке X, будем снабжать верхним индексом X, т.е. в случае необходимости писать, например, ω_j^X.

Пусть далее $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \rho(t), \sigma(t))^T$, где $\rho, \sigma \in C^2[a, b]$. Введем обозначения (подробнее см. [22])

$$\Delta_j(\rho,\, \sigma) := \begin{vmatrix} \rho_j & \rho'_j \\ \sigma_j & \sigma'_j \end{vmatrix}, \quad S_j^X(\rho,\, \sigma,\, \tau) := -\frac{\begin{vmatrix} \Delta_j(\rho,\, \sigma) & \Delta_{j+1}(\rho,\, \sigma) \\ \tau_j & \tau_{j+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_j & \rho_{j+1} \\ \sigma_j & \sigma_{j+1} \end{vmatrix}},$$

где $\rho_j := \rho(x_j)$, $\sigma_j := \sigma(x_j)$, $\tau_j := \tau(x_j)$.

Рассмотрим вспомогательную сетку Y, состоящую из узлов

$$y_j := \begin{cases} x_0, & j = -2, \\ x_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x_{j+1}), & \theta \in [0, 1], \ \ j = -1, \ldots, n-2, \\ x_n, & j = n-1. \end{cases} \tag{7}$$

Будем строить аппроксимацию $\mathfrak{Q}f$ исходной функции f в виде

$$\mathfrak{Q}f = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j^Y(f)\, \omega_j^X, \tag{8}$$

а аппроксимационный функционал $\mu_j^Y(f)$ определим следующим образом:

$$\mu_j^Y(f) := \begin{cases} f(y_{-2}), & j = -2, \\ a_j f(y_{j-1}) + b_j f(y_j) + c_j f(y_{j+1}), & j = -1, \ldots, n-2, \\ f(y_{n-1}), & j = n-1. \end{cases} \tag{9}$$

В [13] показано, что аппроксимация (8) обладает свойством точности на функциях $f \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \,|\, i = 0, 1, 2\}$ при следующих значениях коэффициентов a_j, b_j, c_j в (9):

$$a_j = 1 - b_j - c_j,$$

$$b_j = \frac{N_j(y_{j+1})}{D_j}, \quad c_j = -\frac{N_j(y_j)}{D_j},$$

где

$$N_j(y) = \begin{vmatrix} \rho(y) - \rho(y_{j-1}) & S_{j+1}^X(\rho, \sigma, \rho') - \rho(y_{j-1}) \\ \sigma(y) - \sigma(y_{j-1}) & S_{j+1}^X(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma(y_{j-1}) \end{vmatrix},$$

$$D_j = \begin{vmatrix} \rho(y_{j+1}) - \rho(y_{j-1}) & \rho(y_j) - \rho(y_{j-1}) \\ \sigma(y_{j+1}) - \sigma(y_{j-1}) & \sigma(y_j) - \sigma(y_{j-1}) \end{vmatrix}.$$

Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, t, t^2)^T$ и $\theta = \frac{1}{2}$ на равномерной сетке функционал (9) имеет вид

$$\mu_j^Y(f) = -\frac{1}{8}\left(f(y_{j-1}) - 10f(y_j) + f(y_{j+1})\right) \tag{10}$$

и совпадает с известным квазиинтерполяционным функционалом для квадратичных B-сплайнов (см. [23]).

§4. О регуляризации и решении интегральных уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int\limits_a^b K(t,x)\,u(x)\,dx = f(t). \tag{11}$$

Для его решения будем использовать регуляризацию, заменяющую решение исходного уравнения (11) решением следующего вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\alpha u_\alpha(t) + \int\limits_a^b K(t,x)\,u_\alpha(x)\,dx = f(t), \tag{12}$$

содержащего малый вещественный параметр $\alpha > 0$. Известно [15, 18], что решение уравнения (12) $u_\alpha(t)$ стремится к решению $u(t)$ исходного уравнения (11) при $\alpha \to 0$.

