Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

Л. Ю. Колотилина

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ $\|A^{-1}Q\|_\infty$

§1. Введение и предварительные сведения

В последнее время в ряде работ некоторые известные оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для $n \times n$ матриц A из некоторых подклассов класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц были обобщены на случай $\|A^{-1}Q\|_\infty$, где $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. Такие более общие оценки используются, в частности, при выводе оценок бесконечной нормы обратных к блочным матрицам [12, 17, 10, 5]. Первое обобщение такого типа было предложено в работе [20] для матриц A со строгим диагональным преобладанием (SDD). Позднее известные верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$ были распространены на случай $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для OB (Ostrowski–Brauer) матриц, известных также под названием DSDD (Doubly Strictly Diagonally Dominant) матриц, а также для так называемых S-SDD матриц [7, 19], где S – это некоторое непустое собственное подмножество множества индексов. Мы приведем эти оценки ниже.

В данной работе мы предлагаем общий подход к перенесению верхних оценок $\|A^{-1}\|_\infty$ на случай $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для матриц A, принадлежащих некоторым подклассам $\mathcal{K}$ класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Эти классы должны быть замкнутыми относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы и должны содержать вместе с каждой матрицей A также и ее матрицу сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}.$$

Статья построена следующим образом. Ниже в этом вводном параграфе мы напоминаем некоторые известные определения и результаты. Унифицированный общий подход к выводу верхних оценок для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ из соответствующих оценок для $\|A^{-1}\|_\infty$ изложен в §2, а в §3

Ключевые слова: l_∞-норма обратных матриц, верхние оценки, SDD матрицы, S-SDD матрицы, OB матрицы, OBS матрицы, матрицы Некрасова, невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы.

мы применяем этот подход к SDD, S-SDD, OBS и некрасовским матрицам и получаем соответствующие известные и новые верхние оценки для $\|A^{-1}Q\|_\infty$.

Ниже мы используем обозначение $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$, где $n \geqslant 1$ – натуральное число, и полагаем

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1,\dots,n.$$

Определение 1.1. *Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, имеет строгое диагональное преобладание* (*является* SDD *матрицей*), *если*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.1}$$

Для обратной к SDD матрице хорошо известна следующая классическая верхняя оценка.

Теорема 1.1 ([6, 18])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$,* – SDD *матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{1.2}$$

Определение 1.2. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является матрицей Островского–Брауэра* (OB) [4], *или, в иной терминологии,* DSDD (*Doubly Strictly Diagonally Dominant*) *матрицей* [15, 12, 9], *если она удовлетворяет условиям*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\, r_j(A), \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{1.3}$$

Верхняя оценка для обратной к OB матрице, которая приведена в следующей теореме, была независимо установлена по крайней мере в трех работах.

Теорема 1.2 ([15, 12, 9])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является* OB *матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\, r_j(A)}. \tag{1.4}$$

Определение 1.3 ([7, 19])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subsetneqq \langle n\rangle$ – некоторое непустое собственное подмножество множества индексов. Матрица A является S-SDD* (*S-Strictly Diagonally Dominant*) *матрицей, если выполняются следующие условия:*

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \textit{для всех} \quad i \in S \tag{1.5}$$

и

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^S(A)\Big]\ \Big[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\Big] > r_i^{\bar S}(A)\ r_j^S(A)$$
$$\text{для всех}\quad i \in S \quad \text{и всех}\quad j \in \bar S. \tag{1.6}$$

Напомним, что S-SDD матрицы впервые появились в работе [8], где было показано, что они являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. По-существу этот же класс матриц рассматривался в статье [1], а также (под названием PBDD(n_1, n_2) матриц) и в работе [2]. Под названием GDSDD матриц они исследовались в работах [11] и [10].

Известная верхняя оценка для нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ обратной к S-SDD матрице A приводится в следующей теореме.

Теорема 1.3 ([13, 2]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-*SDD *матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar S} \frac{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A),\ |a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A) + r_i^{\bar S}(A)\}}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)}. \tag{1.7}$$

В дальнейшем для произвольной матрицы $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$, через

$$R_i(Q) = \sum_{j=1}^{m} |q_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.8}$$

мы обозначаем абсолютные строчные суммы матрицы Q. Приводимые ниже теоремы обобщают теоремы 1.1, 1.2 и 1.3 и содержат верхние оценки для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для произвольной матрицы Q, а не только для $Q = I_n$, где $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - единичная матрица порядка n.

