Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

Х. Д. Икрамов

ОБ ОДНОЙ НЕТРИВИАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ С ПСЕВДОУНИТАРНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЫ

1. В этой статье речь идет о приведении положительно определенных $n \times n$-матриц к диагональному виду посредством эрмитовых конгруэнций некоторого специального класса. Эрмитовыми конгруэнциями мы называем преобразования вида

$$A \to Q^* A Q, \tag{1}$$

где Q – невырожденная матрица. Есть и другое распространенное название этих преобразований: *-конгруэнции.

Пусть (p, q) – пара натуральных чисел, такая что $p+q = n$. Положим

$$I_{p,q} = I_p \oplus -I_q. \tag{2}$$

Матрица R, удовлетворяющая соотношению

$$R^* I_{p,q} R = I_{p,q},$$

называется псевдоунитарной. В пространстве $\mathbf{C}^n$ с метрикой, заданной матрицей (2), псевдоунитарные матрицы играют ту же роль, что и унитарные матрицы в стандартном унитарном пространстве. Для эрмитовых конгруэнций (1) матрицы Q выбираются в данной статье из классов псевдоунитарных матриц, отвечающих различным парам (p, q).

Классическая теорема о конгруэнциях утверждает возможность одновременного приведения к диагональному виду пары эрмитовых матриц, из которых хотя бы одна положительно (или отрицательно) определена. Из нее в [1] сделан следующий вывод.

Ключевые слова: псевдоунитарная матрица, псевдоунитарные собственные значения положительно определенной матрицы, разложение Холецкого.

Теорема 1. *Всякая эрмитова положительно определенная матрица A может быть приведена к диагональному виду посредством *-конгруэнции, выбранной в любом классе псевдоунитарных преобразований. Диагональные элементы полученной диагональной формы $D_{p,q}$ суть модули собственных значений матрицы $I_{p,q}A$.*

Эти диагональные элементы мы называем (p, q)-псевдоунитарными собственными значениями матрицы A, основываясь на таком обстоятельстве: всякая конгруэнция (1), осуществляемая псевдоунитарной матрицей Q, сопровождается преобразованием подобия матрицы $I_{p,q}A$, причем трансформирующей матрицей этого подобия является та же матрица Q. Таким образом, собственные значения матрицы $I_{p,q}A$, а также их модули могут рассматриваться как инварианты псевдоунитарных конгруэнций, производимых с матрицей A.

2. Пусть $d_1, \ldots, d_n$ – псевдоунитарные собственные значения положительно определенной матрицы A для выбранной пары (p, q). Введем коллективную характеристику этих значений

$$\sigma_{p,q} = \sum_{j=1}^{n} d_j^2.$$

Нетрудно показать (см. [1]), что для любой пары (p, q)

$$\sigma_{p,q} \leqslant \sigma \equiv \|A\|_F^2 = \|I_{p,q}A\|_F^2. \tag{3}$$

Заметим, что σ есть сумма квадратов обычных собственных значений матрицы A, так что в этом неравенстве сравниваются величины одинаковой природы.

Вообще говоря, величина $\sigma_{p,q}$ есть функция параметра p, и для различных p ее значения могут отличаться очень ощутимо (см., например, таблицу 2 в [1]). Однако там же, в [1], приведен противоположный пример. Пусть A – трехдиагональная теплицева матрица порядка 10 с числом a на главной диагонали и минус единицей на двух соседних диагоналях. При $a = 2$ получаем конечно-разностный аналог оператора двукратного дифференцирования. Собственные значения этой матрицы хорошо известны и положительны. Они приведены в таблице 1. Если $a > 2$, то весь спектр сдвигается вправо на $a - 2$ и остается положительным.

Таблица 1

0.081014052771005
0.317492934337638
0.690278532109430
1.169169973996227
1.715370323453429
2.284629676546570
2.830830026003773
3.309721467890570
3.682507065662362
3.918985947228995

Таблица 2

3.899267401168153
3.607080381291595
3.152525201810069
2.581028322467454
1.950128466810932
1.324189012786358
0.768391404619227
0.083121733012802
0.341374857294320
-1.707106781260904

Для определенности остановимся на значении $a = 2$, хотя обсуждаемая ситуация имеет место для всех $a \geqslant 2$. Очевидно, что

$$\sigma = \underbrace{4 + \cdots + 4}_{10} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{9} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{9} = 58.$$

При $p = 9$ матрица $I_{9,1}A$ приобретает (единственное) отрицательное собственное значение (см. таблицу 2; собственные значения в ней и следующей таблице 3 не упорядочены), а величину $\sigma_{9,1}$ можно считать равной 54 (вычисленное в Matlab'е значение отличается от 54 в трех младших разрядах представления двойной точности).

При $p = 8$ число отрицательных собственных значений матрицы $I_{8,2}A$ возрастает до двух. В большей или меньшей степени меняются и положительные собственные значения. Их можно видеть в таблице 3.

Таблица 3

-2.898966325967628
3.875381609404051
3.516761124699288
2.968053402509429
2.296723283951483
1.586018584205353
0.925738620720265
0.403042959854826
0.090434175108015
-0.763187434485075

Тем не менее величина $\sigma_{8,2}$ остается равной 54 с прежней погрешностью (три младших разряда представления двойной точности).

На каждом последующем шаге уменьшения параметра p ситуация повторяется: число отрицательных собственных значений матрицы $I_{p,q}A$ возрастает на единицу, положительная часть спектра, сокращаясь, каким-то образом меняется, но величина $\sigma_{p,q}$ по-прежнему равна 54. (Впрочем, для $p < 5$ динамику собственных значений и значение $\sigma_{p,q}$ проще объяснить свойством персимметрии матрицы A, т.е. симметрией ее элементов относительно антидиагонали $(n, 1), \ldots, (1, n)$.)

Чем же объяснить постоянство $\sigma_{p,q}$ как функции параметра p? Мы предложим свое объяснение в следующем разделе.

3. Пусть

$$A = R^\top R$$

– разложение Холецкого (Cholesky) матрицы A. Поскольку A – трехдиагональная матрица, ее верхнетреугольный множитель R имеет две ненулевых диагонали: главную и соседнюю с ней. Заменим все матрицы $I_{p,q}A = I_{p,q}R^\top R$ подобными им матрицами $S_{p,q} = RI_{p,q}R^\top$. Матрицы $S_{p,q}$ остаются трехдиагональными, но, в отличие от $I_{p,q}A$, они симметричны. Так как они вещественны, то

$$\sigma_{p,q} = \|S_{p,q}\|_F^2$$

(сравни с неравенством (3)).

Рассмотрим переход от матрицы $S_{10,0} = RR^\top$ к матрице $S_{9,1} = RI_{9,1}R^\top$. Эти матрицы различаются лишь элементами двух последних строк. Выразим ненулевые элементы этих строк через элементы $r_{8,9}, r_{9,9}, r_{9,10}$ и $r_{10,10}$ матрицы R. Для матрицы $RR^\top$ получаем:

$r_{9,10}r_{10,10}$ в позициях (10,9) и (9,10)

$r_{10,10}^2$ в позиции (10,10)

$r_{9,9}^2 + r_{9,10}^2$ в позиции (9,9)

$r_{8,9}r_{9,9}$ в позиции (9,8)

В тех же позициях матрицы $S_{9,1}$ стоят соответственно величины $-r_{9,10}r_{10,10}$, $-r_{10,10}^2$, $r_{9,9}^2 - r_{9,10}^2$ и $r_{8,9}r_{9,9}$.

Для нашей матрицы A значения элементов матрицы R, округленные до пяти разрядов после десятичной точки, таковы: $r_{8,9} =$ -0.94281, $r_{9,9} = 1.05409$, $r_{9,10} =$ -0.94868, $r_{10,10} = 1.04881$.

Различие величин σ и $\sigma_{9,1}$ объясняется тем, что в позиции (9,9) матрицы $RR^\top$ стоит число $r_{9,9}^2 + r_{9,10}^2 \approx 2.01389$, а в той же позиции матрицы $S_{9,1}$ находится число $r_{9,9}^2 - r_{9,10}^2 \approx 0.21111$. Разность квадратов этих чисел и дает известную нам разность $\sigma - \sigma_{9,1} = 58$ - $54 = 4$.

Проанализируем теперь переход от $S_{9,1}$ к $S_{8,2}$. Эти матрицы различаются уже в трех нижних строках. Будем игнорировать те позиции, где элементы обеих матриц отличаются только знаком. Тогда остаются только различия в диагональных позициях (8,8) и (9,9). В этих позициях в матрице $S_{9,1}$ стоят числа 2.01389 и 0.21111, а в матрице $S_{8,2}$ – числа 0.23611 и -2.01111 (мы приводим только первые пять разрядов после десятичной точки). С этой же точностью $2.01389^2 + 0.21111^2 = 0.23611^2 + 2.01111^2$ и, следовательно, $\sigma_{8,2} = \sigma_{9,1} = 54$.

Каждый последующий переход от текущего значения параметра p к значению, на единицу меньшему, анализируется таким же образом. Анализ показывает, что $\sigma_{p,q} = 54$ для всех $0 < p < 10$.

4. Пусть Q – положительно определенный квадратный корень из матрицы A:

$$A = Q^2, \qquad Q = Q^\top.$$

В анализе, проделанном в разделе 3, мы могли бы заменить матрицы $S_{p,q}$ матрицами $T_{p,q} = QI_{p,q}Q$, также симметричными. Можно проверить, что квадраты фробениусовых норм и этих матриц остаются равными 54 для всех $0 < p < 10$.

Список литературы

1. Kh. D. Ikramov, A. M. Nazari, *From symplectic eigenvalues of positive definite matrices to their pseudo-orthogonal eigenvalues.* — Comput. Math. Computer Model. Appl. **1**, No. 1 (2022), 17–20.

Ikramov Kh. D. On a nontrivial situation with pseudounitary eigenvalues of a positive definite matrix.

Let $I_{p,q} = I_p \oplus -I_q$. Pseudounitary eigenvalues of a positive definite matrix A are the moduli of the conventional eigenvalues of the matrix $I_{p,q}A$. They are invariants of pseudounitary *-congruences performed with A. For a fixed $n = p + q$, the sum of the squares $\sigma_{p,q}$ of these numbers is a function of the parameter p. In general, its values for different p can vary very significantly. However, if A is the tridiagonal Toeplitz matrix with the entry $a \geqslant 2$ on the main diagonal and the entry -1 on the two neighboring diagonals, then $\sigma_{p,q}$ has a constant value for all p. This nontrivial fact is explained in the paper.

Московский государственный
университет, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 25 апреля 2022 г.