Далее уравнение (12) будем решать предложенным авторами в [14] модифицированным методом сплайн-коллокаций при условии выполнения требований, накладываемых на ядро оператора Фредгольма $K(t,x)$ и функцию $f(t)$.

Заметим, что задача решения уравнения Фредгольма первого рода является некорректно поставленной. Поэтому решение может не существовать, или полученное решение может оказаться для исходного уравнения не единственным.

Пусть $t \in [a,b]$. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода запишем в виде

$$u(t) - \mathcal{K}u(t) = f(t). \tag{13}$$

Предположим, что $f \in C[a,b]$ и оператор $(\mathcal{I}{-}\mathcal{K})$ обратим; здесь $\mathcal{I}$ – тождественный оператор. Задача решения уравнения Фредгольма второго рода является корректно поставленной. Уравнение (13) имеет единственное решение $u \in C[a,b]$ для любой заданной функции $f \in C[a,b]$.

Используя ядро $K \in C([a,b] \times [a,b])$, определим линейный компактный оператор $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathcal{K}u(t) := \int\limits_a^b K(t,x)\,u(x)\,dx, \quad t \in [a,b].$$

Будем строить аппроксимацию решения уравнения (13) на сетке (1) в виде

$$u^h(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\,\omega_j(t), \tag{14}$$

а вместо $\mathcal{K}$ и f будем использовать их приближения $\mathfrak{Q}\mathcal{K}$ и $\mathfrak{Q}f$ соответственно, построенные путем аппроксимации указанных функций в соответствии с равенствами (8) и (9). Тогда уравнение (13) можно переписать в виде

$$u^h = \mathfrak{Q}f + \mathfrak{Q}\mathcal{K}u^h \tag{15}$$

или, если ввести обозначение $\widetilde{\omega}_j := \mathcal{K}\,\omega_j$,

$$\sum_{j=-2}^{n-1} c_j\,\omega_j(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j^Y(f)\,\omega_j(t) + \mathfrak{Q}\sum_{i=-2}^{n-1} c_i\,\widetilde{\omega}_i(t),$$

откуда

$$c_j = \mu_j^Y(f) + \sum_{i=-2}^{n-1} c_i\,\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i), \quad j \in J_{-2,n-1}. \tag{16}$$

Составив из коэффициентов c_j вектор $\mathbf{c} := (c_{-2}, c_{-1}, \ldots, c_{n-1})^T$, из функционалов $\mu_j^Y(f)$ – вектор $\boldsymbol{\mu} := (\mu_{-2}^Y(f), \mu_{-1}^Y(f), \ldots, \mu_{n-1}^Y(f))^T$, а из функционалов $\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i)$ – матрицу $\boldsymbol{M} := (M_{j,i}) = \left(\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i)\right)$, где $j, i \in J_{-2,\ldots,n-1}$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\,\mathbf{c} = \boldsymbol{\mu},$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица, решение которой определяет коэффициенты c_j в аппроксимации (14).

Известно [9], что с помощью представления (15) полученное решение (14), можно уточнить итерацией

$$\widetilde{u}^h := \mathcal{K}u^h + f,$$

и поэтому итоговая аппроксимация решения уравнения Фредгольма второго рода может быть построена в виде

$$\widetilde{u}^h(t) = f(t) + \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \widetilde{\omega}_j(t). \tag{17}$$

Отметим, что

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \mathcal{K}\,\omega_j(t) = \int_a^b K(t,x)\,\omega_j(x)\,dx,$$

а путем замены функции $K(t,x)$ под знаком интеграла ее аппроксимацией вычисление данного интеграла может быть сведено к вычислению значения

$$W_{ij} := \int_a^b \omega_i(t)\,\omega_j(t)\,dt,$$

которое может быть вычислено либо точно, либо с помощью стандартных методик численного интегрирования.

§5. Численные эксперименты

Во всех проводимых численных экспериментах рассматриваются сетки вида (1) на отрезке аппроксимации $[a,b]=[0,1]$ и вспомогательные сетки на том же отрезке.

