Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ SDD_1 МАТРИЦАХ

§1. Введение и предварительные сведения

В 2011 Пенья [13] ввел в рассмотрение новый класс так называемых SDD_1 матриц. Этот класс, очевидно, содержит класс матриц со строгим диагональным преобладанием в качестве подкласса. С другой стороны, известно [5, 7, 13], что любая SDD_1 матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. (Этот результат опубликован впервые в работе [13], но, как было указано в работе [7], доказательство, представленное в [13], содержало ошибку.) Другими словами, для любой SDD_1 матрицы A найдется такая диагональная матрица D с положительными диагональными элементами, что отмасштабированная по столбцам матрица AD имеет строгое диагональное преобладание.

Прежде чем привести необходимые определения и факты, уточним обозначения, используемые в данной работе.

Если $n \geqslant 1$ – натуральное число, то $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$.

Пусть $S \subseteq \langle n\rangle$. Тогда дополнение $\langle n\rangle \setminus S$ множества S в $\langle n\rangle$ обозначается через $\bar{S}$, а мощность S – через $|S|$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

– усеченные абсолютные строчные суммы матрицы A, а для подмножества $S \subseteq \langle n\rangle$, мы полагаем

$$r_i^S(A) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Через

$$R_A = \{i \in \langle n\rangle : \ |a_{ii}| > r_i(A)\} \tag{1.1}$$

Ключевые слова: SDD_1 матрицы, SDD_1^* матрицы, SDD матрицы, S-SDD матрицы, невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы, верхние оценки обратных матриц, l_∞-норма.

обозначается множество номеров строк матрицы A, имеющих строгое диагональное преобладание, и мы полагаем

$$p_i(A) = \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j \in \bar{R}_A \setminus \{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Через $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ обозначается матрица сравнение для A, определяемая соотношениями

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Через I_n (или просто I) обозначается единичная матрица порядка n.
Если $S, T \subset \langle n \rangle$ – непустые подмножества множества индексов $\langle n \rangle$, то $A[S,T] = (a_{ij})_{\substack{i \in S \\ j \in T}}$ – это подматрица матрицы A с номерами строк из S и номерами столбцов из T; главная подматрица $A[S,S]$ также обозначается через $A[S]$.
$e^{(n)} = e = [1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.
Матричные неравенства понимаются покомпонентно.

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, имеет строгое диагональное преобладание, т.е. является SDD матрицей, если она удовлетворяет условиям

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, если ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица.

SDD_1 матрицы определяются следующим образом.

Определение 1.1 ([13]). Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD_1 матрицей, если она удовлетворяет условию

$$|a_{ii}| > p_i(A) \quad \text{для всех} \quad i \notin R_A. \tag{1.3}$$

В работе [5] получены две верхних оценки нормы обратной $\|A^{-1}\|_\infty$ для SDD_1 матрицы A. Общая оценка [5, Theorem 6] зависит от параметра ε, а оценка, не содержащая параметров, справедлива только для матриц, которые ниже мы называем SDD_1^{**} матрицами.

SDD_1 матрицы обладают следующими свойствами, которые легко следуют из определения 1.1.

1. Матрица A является SDD_1 матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является SDD_1 матрицей.

2. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SDD_1 матрица, то

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

3. Для любой SDD_1 матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ из (1.2) следует, что

$$p_i(A) \leqslant r_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.5}$$

причем равенство $p_i(A) = r_i(A)$ имеет место тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 0$ для всех $j \in R_A \setminus \{i\}$, т.е. $r_i^{R_A}(A) = 0$.

4. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SDD_1 матрица, то

$$p_i(A) < |a_{ii}| \quad \text{для всех} \quad i \in \langle n\rangle. \tag{1.6}$$

Действительно, если $i \notin R_A$, то соотношение (1.6) выполняется в силу (1.3), тогда как при $i \in R_A$, в силу (1.5), мы имеем

$$p_i(A) \leqslant r_i(A) < |a_{ii}|.$$

5. Если A – SDD_1 матрица, то, в силу определения (1.1) и неравенств (1.4), мы имеем

$$r_i(A) \neq 0, \quad i \notin R_A,$$

т.е. i-ая строка матрицы A не является диагональной. Справедливо и более сильное утверждение (см. [5, Theorem 2]), а именно:

$$r_i^{R_A}(A) \neq 0 \quad \text{для всех } i \notin R_A. \tag{1.7}$$

Действительно, допустим, что $r_i^{R_A}(A) = 0$ при некотором $i \notin R_A$. Тогда, ввиду (1.3),

$$|a_{ii}| > p_i(A) = r_i^{\bar{R}_A}(A) = r_i(A) \geqslant |a_{ii}|,$$

противоречие.

Тем не менее, возможно, что $r_i(A) = 0$ при $i \in R_A$, т.е. i-ая строка матрицы A является диагональной (так что матрица A приводима).

В этой связи мы вводим в рассмотрение следующее подмножество множества R_A:

$$R_A^0 := \{i \in R_A :\ r_i(A) = 0\}. \tag{1.8}$$

Ясно, что если $R_A^0 \neq \varnothing$, то главная подматрица $A[R_A^0]$ диагональна, при этом

$$p_i(A) = \begin{cases} 0, & i \in R_A^0, \\ \sum_{j\in R_A\setminus(R_A^0\cup\{i\})} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{R}_A}(A), & i \notin R_A^0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Более того (см. Предложение 3.1 ниже), если A является SDD_1 матрицей, то и $A[\bar{R}_A^0]$ также является SDD_1 матрицей. Заметим, что если A

– SDD_1 матрица и $R_A^0 = R_A$, то, в силу (1.9), $p_i(A) = r_i^{\bar{R}_A}(A)$, откуда следует, что главная подматрица $A[\bar{R}_A]$ имеет строгое диагональное преобладание.

Введем следующие определения.

Определение 1.2. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, есть SDD_1^* матрица, если она является SDD_1 матрицей и $R_A^0 = \varnothing$, т.е. у A нет диагональных строк.