Теорема 1.4 ([20]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является* SDD *матрицей и пусть $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{R_i(Q)}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{1.9}$$

Аналоги теоремы 1.4 для OB и S-SDD матриц имеют следующий вид.

Теорема 1.5 ([17]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является* OB *матрицей и пусть $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{|a_{jj}|R_i(Q) + r_i(A)R_j(Q)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)}. \tag{1.10}$$

Теорема 1.6 ([10]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества $\langle n\rangle$ и пусть $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar S} \frac{\xi_{ij}(A,Q)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\,r_j^S(A)}, \tag{1.11}$$

где мы используем обозначение

$$\begin{aligned}\xi_{ij}(A,Q) = \max\{&[|a_{ii}| - r_i^S(A)]R_j(Q) + r_j^S(A)R_i(Q),\\ &[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)]R_i(Q) + r_i^{\bar S}(A)R_j(Q)\}, \quad i \in S,\ j \in \bar S.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Ясно, что в том случае, когда $Q = I_n$, оценки теорем 1.4–1.6 сводятся к соответствующим оценкам теорем 1.1–1.3.

§2. Общий подход

Общий подход к выводу верхних оценок для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ из соответствующих верхних оценок для $\|A^{-1}\|_\infty$ базируется на следующей основной лемме.

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей и пусть $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|(\mathcal{M}(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)^{-1}\|_\infty, \tag{2.1}$$

где используются обозначения

$$q^{(\varepsilon)} = (q_i^{(\varepsilon)}), \quad q_i^{(\varepsilon)} = R_i(Q) + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$D_{q^{(\varepsilon)}} = \operatorname{diag}\{q_1^{(\varepsilon)}, \dots, q_n^{(\varepsilon)}\}.$$

Доказательство. Напомним сперва, что поскольку A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, то мы имеем [14]

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1}. \tag{2.2}$$

Используя неравенство (2.2) и монотонность матрицы $\mathcal{M}(A)$, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы выводим

$$\begin{aligned}\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \||A^{-1}||Q|\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}|Q|\|_\infty = \max_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(A)^{-1}(|Q|e)\}_i \\ = \max_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(A)^{-1}q^{(0)}\}_i \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(A)^{-1}q^{(\varepsilon)}\}_i \\ = \max_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(A)^{-1}D_{q^{(\varepsilon)}}e\}_i = \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{\left[D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}\mathcal{M}(A)\right]^{-1}e\right\}_i \\ = \max_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A)^{-1}e\}_i = \|\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A)^{-1}\|_\infty. \qquad \square\end{aligned}$$

Для того, чтобы получить верхние оценки $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для матриц A определенных типов, мы будем применять лемму 2.1 к различным подклассам $\mathcal{K}$ класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, удовлетворяющим следующим условиям:

(i) если $A \in \mathcal{K}$, то $\mathcal{M}(A) \in \mathcal{K}$;

(ii) если $A \in \mathcal{K}$, то $DA \in \mathcal{K}$ для любой диагональной матрицы D того же порядка с положительными диагональными элементами.

Ясно, что весь класс невырожденных $\mathcal{H}$-матриц обладает указанными свойствами, так же как и его подклассы SDD, OB, S-SDD, некрасовских и других типов матриц. Лемма 2.1 позволяет свести задачу получения верхней оценки для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ к выводу верхней оценки для нормы $\|\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A)^{-1}\|_\infty$ обратной к матрице сравнения отмасштабированной матрицы $D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A$. Ключевым здесь является тот факт, что если $A \in \mathcal{K}$, а класс $\mathcal{K}$ обладает свойствами (i) и (ii), то $D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A \in \mathcal{K}$, а также и $\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A) \in \mathcal{K}$. Таким образом, если для любой матрицы $B \in \mathcal{K}$ имеется верхняя оценка нормы $\|B^{-1}\|_\infty$, то эту оценку можно применить к матрице $\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}}A)$ и тем самым получить искомую верхнюю оценку $\|A^{-1}Q\|_\infty$. Следует отметить, что полученная таким образом оценка зависит от параметра ε. Однако, если указанная зависимость от ε является непрерывной, то не зависящую от параметров оценку можно получить, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$.

В следующем параграфе мы воспользуемся изложенным подходом для того, чтобы установить верхние оценки для $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для SDD, S-SDD, OBS, OB и некрасовских матриц A.

§3. Приложения

3.1. SDD матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – SDD матрица и пусть $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. Мы применим теорему 1.1 к матрице $\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}} A)$, или, что то же самое, к матрице

$$B^{(\varepsilon)} = (b^{(\varepsilon)}_{ij}) = D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}} A, \tag{3.1}$$

поскольку оценка (1.2) для матрицы $B^{(\varepsilon)}$ и ее матрицы сравнения $\mathcal{M}(B^{(\varepsilon)})$ имеет одинаковый вид. Для этого заметим, что

$$|b^{(\varepsilon)}_{ii}| = [R_i(Q) + \varepsilon]^{-1}|a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

и

$$r_i(B^{(\varepsilon)}) = [R_i(Q) + \varepsilon]^{-1} r_i(A), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

Используя лемму 2.1, теорему 1.1 и соотношения (3.2)–(3.3), мы выводим:

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(B^{(\varepsilon)})\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|b^{(\varepsilon)}_{ii}| - r_i(B^{(\varepsilon)})} = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{R_i(Q) + \varepsilon}{|a_{ii}| - r_i(A)}.$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы получаем оценку теоремы 1.4.

3.2. S-SDD матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD матрицей, где S – некоторое непустое собственное подмножество множества индексов $\langle n\rangle$, и пусть $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. В рассматриваемом случае мы применим теорему 1.3 к матрице $\mathcal{M}(D^{-1}_{q^{(\varepsilon)}} A)$, или, что то же самое, к матрице (3.1). Используя лемму 2.1, оценку (1.7), соотношения (3.2) и равенства

$$r^V_i(B^{(\varepsilon)}) = [R_i(Q) + \varepsilon]^{-1} r^V_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.4}$$

где V – произвольное непустое подмножество множества $\langle n\rangle$, мы выводим нужную оценку следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(B^{(\varepsilon)})\|_\infty \\
&\leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\max\{|b^{(\varepsilon)}_{ii}| - r^S_i(B^{(\varepsilon)}) + r^S_j(B^{(\varepsilon)}),\ |b^{(\varepsilon)}_{jj}| - r^{\bar S}_j(B^{(\varepsilon)}) + r^{\bar S}_i(B^{(\varepsilon)})\}}{[|b^{(\varepsilon)}_{ii}| - r^S_i(B^{(\varepsilon)})]\,[|b^{(\varepsilon)}_{jj}| - r^{\bar S}_j(B^{(\varepsilon)})] - r^{\bar S}_i(B^{(\varepsilon)})\, r^S_j(B^{(\varepsilon)})} \\
&= \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \frac{\xi_{ij}(A, Q + \varepsilon I_n)}{[|a_{ii}| - r^S_i(A)]\,[|a_{jj}| - r^{\bar S}_j(A)] - r^{\bar S}_i(A)\, r^S_j(A)},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где, в соответствии с (1.12),

$$\xi_{ij}(A, Q+\varepsilon I_n) = \max\bigl\{[|a_{ii}| - r_i^S(A)][R_j(Q)+\varepsilon] + r_j^S(A)[R_i(Q)+\varepsilon],\\ [|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)][R_i(Q)+\varepsilon] + r_i^{\bar S}(A)[R_j(Q)+\varepsilon]\bigr\}.$$

Переходя в (3.5) к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы немедленно получаем оценку

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar S} \frac{\xi_{ij}(A,Q)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)},$$

в точности совпадающую с оценкой (1.11) теоремы 1.6, доказательство которой, представленное в работе [10], достаточно длинное.

3.3. OBS матрицы. В этом разделе мы выведем оценку нормы $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для так называемых OBS (Ostrowski–Brauer Sparse) матриц A, введенных в [4].

Определение 3.1 ([4]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется* OBS *матрицей, если она не содержит нулевых строк и удовлетворяет условию*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\, r_j(A) \quad \textit{для всех} \quad i \neq j \quad \textit{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0. \tag{3.6}$$

Заметим, что в определении 3.1 требование того, чтобы A не имела нулевых строк, равносильно тому условию, что все диагональные элементы A отличны от нуля.

Ясно, что класс OB (DSDD) матриц является подклассом класса OBS матриц, поскольку из (1.3) немедленно вытекает, что все диагональные элементы A отличны от нуля, так что A не имеет нулевых строк.

Как было установлено в работе [4], OBS матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, а для обратных к OBS матрицам справедлива следующая верхняя оценка.

Теорема 3.1 ([4]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, –* OBS *матрица. Тогда*

$$||A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ r_i(A)=0}} |a_{ii}|^{-1},\ \max_{i:\, r_i(A)\neq 0}\ \max_{\substack{j\neq i:\\ a_{ij}\neq 0}} \frac{|a_{jj}| + r_i(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\, r_j(A)} \right\}. \tag{3.7}$$

Поскольку класс OBS матриц является подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и замкнут относительно перехода к матрицам сравнения и левого усножения на невырожденные диагональные матрицы, то для вывода верхней оценки нормы $\|A^{-1}Q\|_\infty$ для OBS матрицы A, мы можем применить лемму 2.1 и соответствующую оценку теоремы 3.1. Ввиду соотношений (3.2) и (3.3), мы имеем

$$|b_{ii}^{(\varepsilon)}|^{-1} = \frac{R_i(Q)+\varepsilon}{|a_{ii}|} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{R_i(Q)}{|a_{ii}|}, \quad i = 1,\dots n, \tag{3.8}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{|b_{jj}^{(\varepsilon)}| + r_i(B^{(\varepsilon)})}{|b_{ii}^{(\varepsilon)}|\,|b_{jj}^{(\varepsilon)}| - r_i(B^{(\varepsilon)})\,r_j(B^{(\varepsilon)})} \\ &\qquad = \frac{|a_{jj}|[R_j(Q)+\varepsilon]^{-1} + r_i(A)[R_i(Q)+\varepsilon]^{-1}}{[|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)][R_i(Q)+\varepsilon]^{-1}[R_j(Q)+\varepsilon]^{-1}} \\ &= \frac{|a_{jj}|[R_i(Q)+\varepsilon] + r_i(A)[R_j(Q)+\varepsilon]}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{|a_{jj}|R_i(Q) + r_i(A)R_j(Q)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)}, \\ &\hspace{25em} i \neq j. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Применяя лемму 2.1, теорему 3.1 и соотношения (3.8) и (3.9), мы без труда получаем следующее обобщение теоремы 1.5 на случай OBS матриц

Теорема 3.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– OBS матрица и пусть* $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $m \geqslant 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &\|A^{-1}Q\|_\infty \\ &\leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ r_i(A)=0}} \frac{R_i(Q)}{|a_{ii}|},\ \max_{i:\, r_i(A)\neq 0}\ \max_{\substack{j\neq i:\\ a_{ij}\neq 0}} \frac{|a_{jj}|R_i(Q) + r_i(A)R_j(Q)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}| - r_i(A)\,r_j(A)} \right\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Как легко видеть, теорема 1.5 получается из теоремы 3.2, если игнорировать разреженность матрицы A.

3.4. Матрицы Некрасова. В этом разделе мы рассмотрим случай матриц Некрасова. Одно из возможных определений некрасовских матриц, удобное для наших целей, имеет следующий вид (см. [16, 3]).

Определение 3.2. *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *называется матрицей Некрасова, если матрица*

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U| \tag{3.11}$$

имеет строгое диагональное преобладание.

Здесь и далее через $A = D - L - U$ обозначается стандартное расщепление матрицы A на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную ($-L$) и строго верхнюю треугольную ($-U$) части.

Как известно, для обратных к матрицам Некрасова справедлива следующая верхняя оценка.

Теорема 3.3 ([3]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица Некрасова порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}, \tag{3.12}$$

где

$$z(A) = (z_i(A)) = |D|(|D| - |L|)^{-1}e, \tag{3.13}$$

$$h(A) = (h_i(A)) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e. \tag{3.14}$$

Используя подоход, изложенный в §2, мы установим следующее обобщение теоремы 3.3.

Теорема 3.4. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является матрицей Некрасова порядка $n \geqslant 2$ и пусть $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где $m \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i^{(Q)}(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}, \tag{3.15}$$

где вектор $z^{(Q)}(A) = (z_i^{(Q)}(A))$ определяется по формуле

$$z^{(Q)}(A) = (z_i^{(Q)}(A)) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|Q|e. \tag{3.16}$$

Доказательство. Поскольку класс матриц Некрасова является подклассом класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц [16], применима лемма 2.1, которая нам дает

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)^{-1}\|_\infty. \tag{3.17}$$

Теперь, поскольку подкласс некрасовских матриц, очевидно, замкнут относительно перехода к матрицам сравнения и левого умножения на невырожденные диагональные матрицы, матрица $\mathcal{M}(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)$ является матрицей Некрасова, и, применяя теорему 3.3 к $\mathcal{M}(D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1}A)$, мы получаем

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(B^{(\varepsilon)})}{|b_{ii}^{(\varepsilon)}| - h_i(B^{(\varepsilon)})}, \tag{3.18}$$

где, как и выше, мы используем обозначение

$$B^{(\varepsilon)} = (b_{ij}^{(\varepsilon)}) = D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1} A = D_{B^{(\varepsilon)}} - L_{B^{(\varepsilon)}} - U_{B^{(\varepsilon)}}.$$

Имеем

$$|b_{ii}^{(\varepsilon)}| = [R_i(Q) + \varepsilon]^{-1} |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} z(B^{(\varepsilon)}) &= |D_{B^{(\varepsilon)}}| \, [|D_{B^{(\varepsilon)}}| - |L_{B^{(\varepsilon)}}|] \, |^{-1} e = D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1} |D| [|D| - |L|]^{-1} D_{q^{(\varepsilon)}} e \\ &= D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1} |D| [|D| - |L|]^{-1} (|Q| + \varepsilon I_n) e \end{aligned} \tag{3.20}$$

и, ввиду (3.14),

$$\begin{aligned} h(B^{(\varepsilon)}) &= |D_{B^{(\varepsilon)}}| \, [|D_{B^{(\varepsilon)}}| - |L_{B^{(\varepsilon)}}|] \, |^{-1} |U_{B^{(\varepsilon)}}| e \\ &= D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1} |D| [|D| - |L|]^{-1} |U| e = D_{q^{(\varepsilon)}}^{-1} h(A). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Принимая во внимание неравенство (3.18) и соотношения (3.19)–(3.21), мы приходим к заключению, что при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|A^{-1} Q\|_\infty \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\{|D| [|D| - |L|]^{-1} (|Q| + \varepsilon I_n) e\}_i}{|a_{ii}| - h_i(A)},$$

и для завершения доказательства остается лишь перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. □

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
4. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые оценки обратных, зависящие от структуры разреженности матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 201–219
5. Л. Ю. Колотилина, *Об SDD_1 матрицах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 88–112.
6. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math., **11** (1963), 95–104.
7. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
8. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonal dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl., **169** (1992), 257–268.
9. V. R. Kostić, L. Cvetković, D. I. Cvetković, *Pseudospectra localization and their applications.* — Numer. Linear Algebra Appl., **23** (2016), 356–372.
10. Y. Li, Y. Wang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of GDSDD matrices.* — Mathematics **10** (2022), 186.

11. J. Liu, Y. Huang, F. Zhang, *The Schur complements of generalized doubly diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl., **378** (2004), 231–244.
12. J. Liu, J. Zhang, Y. Liu, *The Schur complements of strictly doubly diagonally dominant matrices and its application.* — Linear Algebra Appl., **437** (2012), 168–183.
13. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of* SDD *and* $\mathcal{S}-$SDD *matrices.* — J. Comput. Appl. Math., **206** (2007), 666–678.
14. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv., **10** (1937), 69–96.
15. S. Z. Pan, S. C. Chen, *An upper bound for* $\|A^{-1}\|_\infty$ *of strictly doubly diagonally dominant matrices [in Chinese].* — J. Fuzhou Univ. Nat. Sci. Ed., **36** (2008), 639–642.
16. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl., **2** (1969), 223–265.
17. C. Sang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of DSDD matrices.* — Bull.Iran. Math. Soc., **47** (2020), 1379–1398.
18. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl., **11** (1975), 3–5.
19. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.
20. X. R. Yong, *Two properties of diagonally dominant matrices.* — Numer. Linear Algebra **3** (1996), 173–177.

Kolotilina L. Yu. Upper bounds for $\|A^{-1}Q\|_\infty$.

The paper suggests a general approach to deriving upper bounds for $\|A^{-1}Q\|_\infty$ from those for $\|A^{-1}\|_\infty$ for matrices A belonging to different subclasses of the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices. The approach is applied to SDD, S-SDD, OBS, OB, and Nekrasov matrices.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 19 сентября 2022 г.