Для $\boldsymbol{\varphi}^B(t) := (1,t,t^2)^T$ функции (6) совпадают с известными квадратичными полиномиальными B-сплайнами (третьего порядка):

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)}, & t\in[x_j,x_{j+1}),\\[2ex] \dfrac{1}{x_{j+1}-x_j}\left(\dfrac{(t-x_j)^2}{x_{j+2}-x_j}\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})}\right), & t\in[x_{j+1},x_{j+2}),\\[2ex] \dfrac{(t-x_{j+3})^2}{(x_{j+3}-x_{j+1})\,(x_{j+3}-x_{j+2})}, & t\in[x_{j+2},x_{j+3}),\end{cases}$$

а при $\boldsymbol{\varphi}^H(t) := (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$ функции (6) имеют следующий вид (подробнее см. [24]):

$$\omega_j^H(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{t-x_j}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\operatorname{sh}\frac{x_{j+2}-x_j}{2}}, & t\in[x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+1}-x_j}{2}}\left(\dfrac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{t-x_j}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+2}-x_j}{2}}\right. & \\ \quad\left.-\dfrac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{t-x_{j+1}}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{x_{j+3}-x_j}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\operatorname{sh}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}\right), & t\in[x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_{j+3}-t}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\operatorname{sh}\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}}, & t\in[x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases}$$

При проведении численных экспериментов для приближаемых функций g будем строить аппроксимацию $\widetilde{g} \in \mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi}^N)$ по формуле (8), записанную в виде

$$\widetilde{g} = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\,\omega_j, \tag{18}$$

где функции ω_j строятся на равномерной сетке вида (1), а коэффициенты c_j определяются на сетке (7) в зависимости от вариантов выбора порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и используемоего аппроксимационного функционала. Эти три варианта следующие:

(1) $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}^B(t)$, $\omega_j(t) = \omega_j^B(t)$, а коэффициенты c_j определяются значениями функции g в точках Гревилля;
(2) $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}^B(t)$, $\omega_j(t) = \omega_j^B(t)$, c_j определяются формулой (10);
(3) $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}^H(t)$, $\omega_j(t) = \omega_j^H(t)$, c_j определяются соотношением (9).

В качестве критерия точности построенного приближенного решения используется оценка максимума абсолютного значения отклонения, полученного по формуле (17), приближения $\widetilde{u}^h$ от значений точного решения u, вычисленная в узлах вспомогательной сетки, в десять раз более мелкой, чем исходная, т.е.

$$E = \max_{t\in[a,b]} |\widetilde{u}^h(t) - u(t)|.$$

Далее покажем, как точность получаемого приближенного решения будет меняться в зависимости от выбора порождающей вектор-функции и используемого аппроксимационного функционала в выражении (18).

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 t\,x\,u(x)\,dx = 2t, \tag{19}$$

одним из решений которого является функция $u(t) = 6t$.

Построим приближенное решение уравнения (19) в виде (17), предварительно проведя регуляризацию с параметром $\alpha = 10^{-10}$. Результаты эксперимента приведены в табл. 1.

Таблица 1. Ошибка аппроксимации решения уравнения (19) в зависимости от количества узлов сетки n.

вариант	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$
1	0.0139	0.0043	0.0013
2	**0.0069**	**0.0024**	**0.0008**

Таким образом, предложенный подход к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода позволяет получить достаточно точное приближение функции решения.

Рассмотрим теперь, как применение минимальных сплайнов неполиномиального вида может повысить точность аппроксимации относительно того же метода приближения, использующего полиномиальные B-сплайны.

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{3t-4x}\,u(x)\,dx = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{3t}, \tag{20}$$

одним из решений которого является функция $u(t) = \mathrm{e}^{3t+1}$. Построим аппроксимацию решения уравнения (20) по аналогии с предыдущим примером. Результаты эксперимента приведены в табл. 2.

Таблица 2. Ошибка аппроксимации решения уравнения (20) в зависимости от количества узлов сетки n.

вариант	$n = 32$	$n = 64$
2	0.00514	0.00110
3	**0.00067**	**0.00036**

Заметим, что модельные задачи (19) и (20) взяты из работы [18], в которой используются итерационные методы решения регуляризованных уравнений, однако численные результаты, показывающие характер сходимости итераций к точному решению, там не приводятся.