Определение 1.3. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, есть SDD_1^{**} матрица, если она является SDD_1 матрицей и

$$r_i^{R_A}(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in R_A. \tag{1.10}$$

Заметим, что, в силу (1.7), условие (1.10) эквивалентно формально более жесткому условию

$$r_i^{R_A}(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \langle n\rangle. \tag{1.11}$$

Ввиду (1.11), каждая SDD_1^{**} матрица тем более является и SDD_1^* матрицей. Однако не всякая SDD матрица является SDD_1^* матрицей. Действительно, как легко видеть, SDD матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является SDD_1^*, а также и SDD_1^{**} матрицей тогда и только тогда, когда $R_A^0 = \varnothing$, т.е. $r_i(A) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Определим две диагональные матрицы, рассматриваемые в [5, 7], полагая

$$\Delta_A = \operatorname{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}, \quad \text{где} \quad \delta_i = \begin{cases} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, & i \in R_A, \\ 1, & i \in \bar{R}_A, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.12}$$

и

$$D_A = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\}, \quad \text{где} \quad d_i = \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.13}$$

Ясно, что если A – SDD_1 матрица, то обе матрицы Δ_A и D_A являются невырожденными тогда и только тогда, когда $R_A^0 = \varnothing$, т.е. A – SDD_1^* матрица; при этом

$$p_i(A) = r_i(A\Delta_A), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.14}$$

SDD_1^{**} матрицы (без специального наименования) рассматривались в работах [5, 7], в которых были установлены следующие результаты.

Теорема 1.1 ([7])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– SDD_1^{**} матрица и пусть матрица Δ_A определена в* (1.12)*. Тогда $B = A\Delta_A$ является SDD матрицей.*

Теорема 1.2 ([5, Theorem 4])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– SDD_1^{**} матрица и пусть матрица D_A определена в* (1.13)*. Тогда $C = AD_A$ является SDD матрицей.*

Ясно, что из теорем 1.1 и 1.2 немедленно вытекает, что SDD_1^{**} матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Кроме того, из теорем 1.1 и 1.2, классической верхней оценки [4, 14]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \tag{1.15}$$

справедливой для любой SDD матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, и очевидных соотношений

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\Delta_A\|_\infty\, \|B^{-1}\|_\infty \leqslant \|B^{-1}\|_\infty \tag{1.16}$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|D_A\|_\infty\, \|C^{-1}\|_\infty \tag{1.17}$$

нетрудно получить следующие верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$.

Теорема 1.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– SDD_1^{**} матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A} \frac{1}{r_i(A) - p_i(A)},\ \max_{i\notin R_A} \frac{1}{|a_{ii}| - p_i(A)}\right\}. \tag{1.18}$$

Теорема 1.4 ([5, Theorem 8])**.** *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– SDD_1^{**} матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|} \times \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{p_i(A) - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}}. \tag{1.19}$$

В данной работе мы продолжаем изучение SDD_1 матриц. В частности, мы обобщаем оценки (1.18) и (1.19) на SDD_1^* матрицы, а также устанавливаем не содержащие параметров верхние оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$, справедливые для общих и некоторых специальных SDD_1 матриц A. Статья построена следующим образом. В §2 мы сперва обобщаем теоремы 1.1–1.2 на случай SDD_1^* матриц. Как будет показано, в этом случае, более общем, чем случай SDD_1^{**} матриц, матрица $B = A\Delta_A$ может не иметь строгого диагонального преобладания, но она является R_A-SDD матрицей (определение S-SDD матриц мы напомним ниже), тогда как матрица $C = AD_A$ является SDD матрицей при некоторых дополнительных условиях. Также мы вводим в рассмотрение класс SDD_1^{***} матриц и указываем диагональную матрицу Γ_A такую, что $A\Gamma_A$ имеет строгое диагональное преобладание в случае SDD_1^{***} матрицы A и является R_A-SDD матрицей в том случае, когда A есть SDD_1^* матрица. Эти результаты позволяют нам получить в теоремах 2.5–2.9 различные верхние оценки для обратных к SDD_1^* матрицам. В заключительном §3 рассматривается случай SDD_1 матриц общего вида.

В заключение данного вводного параграфа мы напоминаем определение так называемых S-SDD матриц и известную верхнюю оценку бесконечной нормы обратной к S-SDD матрице.

Определение 1.4 ([6, 15]). Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subsetneqq \langle n\rangle$ – непустое собственное подмножество множества индексов. Матрица A называется S-SDD (S-Strictly Diagonally Dominant) матрицей, если выполняются следующие два условия:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{1.20}$$

и

$$\big[|a_{ii}| - r_i^S(A)\big]\Big[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\Big] > r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A) \qquad \text{для всех} \quad i\in S \quad \text{и всех} \quad j \in \bar S. \tag{1.21}$$

Стоит упомянуть, что S-SDD матрицы впервые появились в работе [8], где было показано, что они являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. По существу тот же матричный класс рассматривался в работе [1], а также (под названием $\mathrm{PBDD}(n_1, n_2)$ матриц) и в работе [2]. Под названием GDSDD матриц эти матрицы также рассматривались в работах [10] и [9].

Ясно, что любая SDD матрица является S-SDD матрицей для любого непустого собственного подмножества S множества $\langle n\rangle$.

Верхняя оценка для бесконечной нормы обратной к S-SDD матрице приводится в следующей теореме.

Теорема 1.5. ([11, 2]) *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A) + r_i^{\bar S}(A)\}}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}. \tag{1.22}$$

Напомним (см. [2,11]), что для SDD матрицы A оценка теоремы 1.5 является, вообще говоря, более точной, чем классическая оценка (1.15).

Также уместно отметить, что поскольку A является S-SDD матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ есть S-SDD матрица, то оценка (1.22) справедлива для A и $\mathcal{M}(A)$ одновременно.

Представляется интересным указать, что в том случае, когда $S = R_A$, или в том более общем случае, когда

$$\min_{i\in S}\{|a_{ii}| - r_i(A)\} \geqslant \max_{j\in\bar S}\{|a_{jj}| - r_j(A)\}, \tag{1.23}$$

оценка (1.22) теоремы 1.5 сводится к следующей формально более простой оценке.

Следствие 1.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$. Если S удовлетворяет условию* (1.23), *то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}. \tag{1.24}$$

Доказательство. Действительно, если выполнено условие (1.23), то для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar S$ мы имеем

$$|a_{ii}| - r_i^S(A) \geqslant [r_i^{\bar S}(A) + |a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_j^S(A),$$

откуда следует, что

$$|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A) \geqslant |a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A) + r_i^{\bar S}(A).$$

$\square$

§2. SDD_1^* матрицы

В этом параграфе сперва мы докажем, что если A является SDD_1^* матрицей, то $B = A\Delta_A$ – R_A-SDD матрица, а $C = AD_A$ имеет строгое диагональное преобладание при некоторых дополнительных условиях. Затем мы введем еще одну диагональную масштабирующую матрицу Γ_A и рассмотрим матрицу $G = A\Gamma_A$. Основываясь на полученных результатах, мы выведем верхние оценки для бесконечной нормы обратной к различным SDD_1^* матрицам.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1^* матрица и пусть

$$B = (b_{ij}) = A\Delta_A, \tag{2.1}$$

где диагональная матрица Δ_A определена в (1.12). Тогда, в силу (2.1) и (1.2), мы имеем

$$|b_{ii}| = \begin{cases} r_i(A), & i \in R_A, \\ |a_{ii}|, & i \notin R_A; \end{cases} \qquad r_i(B) = p_i(A), \quad i = 1,\dots,n. \tag{2.2}$$

Заметим сперва, что если A – SDD матрица, т.е. $R_A = \langle n\rangle$, и у матрицы A нет диагональных строк, то и матрица B также имеет строгое диагональное преобладание. Действительно, в рассматриваемом случае, $\Delta_A < I_n$, так что

$$r_i(B) = p_i(A) < r_i(A) = |b_{ii}|, \quad i = 1,\dots,n.$$

Отсюда следует, что B является S-SDD матрицей для любого подмножества S множества $\langle n\rangle$.

В том нетривиальном случае, когда SDD_1^* матрица A не имеет строгого диагонального преобладания, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1^* матрица, причем $R_A \neq \langle n\rangle$, и пусть матрица $B = (b_{ij})$ определена в* (2.1). *Тогда B является R_A-SDD матрицей.*

Доказательство. Пусть сперва $i \in R_A$. Мы имеем

$$|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B) = r_i(A) - \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}. \tag{2.3}$$

Если $r_i^{R_A}(A) = 0$, то $r_i^{R_A}(B) = 0$, а значит, в силу (2.3),

$$|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B) = r_i(A) = r_i^{\bar R_A}(A) = r_i^{\bar R_A}(B) > 0. \tag{2.4}$$

Если же $r_i^{R_A}(A) \neq 0$, то справедливо строгое неравенство

$$\sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} < r_i^{R_A}(A),$$

и, используя (2.3), мы выводим:

$$|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B) > r_i(A) - r_i^{R_A}(A) = r_i^{\bar{R}_A}(A) = r_i^{\bar{R}_A}(B) \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4) и (2.5) показывают, что матрица B удовлетворяет условию (1.20) для $S = R_A$.

Пусть теперь $j \in \bar{R}_A$. В этом случае, используя (2.2), определение 1.1 и условие (1.7), мы выводим

$$\begin{aligned}|b_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(B) &= [|a_{jj}| - r_j(B)] + r_j^{R_A}(B)\\ &= [|a_{jj}| - p_j(A)] + r_j^{R_A}(B) > r_j^{R_A}(B) > 0.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Итак, обе главные подматрицы $B[R_A]$ и $B[\bar{R}_A]$ имеют строгое диагональное преобладание, и для доказательства того факта, что B есть R_A-SDD матрица, остается убедиться, что B удовлетворяет условию (1.21) из определения 1.4 для $S = R_A$.

Если $r_i^{\bar{R}_A}(A) = r_i^{\bar{R}_A}(B) = 0$, то $r_i^{R_A}(A) \neq 0$, и, в силу (2.5) и (2.6), для $i \in R_A$ и $j \in \bar{R}_A$ мы имеем

$$[|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B)]\,[|b_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(B)] > 0 = r_i^{\bar{R}_A}(B)\, r_j^{R_A}(B).$$

Наконец, предположим, что $r_i^{\bar{R}_A}(B) = r_i^{\bar{R}_A}(A) \neq 0$. В этом случае, с помощью (2.4)–(2.5) и (2.6) мы выводим:

$$[|b_{ii}| - r_i^{R_A}(B)]\,[|b_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(B)] > r_i^{\bar{R}_A}(B)\, r_j^{R_A}(B).$$

Теорема 2.1 доказана. □

Как известно, S-SDD являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Следовательно, из теоремы 2.1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Всякая SDD_1^* матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

Теперь мы установим обобщение теоремы 1.2.

Теорема 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *–* SDD_1^* *матрица такая, что* $R_A \neq \langle n\rangle$, *и пусть* $C = (c_{ij}) = AD_A$, *где* $D_A = \operatorname{diag}\left\{\frac{p_1(A)}{|a_{11}|}, \ldots, \frac{p_n(A)}{|a_{nn}|}\right\}$. *Если при всех* $i \in \langle n\rangle$ *либо*

$$a_{ij} \neq 0 \text{ для некоторого } j \in R_A \setminus \{i\} \text{ такого, что } r_j^{R_A}(A) \neq 0, \tag{2.7}$$

либо

$$r_i^{\bar{R}_A}(A) \neq 0, \tag{2.8}$$

то C *является SDD матрицей.*

Доказательство. Ясно, что

$$|c_{ii}| = p_i(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Поскольку A – SDD_1 матрица, то, в силу (1.6), мы имеем

$$p_i(A) < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Пусть $i \in \langle n\rangle$. Если выполнено условие (2.7), то найдется $j \in R_A \setminus \{i\}$ такое, что $p_j(A) < r_j(A)$, так что

$$|a_{ij}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|} < |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|},$$

откуда, ввиду (2.10) и (2.9), следует, что

$$r_i(C) = \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|} < \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}}|a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{R}_A}(A) = p_i(A) = |c_{ii}|. \tag{2.11}$$

В том же случае, когда выполнено условие (2.8), мы имеем

$$\sum_{j\in \bar{R}_A\setminus\{i\}}|a_{ij}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|} < r_i^{\bar{R}_A}(A),$$

откуда также следует (2.11).

Теорема доказана. □

Заметим, что условия теоремы 2.2 выполняются, в частности, если A является SDD_1^{**} матрицей, т.е. $r_i^{R_A}(A) \neq 0$ для всех $i \in \langle n\rangle$, или же если

$$r_i^{\bar{R}_A}(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \langle n\rangle. \tag{2.12}$$

Условие (2.12) можно рассматривать как двойственное условию (1.11), и мы вводим в рассмотрение следующий подкласс SDD_1^* матриц.

Определение 2.1. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD_1^{***} матрицей, если она является SDD_1^{*} матрицей и удовлетворяет условию

$$r_i^{\bar{R}_A}(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \bar{R}_A. \tag{2.13}$$

Замечание 2.1. Нетрудно заметить, что $A{\in}\mathbb{C}^{n\times n}$, $n \leqslant 2$, является SDD_1^{**} или SDD_1^{***} матрицей, если главная подматрица соответственно $A[R_A]$ или $A[\bar{R}_A]$ не содержит диагональных строк.

Для SDD_1^{***} матриц справедлив следующий аналог теорем 1.1 и 1.2.

Теорема 2.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *–* SDD_1^{***} *матрица и пусть*

$$\Gamma_A = \mathrm{diag}\,\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}, \quad \gamma_i = \begin{cases} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, & i \in R_A, \\ \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|}, & i \in \bar{R}_A, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Тогда $G = A\Gamma_A$ *является SDD матрицей.*

Доказательство. Для $G = (g_{ij})$ мы имеем:

$$|g_{ii}| = \begin{cases} r_i(A), & i \in R_A, \\ p_i(A), & i \in \bar{R}_A, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

и

$$r_i(G) = \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j \in \bar{R}_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.16}$$

Поскольку A – SDD_1^{*} матрица, то

$$\forall i \in \langle n \rangle \; \exists j \neq i : \; a_{ij} \neq 0.$$

Пусть $i \in R_A$. Если $j \in R_A \setminus \{i\}$, то $r_j(A) < |a_{jj}|$ и

$$|a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} < |a_{ij}|. \tag{2.17}$$

Если же $j \in \bar{R}_A \setminus \{i\}$, то $p_j(A) < |a_{jj}|$, так что

$$|a_{ij}| \frac{p_j(A)}{|a_{jj}|} < |a_{ij}|. \tag{2.18}$$

В обоих случаях, из (2.16)–(2.18) и (2.15) следует, что

$$r_i(G) < r_i(A) = |g_{ii}|, \quad i \in R_A.$$

Пусть теперь $i \notin R_A$. В этом случае, в силу (2.13), $a_{ij} \neq 0$ для некоторого $j \in \bar{R}_A \setminus \{i\}$. Отсюда следует, что справедливо неравенство (2.18), и, ввиду (2.16) и (2.15), мы имеем

$$r_i(G) < p_i(A) = |g_{ii}|, \quad i \in \bar{R}_A. \qquad \square$$

Заметим, что рассматриваемые в работе диагональные матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$D_A \leqslant \Gamma_A \leqslant \Delta_A.$$

Для SDD_1^* матриц общего вида справедлив следующий результат, аналогичный теореме 2.1.

Теорема 2.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является* SDD_1^* *матрицей и пусть* $R_A \neq \langle n \rangle$. *Тогда* $G = A\Gamma_A$, *где* Γ_A *определена в* (2.14), *является* R_A*-SDD матрицей.*

Доказательство. Как было показано в доказательстве теоремы 2.3, для SDD_1^* матрицы A выполняются неравенства

$$|g_{ii}| > r_i(G), \quad i \in R_A,$$

или, что равносильно,

$$|g_{ii}| - r_i^{R_A}(G) > r_i^{\bar{R}_A}(G), \quad i \in R_A. \tag{2.19}$$

Таким образом, в соответствии с определением 1.4, нам остается доказать, что для всех $i \in R_A$ и всех $j \in \bar{R}_A$ справедливо неравенство

$$\Big[|g_{ii}| - r_i^{R_A}(G)\Big] \; \Big[|g_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(G)\Big] > r_i^{\bar{R}_A}(G)\, r_j^{R_A}(G). \tag{2.20}$$

Ввиду (2.19), для этого нам достаточно показать, что для всех $j \in \bar{R}_A$ выполняются неравенства

$$|g_{jj}| > r_j^{\bar{R}_A}(G) \quad \text{и} \quad |g_{jj}| \geqslant r_j(G). \tag{2.21}$$

Действительно, в силу (2.16), (1.6) и (2.15), мы имеем

$$r_j(G) = \sum_{k\in R_A\setminus\{j\}} |a_{jk}| \frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} + \sum_{k\in \bar{R}_A\setminus\{j\}} |a_{jk}| \frac{p_k(A)}{|a_{kk}|} \leqslant p_j(A) = |g_{jj}|,$$

что доказывает второе из неравенств в (2.21). При этом, если выполнено $r_j^{\bar{R}_A}(A) \neq 0$, то $r_j(G) < |g_{jj}|$, откуда следует первое из неравенств в (2.21).

В том же случае, когда $r_j^{\bar{R}_A}(A) = 0$, мы имеем

$$r_j^{\bar{R}_A}(G) = r_j^{\bar{R}_A}(A) = 0 < |g_{jj}|,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Теперь, основываясь на теоремах 2.1–2.4 и 1.5, мы выведем верхние оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для SDD_1^* матриц A.

Теорема 2.5. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1^* матрица и пусть $R_A \neq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{i\in R_A,\\ j\in\bar{R}_A}} \frac{\max\left\{r_i(A)-p_i^{R_A}(A)+p_j^{R_A}(A), |a_{jj}|-r_j^{\bar{R}_A}(A)+r_i^{\bar{R}_A}(A)\right\}}{\left[r_i(A)-p_i^{R_A}(A)\right]\left[|a_{jj}|-r_j^{\bar{R}_A}(A)\right]-r_i^{\bar{R}_A}(A)\,p_j^{R_A}(A)}, \tag{2.22}$$

где мы используем обозначение

$$p_i^{R_A}(A) := \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{2.23}$$

Доказательство. Ввиду (1.16), мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|B^{-1}\|_\infty, \tag{2.24}$$

где матрица B, определенная в (2.1), является R_A-SDD матрицей по теореме 2.1. Теперь для завершения доказательства остается лишь применить теорему 1.5 к R_A-SDD матрице B и учесть соотношения (2.2). □

Следует заметить, что в том случае, когда A является SDD_1^{**} матрицей, очевидно, применима теорема 2.5 и, как было упомянуто в конце §1, оценка (2.22) является, вообще говоря, более точной, чем оценка (1.18) теоремы 1.3.

Используя масштабирующую матрицу D_A и теорему 2.2, мы приходим к следующему обобщению теоремы 1.4.

Теорема 2.6. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD_1^* матрицей и удовлетворяет условиям теоремы* 2.2. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|} \times \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{p_i(A) - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Используя соотношение (1.17), теорему 2.2 и оценку (1.15), мы выводим:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|D_A\|_\infty \, \|C^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|} \times \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|c_{ii}| - r_i(C)}$$
$$= \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|} \times \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{p_i(A) - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}}.$$

□

С помощью теоремы 2.3, соотношения

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\Gamma_A\|_\infty \, \|G^{-1}\|_\infty \tag{2.26}$$

и верхней оценки (1.15) нетрудно получить следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1^{***} матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|},\ \max_{i\in \bar R_A} \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|}\right\}$$
$$\times \max\left\{\max_{i\in R_A} \frac{1}{r_i(A) - r_i(G)},\ \max_{i\in \bar R_A} \frac{1}{p_i(A) - r_i(G)}\right\}, \tag{2.27}$$

где

$$r_i(G) = \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j\in \bar R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.28}$$

Основываясь на теореме 2.4, соотношении (2.26) и теореме 1.5, мы легко устанавливаем следующую теорему.

Теорема 2.8. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1^{*} матрица, причем $R_A \neq \langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|},\ \max_{i\in \bar R_A} \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|}\right\}$$
$$\times \max_{\substack{i\in R_A,\\ j\in \bar R_A}} \frac{\max\left\{r_i(A) - r_i^{R_A}(G) + r_j^{R_A}(G),\ p_j(A) - r_j^{\bar R_A}(G) + r_i^{\bar R_A}(G)\right\}}{\left[r_i(A) - r_i^{R_A}(G)\right]\left[p_j(A) - r_j^{\bar R_A}(G)\right] - r_i^{\bar R_A}(G)\, r_j^{R_A}(G)}, \tag{2.29}$$

где

$$r_k^{R_A}(G) = \sum_{j\in R_A\setminus\{k\}} |a_{kj}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \qquad k=1,\dots,n, \tag{2.30}$$
$$r_k^{\bar R_A}(G) = \sum_{j\in \bar R_A\setminus\{k\}} |a_{kj}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}.$$

В завершение данного параграфа мы укажем, что для SDD_1^* матрицы A оценку (2.25) теоремы 2.6 можно уточнить, если оценивать $\|C^{-1}\|_\infty$ с помощью теоремы 1.5 для произвольного непустого собственного подмножества $S \subset \langle n\rangle$, а не оценки (1.15).

В частности, если выбрать такое множество S, которое удовлетворяет условию (1.23) для матрицы $C = AD_A$, т.е. условию

$$\min_{i\in S}\left\{p_i(A) - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}\right\} \geqslant \max_{i\in \bar S}\left\{p_i(A) - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{p_j(A)}{|a_{jj}|}\right\}, \tag{2.31}$$

то мы получим следующее уточнение оценки (2.25).

Теорема 2.9. *Пусть SDD_1^* матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяет условиям теоремы* 2.2 *и пусть для непустого собственного подмножества $S \subset \langle n\rangle$ выполнено условие* (2.31). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{p_i(A)}{|a_{ii}|} \times \max_{\substack{i\in S,\\ j\in \bar S}} \frac{p_i(A) - r_i^S(C) + r_j^S(C)}{\big[p_i(A) - r_i^S(C)\big]\Big[p_j(A) - r_j^{\bar S}(C)\Big] - r_i^{\bar S}(C)\, r_j^S(C)}, \tag{2.32}$$

где $C = AD_A$ *и* $D_A = \operatorname{diag}\left\{\frac{p_1(A)}{|a_{11}|},\dots,\frac{p_n(A)}{|a_{nn}|}\right\}$.

§3. SDD_1 матрицы общего вида

В этом разделе мы сконцентрируемся на тех SDD_1 матрицах, которые не являются SDD_1^* матрицами, т.е. на SDD_1 матрицах A, для которых

$$R_A^0 = \{i \in R_A :\ r_i(A) = 0\} \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Если SDD_1 матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ удовлетворяет условию (3.1), то, очевидно, главная подматрица $A[R_A^0]$ является невырожденной диагональной матрицей.

В этом параграфе мы используем дополнительное обозначение

$$S_A = \langle n\rangle \setminus R_A^0. \tag{3.2}$$

Как и выше, мы полагаем $B = A\Delta_A$, где диагональная матрица $\Delta_A = \mathrm{diag}\,\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ определена в (1.12).

Заметим, что если $R_A^0 \neq \varnothing$, то

$$r_i(A) = p_i(A) = 0, \quad i \in R_A^0, \tag{3.3}$$

откуда следует, что

$$\delta_i(A) = 0, \quad i \in R_A^0, \tag{3.4}$$

так что матрица Δ_A является вырожденной. Однако, очевидно, главная подматрица $\Delta_A[S_A]$ имеет положительные диагональные элементы. Этим она отличается от диагональных матриц D_A и Γ_A, определенных соответственно в (1.13) и (2.14). Проиллюстрируем это на следующем простом примере. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $R_A^0 = \{1\}$, $S_A = \{2,3\}$, $R_A = \{1,2\}$, $\bar{R}_A = \{3\}$,

$$\Delta_A = \mathrm{diag}\,\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \quad B = A\Delta_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_A = \mathrm{diag}\,\{0,0,0\}, \quad \Gamma_A = \mathrm{diag}\,\{0, \frac{1}{2}, 0\}.$$

Ясно, что в таком случае ни $(AD_A)[S_A]$, ни $(A\Gamma_A)[S_A]$ не могут быть использованы при доказательстве того факта, что $A[S_A]$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, что является необходимым и достаточным условием для того, чтобы A была невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.

Далее мы покажем, что если A – SDD_1 матрица и $R_A^0 \neq \varnothing$, то матрица $B[S_A] = A[S_A]\,\Delta_A[S_A]$ является $(R_A \cap S_A)$-SDD матрицей. Тем самым будет установлено обобщение теоремы 2.1 на случай SDD_1 матриц общего вида.

При доказательстве наших результатов мы воспользуемся простой леммой и двумя известными верхними оценками для $\|A^{-1}Q\|_\infty$, приводимыми ниже.

Лемма 3.1. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– блочная* 2×2 *матрица вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad A_{11} \in \mathbb{C}^{r\times r}, \quad 1 \leqslant r < n, \tag{3.5}$$

и пусть диагональные блоки A_{11} *и* A_{22} *невырождены. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\|A_{11}^{-1}\|_\infty,\ \||A_{22}^{-1}|q\|_\infty\right\}, \tag{3.6}$$

где

$$q = e^{(n-r)} + |A_{21}A_{11}^{-1}|e^{(r)} \in \mathbb{R}^{n-r}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Мы имеем

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_\infty &= \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{|A^{-1}|e\right\}_i \\ &= \max\left\{\|A_{11}^{-1}\|_\infty,\ \||A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}|e^{(r)} + |A_{22}^{-1}|e^{(n-r)}\|_\infty\right\} \\ &\leqslant \max\left\{\|A_{11}^{-1}\|_\infty,\ \||A_{22}^{-1}|\left(|A_{21}A_{11}^{-1}|e^{(r)} + e^{(n-r)}\right)\|_\infty\right\} \\ &= \max\left\{\|A_{11}^{-1}\|_\infty,\ \||A_{22}^{-1}|q\|_\infty\right\}. \end{aligned}$$

□

Теорема 3.1 ([16], см. также [3])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– SDD матрица и пусть* $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. *Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{R_i(Q)}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \tag{3.8}$$

где

$$R_i(Q) = \sum_{j=1}^{m}|q_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 3.2 ([9], см. также [3])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является S-SDD матрицей для некоторого непустого собственного* *подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$ и пусть $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\max\left\{\varphi_{ij}^S(A,Q),\ \varphi_{ji}^{\bar S}(A,Q)\right\}}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}, \quad (3.9)$$

где

$$\varphi_{ij}^S(A,Q) = \left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] R_j(Q) + r_j^S(A) R_i(Q), \quad i\in S,\ j\in\bar S, \quad (3.10)$$

а $R_i(Q)$, $i = 1,\ldots,n$, – абсолютные строчные суммы матрицы Q.

В дальнейшем наши рассмотрения будут сфокусированы на главной подматрице $A[S_A]$ произвольной SDD$_1$ матрицы A. В этой связи, мы сперва установим следующее свойство SDD$_1$ матриц.

Предложение 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD$_1$ матрица. Тогда и ее главная подматрица $A[S_A]$ также является SDD$_1$ матрицей.*

Доказательство. Если $R_A^0 = \varnothing$, то $A[S_A] = A$, и утверждение очевидно.

Пусть теперь $R_A^0 \neq \varnothing$. Если $i \in R_A \setminus R_A^0 = R_A \cap S_A$, то

$$|a_{ii}| > r_i(A) \geqslant r_i(A[S_A]).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &R_{A[S_A]} \supseteq R_A \cap S_A, \quad \bar R_{A[S_A]} \subseteq \bar R_A \cap S_A = \bar R_A, \\ &R_{A[S_A]} \setminus (R_A \cap S_A) = \bar R_A \setminus \bar R_{A[S_A]}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть $i \in S_A$. Тогда, используя (3.3), (3.11) и (1.6), мы выводим:

$$\begin{aligned} p_i(A[S_A]) &= \sum_{j\in R_{A[S_A]}\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A[S_A])}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar R_{A[S_A]}}(A[S_A]) \\ &= \left[\sum_{j\in(R_A\cap S_A)\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A[S_A])}{|a_{jj}|} + \sum_{j\in R_{A[S_A]}\setminus[(R_A\cap S_A)\cup\{i\}]} |a_{ij}| \frac{r_j(A[S_A])}{|a_{jj}|}\right] \\ &+ \sum_{j\in\bar R_{A[S_A]}\setminus\{i\}} |a_{ij}| \leqslant \sum_{j\in(R_A\cap S_A)\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j\in\bar R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \\ &= \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j\in\bar R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| = p_i(A) < |a_{ii}|. \end{aligned}$$

Этим, в частности, показано, что $p_i(A[S_A]) < |a_{ii}|$ при $i \in \bar{R}_{A[S_A]}$, что и означает, что $A[S_A]$ есть SDD_1 матрица. $\square$

Заметим, что, как показывает приведенный выше пример, SDD_1 матрица $A[S_A]$ не обязательно является SDD_1^* матрицей.

Следующая теорема обобщает теорему 2.1 на случай SDD_1 матриц общего вида.

Теорема 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1 матрица, для которой $R_A \neq \langle n\rangle$. Тогда главная подматрица $B[S_A] = A[S_A]\,\Delta_A[S_A]$ является $(R_A\cap S_A)$-SDD, или, что равносильно, $\bar{R}_A$-SDD матрицей.*

Доказательство. Если $R_A^0 = \varnothing$, то A есть SDD_1^* матрица, $S_A = \langle n\rangle$, $R_A \cap S_A = R_A$, и утверждение теоремы 3.3 сводится к утверждению теоремы 2.1.

Пусть теперь $R_A^0 \neq \varnothing$. В этом случае, для $i \in \bar{R}_A = \bar{R}_A \cap S_A$ мы имеем

$$\begin{aligned} r_i(B[S_A]) &= \sum_{j\in R_A\cap S_A} |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{R}_A}(B[S_A]) \\ &= \sum_{j\in R_A} |a_{ij}|\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{R}_A}(A) = p_i(A) < |a_{ii}| = |b_{ii}|, \end{aligned}$$

так что

$$|b_{ii}| - r_i^{\bar{R}_A}(B[S_A]) > r_i^{R_A\cap S_A}(B[S_A]), \quad i \in \bar{R}_A. \tag{3.12}$$

В соответствии с определением 1.4, теперь нам достаточно убедиться в том, что для всех $i \in \bar{R}_A$ и всех $j \in R_A\cap S_A$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\Big[|b_{ii}| - r_i^{\bar{R}_A}(B[S_A])\Big]\Big[|b_{jj}| - r_j^{R_A\cap S_A}(B[S_A])\Big] \\ &\qquad\qquad > r_i^{R_A\cap S_A}(B[S_A])\, r_j^{\bar{R}_A}(B[S_A]). \end{aligned}\tag{3.13}$$

Ввиду (3.12), для этого нам достаточно показать, что для любого $j \in R_A \cap S_A$ справедливы неравенства

$$|b_{jj}| > r_j^{R_A\cap S_A}(B[S_A]) \quad \text{и} \quad |b_{jj}| \geqslant r_j(B[S_A]). \tag{3.14}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} r_j(B[S_A]) &= \sum_{k\in(R_A\cap S_A)\setminus\{j\}} |a_{jk}|\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} + r_j^{\bar{R}_A}(B[S_A]) \\ &\leqslant r_j^{R_A\cap S_A}(A) + r_j^{\bar{R}_A}(A) = r_j^{S_A}(A) \leqslant r_j(A) = |b_{jj}|, \end{aligned}$$

что устанавливает второе неравенство из (3.14).

Далее, если $j \in R_A \cap S_A$ и $r_j^{R_A\cap S_A}(B[S_A]) = 0$, то

$$|b_{jj}| = r_j(A) > 0 = r_j^{R_A\cap S_A}(B[S_A]),$$

тогда как при $r_j^{R_A\cap S_A}(B[S_A]) \neq 0$ мы имеем

$$r_j^{R_A\cap S_A}(B[S_A]) = \sum_{k\in(R_A\cap S_A)\setminus\{j\}} |a_{jk}|\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} < r_j^{R_A\cap S_A}(A) \leqslant r_j(A) = |b_{jj}|.$$

Этим доказано первое неравенство в (3.14), что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Из теоремы 3.3 и того факта, что SDD и S-SDD матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, мы немедленно получаем следующее обобщение следствия 2.1.

Следствие 3.1. *Всякая SDD_1 матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.*

В следующей теореме приводятся не зависящие от параметров верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$, справедливые для SDD_1 матриц A общего вида.

Теорема 3.4. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1 матрица, причем $R_A \neq \langle n\rangle$.*

(i) *Если*

$$r_i^{R_A}(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in R_A \cap S_A, \tag{3.15}$$

то

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A^0}\frac{1}{|a_{ii}|},\ \max_{i\in R_A\cap S_A}\frac{1+\sum\limits_{j\in R_A^0}\frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}}{r_i(A)-p_i(A)},\ \max_{i\in \bar{R}_A}\frac{1+\sum\limits_{j\in R_A^0}\frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}}{|a_{ii}|-p_i(A)}\right\}. \tag{3.16}$$

(ii) *Независимо от условия* (3.15), *имеет место оценка*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A^0}\frac{1}{|a_{ii}|},\ \xi\right\}, \tag{3.17}$$

где

$$\xi = \max_{\substack{i\in R_A\cap S_A,\\ j\in \bar{R}_A}} \frac{\max\{\alpha_{ij},\ \beta_{ij}\}}{\gamma_{ij}}, \tag{3.18}$$

$$\alpha_{ij} = [r_i(A) - p_i^{R_A}(A)] \left(1 + \sum_{k \in R_A^0} \frac{|a_{jk}|}{|a_{kk}|}\right) + p_j^{R_A} \left(1 + \sum_{k \in R_A^0} \frac{|a_{ik}|}{|a_{kk}|}\right), \quad (3.19)$$

$$\beta_{ij} = [|a_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(A)] \left(1 + \sum_{k \in R_A^0} \frac{|a_{ik}|}{|a_{kk}|}\right) + r_i^{\bar{R}_A}(A) \left(1 + \sum_{k \in R_A^0} \frac{|a_{jk}|}{|a_{kk}|}\right), \quad (3.20)$$

$$\gamma_{ij} = [r_i(A) - p_i^{R_A}(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(A)] - r_i^{\bar{R}_A}(A)\, p_j^{R_A}(A) \qquad (3.21)$$

и, в соответствии с (2.23),

$$p_i^{R_A}(A) := \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad i \in S_A.$$

Доказательство. Покажем сперва, что условие (3.15) выполнено тогда и только тогда, когда главная подматрица $B[S_A] = A[S_A]\,\Delta_A[S_A]$ имеет строгое диагональное преобладание. Действительно, поскольку при всех $i \in \bar{R}_A$ мы имеем

$$|b_{ii}| = |a_{ii}| > p_i(A) = r_i(B) \geqslant r_i(B[S_A]),$$

то матрица $B[S_A]$ имеет строгое диагональное преобладание тогда и только тогда, когда

$$|b_{ii}| > r_i(B[S_A]) \quad \text{для всех} \quad i \in R_A \cap S_A. \qquad (3.22)$$

Но, ввиду соотношений

$$|b_{ii}| = r_i(A) = \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| + r_i^{\bar{R}_A}(A)$$

и

$$r_i(B[S_A]) = \sum_{j \in (R_A \cap S_A) \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\bar{R}_A}(A),$$

неравенство (3.22), очевидно, равносильно условию (3.15).

Если $R_A^0 = \varnothing$, то оценка (3.16) сводится к оценке (1.18) теоремы 1.5, а оценка (3.17) – к оценке (2.22) теоремы 2.5. Поэтому ниже мы рассмотрим тот случай, когда $R_A^0 \neq \varnothing$.

Не теряя общности, будем предполагать, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A[R_A^0] & 0 \\ A[S_A, R_A^0] & A[S_A] \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad |R_A^0| = r, \quad 1 \leqslant r < n.$$

Тогда, по лемме 3.1, мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \left\{\max_{i\in R_A^0} \frac{1}{|a_{ii}|},\ \||A[S_A]^{-1}|\, q\|_\infty\right\}, \tag{3.23}$$

где

$$q = (q_i) \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad q_i = 1 + \sum_{j\in R_A^0} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}, \quad i \in S_A. \tag{3.24}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}\||A[S_A]^{-1}|\, q\|_\infty &= \||\Delta_A[S_A]\cdot B[S_A]^{-1}|\, q\|_\infty \\ &\leqslant \|\Delta_A[S_A]\|_\infty \times \||B[S_A]^{-1}|\, q\|_\infty \leqslant \||B[S_A]^{-1}|\, q\|_\infty.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Поскольку $B[S_A]$ – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица, то, в силу теоремы Островского [12],

$$\|\,|B[S_A]^{-1}|\, q\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(B[S_A])^{-1} q\|_\infty. \tag{3.26}$$

Если $B[S_A]$ является SDD матрицей, то, по теореме 3.1 с учетом (3.24), мы имеем:

$$\|\mathcal{M}(B[S_A])^{-1} q\|_\infty \leqslant \max_{i\in S_A} \frac{1+\sum_{j\in R_A^0}\frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}}{|b_{ii}| - r_i(B[S_A])}. \tag{3.27}$$

Теперь для завершения доказательства оценки (3.16) остается использовать (3.23) совместно с (3.25)–(3.27) и заметить, что для всех $i \in S_A$ справедливы соотношения

$$r_i(B[S_A]) = p_i(A)$$

и

$$|b_{ii}| = \begin{cases} r_i(A), & i \in R_A \cap S_A, \\ |a_{ii}|, & i \in \bar{R}_A, \end{cases} \tag{3.28}$$

так что

$$|b_{ii}| - r_i(B[S_A]) = \begin{cases} r_i(A) - p_i(A), & \text{если} \quad i \in R_A \cap S_A, \\ |a_{ii}| - p_i(A), & \text{если} \quad i \in \bar{R}_A. \end{cases} \tag{3.29}$$

Рассмотрим тот случай, когда $B[S_A]$ может не иметь строгого диагонального преобладания. Если $i \in S_A$, то

$$r_i^{R_A\cap S_A}(B[S_A]) = \sum_{j\in (R_A\cap S_A)\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} = \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} = p_i^{R_A}(A) \tag{3.30}$$

и

$$r_i^{\bar{R}_A}(B[S_A]) = r_i^{\bar{R}_A}(A). \tag{3.31}$$

По теореме 3.3, матрица $B[S_A]$ является $(R_A \cap S_A)$-SDD матрицей. Следовательно, ввиду (3.25)–(3.26) и теоремы 3.2, мы имеем:

$$\begin{aligned}\| \, |A[S_A]^{-1}| \, q\|_\infty &\leqslant \|\mathcal{M}(B[S_A])^{-1} q\|_\infty \\ &\leqslant \max_{\substack{i \in R_A \cap S_A, \\ j \in \bar{R}_A}} \frac{\max\left\{\varphi_{ij}^{R_A \cap S_A}(\mathcal{M}(B[S_A]), q),\ \varphi_{ji}^{\bar{R}_A}(\mathcal{M}(B[S_A]), q)\right\}}{\zeta_{ij}},\end{aligned}$$

где φ_{ij} определены в (3.10) и

$$\begin{aligned}\zeta_{ij} = [|b_{ii}| - r_i^{R_A \cap S_A}(B[S_A])][|b_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(B[S_A])] \\ - r_i^{\bar{R}_A}(B[S_A]) \, r_j^{R_A \cap S_A}(B[S_A]).\end{aligned}$$

С учетом (3.28), (3.30), (3.31) и (3.21) мы получаем:

$$\zeta_{ij} = [r_i(A) - p_i^{R_A}(A)] \, [|a_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(A)] - r_i^{\bar{R}_A}(A) \, p_j^{R_A}(A) = \gamma_{ij}.$$

С другой стороны, ввиду (3.10), (3.28), (3.30)–(3.31), (3.24) и (3.19)–(3.20), мы имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}^{R_A \cap S_A}(\mathcal{M}(B[S_A]), q) &= [|b_{ii}| - r_i^{R_A \cap S_A}(B[S_A])] \, q_j + r_j^{R_A \cap S_A}(B[S_A]) \, q_i \\ &= [r_i(A) - p_i^{R_A}(A)] q_j + p_j^{R_A}(A) q_i = \alpha_{ij}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi_{ji}^{\bar{R}_A}(\mathcal{M}(B[S_A]), q) &= [|b_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(B[S_A])] \, q_i + r_i^{\bar{R}_A}(A) \, q_j \\ &= [|a_{jj}| - r_j^{\bar{R}_A}(A)] \, q_i + r_i^{\bar{R}_A}(A) \, q_j = \beta_{ij}.\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (3.32) и используя (3.18), мы заключаем, что

$$\| \, |A[S_A]^{-1}| \, q\|_\infty \leqslant \max_{\substack{i \in R_A \cap S_A, \\ j \in \bar{R}_A}} \frac{\max\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}}{\gamma_{ij}} = \xi.$$

Теперь для завершения доказательства (3.17) остается воспользоваться неравенством (3.23). □

Замечание 3.1. Как было отмечено в доказательстве теоремы 3.4, если $R_A^0 = \varnothing$, то оценка (3.16) сводится к оценке (1.18) теоремы 1.3, а оценка (3.17) – к оценке (2.22) теоремы 2.5. Таким образом, теорема 3.4 обобщает как теорему 1.3, так и теорему 2.5.

Замечание 3.2. В том частном случае, когда $R_A = R_A^0$, $S_A = \bar{R}_A$, мы имеем $R_A \cap S_A = \varnothing$, и условие (3.15) исчезает. Таким образом, оценка (3.16) заведомо справедлива и принимает следующий более простой вид:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in R_A}\frac{1}{|a_{ii}|},\ \max_{i\in \bar{R}_A}\frac{1+\sum_{j\in R_A}\frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}}{|a_{ii}|-r_i^{\bar{R}_A}(A)}\right\}. \tag{3.33}$$

В завершение работы мы представим структурное описание SDD_1 матриц общего вида, которое легко следует из предложения 3.1 по индукции.

Теорема 3.5. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD_1 матрица. Тогда A приводится симметричной перестановкой строк и столбцов к блочно треугольной матрице вида*

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kk} \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

где

(i) $k \geqslant 1$*;*

(ii) *диагональные блоки B_{ii}, $i = 1,\dots,k-1$, являются диагональными матрицами;*

(iii) *если $B_{ii} = A[S_i]$, $i = 1,\dots,k$, где $\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^k S_i$, и $S_1,\dots,S_k$ попарно не пересекаются, то*

$$S_i = R^0_{A[\langle n\rangle\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1} S_i]},\quad i = 1,\dots,k-1;$$

(iv) *SDD_1 матрица B_{kk} либо диагональна, либо является SDD_1^* матрицей.*

Заметим, что случай $k = 1$ отвечает либо диагональной матрице A, либо SDD_1^* матрице A.

Форму (3.34), очевидно, можно использовать как для вычисления бесконечной нормы обратной к SDD_1 матрице, так и для вывода верхней оценки этой нормы.

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.

2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. Л. Ю. Колотилина, *Верхние оценки для* $\|A^{-1}Q\|_\infty$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 77–87.
4. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
5. X. Cheng, Y. Li, L. Liu, Y. Wang, *Infinity norm upper bounds for the inverse of* SDD_1 *matrices.* — AIMS Math. **7(5)** (2022), 8847–8860.
6. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
7. P. F. Dai, *A note on diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.* — Adv. Comput. Math. **42** (2016), 1–4.
8. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonal dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (1992), 257–268.
9. Y. Li, Y. Wang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of GDSDD matrices.* — Mathematics **10** (2022), 186.
10. J. Liu, Y. Huang, F. Zhang, *The Schur complements of generalized doubly diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. **378** (2004), 231–244.
11. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of* SDD *and* $\mathcal{S}-SDD$ *matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
12. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
13. J. M. Peña, *Diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.* — Adv. Comput. Math. **35** (2011), 357–373.
14. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.
16. X. R. Yong, *Two properties of diagonally dominant matrices.* — Numer. Linear Algebra **3** (1996), 173–177.

Kolotilina L. Yu. On SDD_1 matrices.

The paper continues the study of the recently introduced class of SDD_1 matrices. The class of general SDD_1 matrices and three its subclasses are considered. In particular, it is shown that SDD_1 matrices are nonsingular $\mathcal{H}$-matrices. Also parameter-free upper bounds for the l_∞-norm of the inverses to SDD_1 matrices are derived. The block triangular form to which any SDD_1 matrix can be brought by a symmetric permutation of its rows and columns is described.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 19 августа 2022 г.