Список литературы

1. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике.* — М., 1976.
2. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* — М., 1980.
3. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines.* — Springer-Verlag, New York (revised edition), 2001.
4. И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны и их приложения.* — Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010.
5. L. L. Schumaker, *Spline Functions: Computational Methods.* — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2015.
6. M. Buhmann, J. Jäger, *Quasi-Interpolation.* — Cambridge University Press, 2022.
7. C. Allouch, P. Sablonniere, D. Sbibih, *A modified Kulkarni's method based on a discrete spline quasi-interpolant.* — Math. Comput. Simul. **81** (2011), 1991–2000.
8. C. Dagnino, S. Remogna, P. Sablonniere, *On the solution of Fredholm integral equation based on spline quasi-interpolating projectors.* — BIT **54**, No. 4 (2014), 979–1008.
9. I. Sloan, *Improvement by iteration for compact operator equations.* — Math. Comput. **30** (1976), 758–764.
10. R. Kulkarni, *On improvement of the iterated Galerkin solution of the second kind integral equations.* — J. Numer. Math. **13** (2005), 205–218.
11. D. Černá, V. Finěk, *Galerkin method with new quadratic spline wavelets for integral and integro-differential equations.* — J. Comput. Appl. Math. **363** (2020), 426–443.
12. O. Kosogorov, A. Makarov, *On some piecewise quadratic spline functions.* — Lect. Notes Comput. Sci. **10187** (2017), 448–455.

13. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О построении аппроксимационных функционалов для минимальных сплайнов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 136–156.
14. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О модифицированном методе сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма.* — Дифф. ур. проц. упр. No. 4 (2021), 211–223.
15. A. N. Tikhonov, *On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization.* — Soviet Math. **4** (1963), 1035–1038.
16. I. G. Burova, V. M. Ryabov, *On the solution of Fredholm integral equation of the first kind.* — WSEAS Trans. Math. **19** (2021), 699–708.
17. А. В. Лебедева, В. М. Рябов, *О регуляризации решения интегральных уравнений первого рода с помощью квадратурных формул.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1 **8 (66)**, No. 4 (2021), 593–599.
18. A. Wazwaz, *The regularization method for Fredholm integral equations of the first kind.* — Comput. Math. Appl. **61**, No. 10 (2011), 2981–2986.
19. D. Yuan, X. Zhang, *An overview of numerical methods for the first kind Fredholm integral equation.* — SN Appl. Sci. **10** (2019), 1178–1190.
20. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Пробл. матем. анал. **60** (2011), 25–38.
21. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О квадратичных минимальных сплайнах с кратными узлами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 220–230.
22. E. K. Kulikov, A. A. Makarov, *On de Boor–Fix type functionals for minimal splines.* — Topics in Classical and Modern Analysis (2019), 211–225.
23. P. Sablonniere, *Quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains of* $\mathbb{R}^d$*,* $d = 1, 2, 3$*.* — Rend. Sem. Mat. **61**, No. 3 (2003), 229–246.
24. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об аппроксимации гиперболическими сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 179–194.

Kulikov E. K., Makarov A. A. A method for solving the Fredholm integral equation of the first kind.

The paper considers a numerical method for solving the Fredholm integral equation of the first kind, the essence of which is to replace the original equation with the corresponding regularized equation of the second kind, which is then solved by the modified spline collocation method. The solution in this case is represented by a linear combination of minimal splines. The coefficients at the splines are computed using local approximation (in some cases, quasi-interpolation) methods. Results of numerical experiments are presented, which show that on model problems the proposed method results in sufficiently accurate approximations, and the use

of minimal splines of a nonpolynomial form and related functionals can improve the approximation accuracy.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: egor.k.kulikov@gmail.com

Поступило 06 октября 2022 г.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный
электротехнический университет “ЛЭТИ”
ул. Профессора Попова, 5,
197022, С.-Петербург, Россия
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru