Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

С. А. Жилина

О ДВАЖДЫ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ НУЛЯ В АЛГЕБРАХ КЭЛИ–ДИКСОНА

§1. Введение

Один из удобных методов визуализации бинарного алгебраического отношения R – построение соответствующего ему графа. Вершинам графа соответствуют элементы или их классы эквивалентности в рассматриваемой алгебраической структуре, причём ребро из x в y существует, если и только если xRy. Наиболее распространёнными графами отношений являются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля.

Изучение графов отношений – активно развивающаяся область современной математики. Среди направлений, для которых применение графов отношений оказывается особенно актуальным, стоит отметить задачу классификации отображений, сохраняющих отношения, см. [10], а также решение проблемы изоморфизма, заключающееся в изучении взаимосвязи между изоморфизмом алгебраических структур и изоморфизмом соответствующих им графов отношений, см. [11, 14].

Целью данной работы является исследование отношений коммутативности, ортогональности и составления пары делителей нуля, а также порождаемых ими графов для конкретного класса неассоциативных алгебр, а именно, алгебр Кэли–Диксона. Изучение алгебр Кэли–Диксона берёт своё начало в теории композиционных алгебр, то есть таких алгебр, на которых задана строго невырожденная квадратичная форма $n(\,\cdot\,)$, удовлетворяющая тождеству $n(ab) = n(a)n(b)$ для всех элементов алгебры.

В 1898 году Гурвиц показал, что единственные унитальные композиционные алгебры с делением над $\mathbb{R}$ – это вещественные числа $\mathbb{R}$, комплексные числа $\mathbb{C}$, кватернионы $\mathbb{H}$ и октонионы $\mathbb{O}$. Позднее

Ключевые слова: алгебры Кэли–Диксона, графы отношений, делители нуля, альтернативные элементы.

Работа поддержана стипендией Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" No. 21-8-3-8-1.

теорема Гурвица была обобщена Джекобсоном на случай произвольных унитальных композиционных алгебр над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Он доказал, что любая такая алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n$ размерности 2^n, где $0 \leqslant n \leqslant 3$, см. [13, стр. 61, теорема 1]. Этот результат был обобщён Жевлаковым, Слинько, Шестаковым и Ширшовым на случай поля $\mathbb{F}$ произвольной характеристики, см. [4, стр. 46, теорема 1].

В общем случае, алгебры Кэли–Диксона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, – это семейство 2^n-мерных алгебр $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, определяемых индуктивно: $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$, и на каждом шаге алгебра $\mathcal{A}_{n+1}$ получается из алгебры $\mathcal{A}_n$ с помощью процедуры удвоения Кэли–Диксона с некоторым параметром $\gamma_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Элементами $\mathcal{A}_{n+1}$ являются упорядоченные пары элементов из $\mathcal{A}_n$, то есть элементы вида $(a, b) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n$. При $n \geqslant 4$ алгебры $\mathcal{A}_n$ неальтернативны, а потому не являются композиционными. Как следствие, в них появляются делители нуля даже в том случае, когда норма на $\mathcal{A}_n$ анизотропна. Классификация этих делителей нуля и описание их аннуляторов оказываются довольно трудной задачей, за исключением, разве что, некоторых частных случаев.

В настоящее время большинство авторов ограничиваются изучением вещественных алгебр главной последовательности, которые мы обозначаем через $\mathcal{M}_n$. В них $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, а все параметры Кэли–Диксона равны -1. Наиболее успешные попытки по изучению делителей нуля в этих алгебрах были предприняты Морено [16–18] и Биссом, Даггером и Исаксеном [8,9]. В частности, в работах [8,9] были полностью описаны размерности аннуляторов элементов, а также классифицированы те делители нуля, аннуляторы которых имеют наибольшую возможную размерность. Затем Пикстон [20] получил аналогичный результат для размерностей альтернаторов элементов этих алгебр.

Отметим, что Морено был первым, кто начал изучать в вещественных алгебрах главной последовательности дважды альтернативные элементы, то есть такие элементы, обе компоненты которых альтернативны в предыдущей алгебре этой последовательности. Он установил ряд важных свойств дважды альтернативных делителей нуля, см. [16, стр. 25–27]. Одна из причин успешного изучения дважды альтернативных элементов состоит в том, что, как было показано в [17, стр. 15], композиционное тождество $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$, хотя и не выполняется во всей алгебре $\mathcal{M}_n$ при $n \geqslant 4$, продолжает выполняться в том случае, когда элементы $a, b \in \mathcal{M}_n$ альтернируют между собой.

Среди недавних работ о графах отношений алгебр Кэли–Диксона можно отметить [2, 3, 5], где были описаны графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона малых размерностей: контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов, контрседенионов и седенионов. В работах автора [22, 23] были изучены делители нуля вещественных алгебр Кэли–Диксона, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность, а также решена проблема изоморфизма для графов ортогональности вещественных алгебр Кэли–Диксона на парах базисных элементов.

В настоящей статье мы обобщаем результаты, полученные в работе [22] для вещественных алгебр Кэли–Диксона, на случай произвольных алгебр Кэли–Диксона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, а результаты, полученные в работах [8, 16, 22] для вещественных алгебр главной последовательности, – на случай произвольных алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой. В следствии 3.3 и лемме 5.6 мы исправляем неточности, допущенные в доказательствах леммы 4.6 и следствия 5.9 работы [22]. Мы также изучаем возможные размерности аннуляторов элементов в произвольных алгебрах Кэли–Диксона.

Работа построена следующим образом: В §2 мы вводим основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста. В частности, мы подробно описываем процедуру Кэли–Диксона в п. 2.2 и напоминаем некоторые свойства алгебр Кэли–Диксона в п. 2.3.

В §3 получено обобщение некоторых известных результатов о подалгебрах в вещественных алгебрах главной последовательности на случай произвольных алгебр Кэли–Диксона. А именно, в лемме 3.4, следствии 3.8 и теоремах 3.7 и 3.9 мы устанавливаем достаточное условие того, что два или три элемента порождают ассоциативную или альтернативную подалгебру, и приводим явную таблицу умножения элементов этой подалгебры. Основным методом доказательства этих утверждений является построение гомоморфизма из $\mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_3$ в рассматриваемую подалгебру.

В §4 мы рассматриваем пары таких делителей нуля в произвольных алгебрах Кэли–Диксона, компоненты которых имеют ненулевую норму и альтернируют между собой. В п. 4.1 показано, что такие элементы образуют шестиугольные структуры в графе делителей нуля. Ключевую роль при их изучении играет лемма 4.1, позволяющая построить по заданной паре делителей нуля новую пару делителей нуля. Основным результатом этого раздела является теорема 4.13. В п. 4.2

мы описываем свойства дважды альтернативных делителей нуля, у которых хотя бы одна из компонент имеет ненулевую норму. Лемма 4.19 и теорема 4.22 устанавливают явный вид их аннуляторов и ортогонализатора, а также соотношение между централизатором и ортогонализатором.

В §5 мы рассматриваем делители нуля в алгебрах Кэли–Диксона с анизотропной нормой. Леммы 5.1 и 5.6 обобщают результаты о свойствах делителей нуля в вещественных алгебрах главной последовательности из работы [16]. Следствие 5.4 показывает, что два нецентральных элемента алгебры Кэли–Диксона с анизотропной нормой C-эквивалентны, то есть имеют одинаковые централизаторы, если и только если их мнимые части пропорциональны. В теореме 5.11 мы доказываем, что в случае алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой ориентированные шестиугольники в графе делителей нуля из теоремы 4.13 могут быть продолжены до неориентированных двойных шестиугольников в графе ортогональности.

§6 посвящён изучению возможных размерностей аннуляторов элементов алгебр Кэли–Диксона. Примеры 6.3, 6.4 и 6.5 показывают, что в общем случае размерность аннулятора может быть чётной, но не кратной четырём, или даже нечётной. Однако, согласно теореме 6.11, в случае алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой размерность аннулятора всегда кратна четырём. Этот результат обобщает теорему 9.8 из работы [8] о размерностях аннуляторов элементов вещественных алгебр главной последовательности.

§2. Основные определения и обозначения

2.1. Алгебраические отношения и их графы. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$, возможно, некоммутативная или неассоциативная. Будем говорить, что элементы $a, b \in \mathcal{A}$ *антикоммутируют*, если $ab + ba = 0$, и элементы a, b *ортогональны*, если $ab = ba = 0$. Множество всех делителей нуля в $\mathcal{A}$ (левых, правых и двусторонних) мы будем обозначать через $Z(\mathcal{A})$, множество двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$ – через $Z_{LR}(\mathcal{A})$, а центр алгебры $\mathcal{A}$ – через $C_{\mathcal{A}}$.

Определение 2.1. Пусть a – произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$.

- *Централизатором* a называется $C_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\}$ – множество элементов $\mathcal{A}$, коммутирующих с a.

- *Антицентрализатором* a называется $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab + ba = 0\big\}$ – множество элементов $\mathcal{A}$, антикоммутирующих с a.
- *Ортогонализатором* a называется $O_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\big\}$ – множество элементов $\mathcal{A}$, ортогональных к a.
- *Левым аннулятором* a называется множество $l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ba = 0\big\}$.
- Аналогично *правым аннулятором* a называется $r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \big\{b \in \mathcal{A} \mid ab = 0\big\}$.

Ясно, что $C_{\mathcal{A}}(a)$, $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}}(a)$, $O_{\mathcal{A}}(a)$, $l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a)$ и $r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a)$ – линейные пространства над $\mathbb{F}$.

Определение 2.2. Элементы $a, b \in \mathcal{A}$ называются *C-эквивалентными*, если $C_{\mathcal{A}}(a) = C_{\mathcal{A}}(b)$, и *$O$-эквивалентными*, если $O_{\mathcal{A}}(a) = O_{\mathcal{A}}(b)$.

Обозначение 2.3. Для любого подмножества X линейного пространства W над $\mathbb{F}$ множество прямых, проходящих через элементы X, будем обозначать через

$$\mathbb{P}(X) = \{[x] = \mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}.$$

Введём теперь графы отношений, изучению которых посвящена данная работа.

Определение 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра. Определим следующие графы отношений алгебры $\mathcal{A}$:

- *Граф коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$: вершины – элементы $\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a + C_{\mathcal{A}}] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\}$, причём различные вершины $[a + C_{\mathcal{A}}]$ и $[b + C_{\mathcal{A}}]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba$.
- *Граф ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$: вершины – элементы $\mathbb{P}(Z_{LR}(\mathcal{A}))$, причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$.
- *Ориентированный граф делителей нуля* $\Gamma_Z(\mathcal{A})$: вершины – элементы $\mathbb{P}(Z(\mathcal{A}))$, причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены направленным ребром от $[a]$ к $[b]$, если и только если $ab = 0$.

Заметим, что рёбра графов $\Gamma_C(\mathcal{A})$, $\Gamma_O(\mathcal{A})$ и $\Gamma_Z(\mathcal{A})$ корректно определены. Говоря о вершинах этих графов, мы не будем проводить различия между ненулевым элементом a и проходящей через него прямой $[a] = \mathbb{F}a$. Мы также обозначаем $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_k) = \mathbb{F}a_1 + \dots + \mathbb{F}a_k$.

2.2. Построение алгебр Кэли–Диксона. Вспомогательные определения и основные свойства алгебр Кэли–Диксона могут быть найдены в работах [15, 21].

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ с инволюцией $a \mapsto \bar{a}$. Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ с помощью *процедуры Кэли–Диксона* с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \neq 0$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из $\mathcal{A}$ с операциями

$$\begin{aligned} \alpha(a,b) &= (\alpha a, \alpha b);\\ (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d);\\ (a,b)(c,d) &= (ac+\gamma\bar{d}b, da+b\bar{c}) \end{aligned}$$

и инволюцией

$$(\overline{a,b}) = (\bar{a}, -b), \qquad a,b,c,d \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

Если инволюция на $\mathcal{A}$ регулярна, то есть $a+\bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} = \bar{a}a \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ для любого $a \in \mathcal{A}$, то инволюция на $\mathcal{A}\{\gamma\}$ также регулярна, см. [21, стр. 435].

Предложение 2.6 ([15, стр. 161, упражнение 2.5.1])**.** *Пусть $\gamma' = \alpha^2\gamma$ для некоторого $\alpha \neq 0$. Тогда алгебры $\mathcal{A}\{\gamma\}$ и $\mathcal{A}\{\gamma'\}$ изоморфны.*

Далее будем считать, что $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, и дадим определение произвольной алгебры Кэли–Диксона, зависящее от набора её параметров.

Определение 2.7. Для каждого целого $n \geqslant 0$ и ненулевых чисел $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{F}$ алгебра Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ определяется по индукции:

1) $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$, $e_0^{(0)} = 1$ – её базисный элемент.
2) Если построена $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$, то

$$\mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\},$$

причём $e_0^{(n+1)}, \ldots, e_{2^{n+1}-1}^{(n+1)}$ – её базисные элементы, где

$$e_m^{(n+1)} = \begin{cases} (e_m^{(n)}, 0), & 0 \leqslant m \leqslant 2^n - 1,\\ (0, e_{m-2^n}^{(n)}), & 2^n \leqslant m \leqslant 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Для каждого целого $n \geqslant 0$ структура $\mathcal{A}_n$ из определения 2.7 – это 2^n-мерная алгебра над $\mathbb{F}$ с единицей $e_0^{(n)}$ и регулярной инволюцией. Мы будем использовать обозначения $1 = e_0 = e_0^{(n)}$ и $k = ke_0^{(n)}$ при $k \in \mathbb{F}$.

Определение 2.8.

- Пусть $a \in \mathcal{A}_n$. *Следом* $a \in \mathcal{A}_n$ называется $t(a) = a + \bar{a}$, *мнимой частью* – $\mathfrak{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$, *нормой* – $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$. Поскольку инволюция на $\mathcal{A}_n$ регулярна, то $t(a), n(a) \in \mathbb{F}$.
- Элемент $a \in \mathcal{A}_n$ называется *чисто мнимым*, если $t(a) = 0$.
- Элемент $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ называется *дважды чисто мнимым*, если $t(a) = t(b) = 0$.

Предложение 2.9 ([21, стр. 435]). *След и норма элемента* $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ *могут быть вычислены индуктивно с использованием следующих соотношений:*

$$t((a, b)) = t(a),$$
$$n((a, b)) = n(a) - \gamma_n n(b).$$

Из предложения 2.9 следует, что норма $n(\cdot)$ является невырожденной квадратичной формой на $\mathcal{A}_n$.

2.3. Свойства алгебр Кэли–Диксона. Далее подразумеваем, что $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра над полем $\mathbb{F}$, а $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ – произвольная алгебра Кэли–Диксона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$.

Предложение 2.10 ([21, стр. 440]). *Пусть* $\langle a, b\rangle$ *–* $\mathbb{F}$*-значная симметрическая билинейная форма, соответствующая квадратичной форме* $n(a)$. *Тогда* $\langle a, a\rangle = n(a)$ *и* $2\langle a, b\rangle = a\bar{b} + b\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}a = t(a\bar{b})$ *для любых* $a, b \in \mathcal{A}_n$. *Кроме того, для всех* $a, b \in \mathcal{A}_n$ *выполнены равенства* $\langle a, b\rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ *и* $t(a) = 2\langle a, e_0\rangle$.

Обозначение 2.11. Мы будем писать $a \perp b$, если a и b ортогональны относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то есть $\langle a, b\rangle = 0$.

Лемма 2.12 ([21, леммы 2 и 6]). *Для любых* $x, y, z \in \mathcal{A}_n$ *выполнено*

(1) $t([x, y, z]) = 0$;
(2) $\langle x, yz\rangle = \langle x\bar{z}, y\rangle = \langle \bar{y}x, z\rangle$.

Определение 2.13. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

- Говорят, что алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ является *вещественной алгеброй главной последовательности Кэли–Диксона*, если $\gamma_k = -1$ для любого $k = 0, \ldots, n-1$. Мы будем обозначать такую алгебру символом $\mathcal{M}_n$, от слова “main”.

- Алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ называется *вещественной контр-алгеброй*, если $\gamma_k = -1$ для любого $k = 0, \ldots, n-2$ и $\gamma_{n-1} = 1$. Мы будем обозначать её $\mathcal{H}_n$, от слова "hyperbolic", поскольку $\mathcal{H}_n$ обладает гиперболической нормой.

Предложение 2.14 ([3, предложение 3.31]).

- *Пусть* $a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}, b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{M}_n$. *Тогда* $\langle a, b\rangle = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m b_m$ *– стандартное евклидово скалярное произведение. В частности,* $n(a) = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m^2$, *поэтому* $n(a) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a = 0$.
- *Пусть* $a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}, b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{H}_n$. *Тогда* $\langle a, b\rangle = \sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} a_m b_m - \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} a_m b_m$.

Замечание 2.15. В случае вещественных алгебр главной последовательности, норма a часто определяется как $\sqrt{a\bar{a}}$, в отличие от определения $n(a) = a\bar{a}$, используемого в данной работе. Однако большая часть результатов может быть легко перенесена на случай изменённой таким образом нормы.

Пример 2.16.

- Алгебры комплексных чисел ($\mathbb{C}$), кватернионов ($\mathbb{H}$), октонионов ($\mathbb{O}$) и седенионов ($\mathbb{S}$) являются вещественными алгебрами главной последовательности при $n = 1$, 2, 3 и 4 соответственно, см. [6].
- Алгебры контркомплексных чисел (the split-complex-numbers; $\hat{\mathbb{C}}$), контркватернионов (the split-quaternions; $\hat{\mathbb{H}}$), контроктонионов (the split-octonions; $\hat{\mathbb{O}}$) и контрседенионов (the split-sedenions; $\hat{\mathbb{S}}$) являются вещественными контр-алгебрами при $n = 1$, 2, 3 и 4 соответственно, см. [5, 7].

Перейдём к некоторым понятиям, связанным с ассоциативностью. Ассоциатором элементов $a, b, c \in \mathcal{A}$ называется $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$, а их антиассоциатором – $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc)$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *эластичной*, если для всех $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $[a, b, a] = 0$. Ясно, что в эластичной алгебре $\mathcal{A}$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $[a, b, c] = -[c, b, a]$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *альтернативной*, если для всех $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $[a, a, b] = [b, a, a] = 0$.

Хорошо известно, что алгебра $\mathcal{A}_n$ альтернативна, если и только если $n \leqslant 3$, однако все алгебры Кэли–Диксона являются эластичными, см. [21, стр. 436, теорема 1].

Определение 2.17 ([17, стр. 12, 15])**.** Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$.

- Элемент a *альтернирует* с элементом b, если $[a, a, b] = 0$.
- Если a альтернирует со всеми $b \in \mathcal{A}_n$, то a называется *альтернативным*.
- Элемент a *строго альтернирует* с элементом b, если $[a, a, b] = 0$ и $[b, b, a] = 0$.
- Если a строго альтернирует со всеми $b \in \mathcal{A}_n$, то a называется *строго альтернативным*.

Следующие три леммы описывают антицентрализатор произвольного ненулевого элемента $\mathcal{A}_n$ и соотношение между централизатором и ортогонализатором произвольного чисто мнимого элемента. В работе [1] они сформулированы только для вещественных алгебр Кэли–Диксона, однако их доказательства дословно переносятся на случай произвольного поля. Тем не менее, мы приводим доказательства лемм 2.19 и 2.20 для полноты изложения. В формулировках этих лемм прямая сумма дополнительно подразумевает, что прямые слагаемые ортогональны друг другу относительно симметрической билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Предложение 8.19 работы [1] доказывает существенность дополнительного условия $n \leqslant 3$ в пункте (1) леммы 2.20.

Лемма 2.18 ([1, лемма 5.8])**.** *Пусть* $a \in \mathcal{A}_n$, $a \neq 0$.

(1) *Если* $t(a) \neq 0$, $n(a) \neq 0$, *то* $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{0\}$.
(2) *Если* $t(a) \neq 0$, $n(a) = 0$, *то* $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{F}\bar{a}$.
(3) *Если* $t(a) = 0$, *то*

$$\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{b \in \mathcal{A}_n \mid t(b) = \langle a, b \rangle = 0\} = \mathrm{span}(e_0, a)^{\perp}.$$

Лемма 2.19 ([1, лемма 8.10])**.** *Пусть* $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $t(x) = 0$. *Тогда* $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{F} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x) \oplus V$, *где* $\dim(V) \leqslant 1$.

Доказательство. Ясно, что $\mathbb{F} \subseteq C_{\mathcal{A}_n}(x)$, поэтому требуется показать, что $\mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(x)) = O_{\mathcal{A}_n}(x) \oplus V$, где $\dim(V) \leqslant 1$. Согласно лемме 2.18,

$\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x) \subset \mathfrak{Im}(\mathcal{A}_n)$, поэтому имеет место равенство

$$O_{\mathcal{A}_n}(x) = C_{\mathcal{A}_n}(x) \cap \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(x)) \cap \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x).$$

Так как при $y \in \mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(x))$ (а значит, $t(y) = 0$) условие $y \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(x)$ задаётся одним линейным уравнением, то

$$\dim(\mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(x))) - \dim(O_{\mathcal{A}_n}(x)) \leqslant 1. \qquad \square$$

Лемма 2.20 ([1, лемма 8.11])**.** *Пусть $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $t(x) = 0$. Тогда*

(1) *если $n(x) = 0$ и $n \leqslant 3$, то $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{F} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$;*
(2) *если $n(x) \neq 0$, то $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$.*

Доказательство. Ясно, что выполнено включение $C_{\mathcal{A}_n}(x) \supseteq \mathbb{F} + \mathbb{F}x + O_{\mathcal{A}_n}(x)$. Отметим, что если $y \in O_{\mathcal{A}_n}(x)$, то $t(y) = 0$, поэтому, по предложению 2.10, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}t(x\bar{y}) = -\frac{1}{2}t(xy) = 0$. Так как $n(x) = x\bar{x} = -x^2$, то условия $n(x) = 0$ и $x \in O_{\mathcal{A}_n}(x)$ равносильны. Рассмотрим два случая.

(1) Если $n(x) = 0$, то это включение принимает вид $C_{\mathcal{A}_n}(x) \supseteq \mathbb{F} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$. Покажем, что при $n \leqslant 3$ имеет место также и обратное включение. Пусть $y \in C_{\mathcal{A}_n}(x)$ и $t(y) = 0$. Так как $n \leqslant 3$, то можно воспользоваться альтернативностью $\mathcal{A}_n$. Заметим, что $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} = yx = xy$, то есть $xy = k \in \mathbb{F}$. Тогда $0 = x^2y = x(xy) = kx$, поэтому $k = 0$, то есть $y \in O_{\mathcal{A}_n}(x)$.
(2) Если $n(x) \neq 0$, то это включение имеет вид $C_{\mathcal{A}_n}(x) \supseteq \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$. Обратное включение следует из леммы 2.19 и соображений размерности. $\square$

Пример 2.21. Если $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n$ – вещественная алгебра главной последовательности, то любой элемент $x \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}$, $t(x) = 0$, удовлетворяет условию леммы 2.20(2).

§3. Альтернативные подалгебры

В этом разделе мы устанавливаем достаточное условие для того, чтобы два или три элемента порождали ассоциативную или альтернативную подалгебру в произвольной алгебре Кэли–Диксона, а также приводим явную таблицу умножения элементов такой подалгебры. Отметим, что утверждения 3.2, 3.4–3.7 и 3.9 уже были частично доказаны в работе автора [22] для вещественных алгебр Кэли–Диксона. Следствие 3.3 также было сформулировано в этой работе (см. [22, следствие 5.9]), но его условие предполагало, что элементы x и y строго альтернируют, а доказательство содержало неточность: рассматривались ортогональные проекции относительно подпространств, норма на которых может оказаться вырожденной.

При $n \geqslant 4$ алгебра $\mathcal{A}_n$ неальтернативна, а потому не является композиционной. Однако, как показывает следующая лемма, композиционное тождество всё ещё выполняется для альтернирующих между собой элементов. В работах [3, 17] она сформулирована только для вещественных алгебр Кэли–Диксона, но её доказательство остаётся верным и для произвольного поля $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$.

Лемма 3.1 ([17, стр. 15], [3, лемма 4.8])**.** *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$, $[a, a, b] = 0$. Тогда $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$.*

Аналогично работам [16–18], мы будем обозначать $\widetilde{e}_0 = (0, e_0) \in \mathcal{A}_n$ и $\widetilde{a} = a\widetilde{e}_0$ для всех $a \in \mathcal{A}_n$.

Лемма 3.2. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$ и пусть b – дважды чисто мнимый элемент. Тогда*

(1) $\widetilde{\widetilde{a}} = \gamma_{n-1}a$;

(2) $\widetilde{a}b = -\widetilde{ab}$;

(3) $\widetilde{a} \perp a$.

Если a – также дважды чисто мнимый элемент, то

(4) $\widetilde{a}b + \widetilde{b}a = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a \perp b$;

(5) $\gamma_{n-1}ab + \widetilde{b}\widetilde{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\widetilde{a} \perp b$.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. По определению, $\widetilde{a} = (a_1, a_2)(0, e_0) = (\gamma_{n-1}a_2, a_1)$.

(1) Имеет место равенство $\widetilde{\widetilde{a}} = \widetilde{(\gamma_{n-1}a_2, a_1)} = (\gamma_{n-1}a_1, \gamma_{n-1}a_2) = \gamma_{n-1}a$.

(2) Так как b – дважды чисто мнимый элемент, имеем:

$$\begin{aligned}\widetilde{a}b &= (\gamma_{n-1}a_2, a_1)(b_1, b_2) = (\gamma_{n-1}a_2b_1 + \gamma_{n-1}\bar{b}_2a_1, \gamma_{n-1}b_2a_2 + a_1\bar{b}_1)\\ &= -(\gamma_{n-1}(b_2a_1 + a_2\bar{b}_1), a_1b_1 + \gamma_{n-1}\bar{b}_2a_2) = -\widetilde{ab}.\end{aligned}$$

(3) По лемме 2.12(2), $\langle a, \widetilde{a}\rangle = \langle a, a\widetilde{e}_0\rangle = \langle \bar{a}a, \widetilde{e}_0\rangle = \langle n(a)e_0, \widetilde{e}_0\rangle = 0$.

(4) По лемме 2.18, $a \perp b$ тогда и только тогда, когда $ab = -ba$, что равносильно условию $-\widetilde{a}b = \widetilde{ab} = -\widetilde{ba} = \widetilde{b}a$.

(5) По лемме 2.18, $\widetilde{a} \perp b$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{a}b = -b\widetilde{a}$ или, что равносильно, $-\gamma_{n-1}ab = -\widetilde{\widetilde{ab}} = \widetilde{\widetilde{a}b} = -\widetilde{b\widetilde{a}} = \widetilde{b}\widetilde{a}$. □

Следствие 3.3. *Пусть $x, y \in \mathcal{A}_{n-1}$. Тогда в $\mathcal{A}_n$ выполнены соотношения*

$$x\widetilde{y} = \widetilde{yx}, \quad \widetilde{x}y = \widetilde{x\overline{y}}, \quad \widetilde{x}\widetilde{y} = \gamma_{n-1}\overline{y}x.$$

Доказательство. Для любого $z \in \mathcal{A}_{n-1}$ имеем $z = (z, 0)$ в $\mathcal{A}_n$, поэтому, по лемме 3.2, выполнено $\widetilde{z} = (0, z)$. Тогда

$$x\widetilde{y} = (x, 0)(0, y) = (0, yx) = \widetilde{yx},$$
$$\widetilde{x}y = (0, x)(y, 0) = (0, x\overline{y}) = \widetilde{x\overline{y}},$$
$$\widetilde{x}\widetilde{y} = (0, x)(0, y) = (\gamma_{n-1}\overline{y}x, 0) = \gamma_{n-1}\overline{y}x. \qquad \square$$

Отметим, что в лемме 3.4 и теоремах 3.7 и 3.9 мы допускаем равенство $n(a)$ и $n(b)$ нулю, в отличие от стандартного определения алгебр Кэли–Диксона.

Лемма 3.4. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$ – дважды чисто мнимый элемент. Рассмотрим $\mathbb{H}_a = \operatorname{span}(e_0, a, \widetilde{e}_0, \widetilde{a})$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм $\varphi_a : \mathcal{A}_2\{-n(a), \gamma_{n-1}\} \to \mathbb{H}_a$, поэтому $\mathbb{H}_a$ – ассоциативная подалгебра $\mathcal{A}_n$. Если, кроме того, $n(a) \neq 0$, то φ_a – изоморфизм.*

Доказательство. Обозначим $\mu_1 = n(a)$, $\mu_2 = n(\widetilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$. Поскольку a и $\widetilde{e}_0$ – чисто мнимые элементы, имеем $a^2 = -n(a) = -\mu_1$ и $(\widetilde{e}_0)^2 = -n(\widetilde{e}_0) = -\mu_2$. Из условия $a \in \operatorname{span}(e_0, \widetilde{e}_0)^\perp$ следует, что $\widetilde{a} \in \operatorname{span}(e_0, \widetilde{e}_0)^\perp$. По лемме 3.2(3), $\widetilde{a} \perp a$, поэтому $a, \widetilde{e}_0, \widetilde{a}$ попарно антикоммутируют. Остаётся заметить, что $\widetilde{a}a = -a\widetilde{a} = \widetilde{\mu_1 e_0} = \mu_1\widetilde{e}_0$ по лемме 3.2(2), $\widetilde{a}\widetilde{e}_0 = \widetilde{\widetilde{a}} = \gamma_{n-1}a = -\mu_2 a$ по лемме 3.2(1) и $(\widetilde{a})^2 = -n(\widetilde{a}) = -n(a\widetilde{e}_0) = -n(a)n(\widetilde{e}_0) = -\mu_1\mu_2$ по лемме 3.1. Таким образом, умножение в $\mathbb{H}_a$ описывается следующей таблицей.

Таблица 1. Таблица умножения в $\mathbb{H}_a$.

$\times$	e_0	a	$\widetilde{e}_0$	$\widetilde{a}$
e_0	e_0	a	$\widetilde{e}_0$	$\widetilde{a}$
a	a	$-\mu_1$	$\widetilde{a}$	$-\mu_1\widetilde{e}_0$
$\widetilde{e}_0$	$\widetilde{e}_0$	$-\widetilde{a}$	$-\mu_2$	$\mu_2 a$
$\widetilde{a}$	$\widetilde{a}$	$\mu_1\widetilde{e}_0$	$-\mu_2 a$	$-\mu_1\mu_2$

Теперь мы можем задать $\varphi_a : \mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\} \to \mathbb{H}_a$ равенствами $\varphi_a(e_0) = e_0$, $\varphi_a(e_1) = a$, $\varphi_a(e_2) = \widetilde{e}_0$, $\varphi_a(e_3) = \widetilde{a}$. Таблица умножения 1 совпадает с таблицей умножения $\mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\}$, и элементы e_0, e_1, e_2, e_3 образуют базис $\mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\}$. Таким образом, любое нетривиальное равенство в $\mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\}$ сохраняется под действием φ_a, поэтому φ_a – это действительно гомоморфизм. Ясно, что отображение φ_a сюръективно, так как $\mathbb{H}_a = \mathrm{span}(e_0, a, \widetilde{e}_0, \widetilde{a})$.

Чтобы доказать последнее утверждение леммы, мы используем тот факт, что $e_0, a, \widetilde{e}_0, \widetilde{a}$ образуют ортогональную систему относительно симметрической билинейной формы $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Если $n(a) \neq 0$, то $n(\widetilde{a}) = n(a)n(\widetilde{e}_0) \neq 0$, поэтому $e_0, a, \widetilde{e}_0, \widetilde{a}$ линейно независимы, а значит, φ_a – изоморфизм. □

Замечание 3.5. В том случае, когда $n(a) = 0$, отображение φ_a в лемме 3.4 может иметь нетривиальное ядро даже при $a \neq 0$, так как возможно равенство $a = \widetilde{a}$.

Из леммы 3.4 сразу следует известное утверждение о строгой альтернативности элемента $\widetilde{e}_0$, см. [12, лемма 1.2].

Следствие 3.6. *Элемент $\widetilde{e}_0$ строго альтернативен в $\mathcal{A}_n$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, a' – ортогональная проекция a на $\mathrm{span}(e_0, \widetilde{e}_0)^{\perp}$. По лемме 3.4, a' и $\widetilde{e}_0$ порождают ассоциативную подалгебру $\mathbb{H}_{a'} \subset \mathcal{A}_n$. Ясно, что $a \in \mathbb{H}_{a'}$, поэтому $[a, a, \widetilde{e}_0] = [\widetilde{e}_0, \widetilde{e}_0, a] = 0$. □

Теорема 3.7. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют, $t(a) = t(b) = 0$. Тогда $\mathbb{H}_{a,b} = \mathrm{span}(e_0, a, b, ab)$ – ассоциативная подалгебра в $\mathcal{A}_n$, замкнутая относительно инволюции и удовлетворяющая таблице умножения 2, где $\mu_1 = n(a)$, $\mu_2 = n(b)$ и $k = -2\langle a, b\rangle$. В случае, когда $k = 0$, существует сюръективный гомоморфизм*

$$\psi_{a,b} : \mathcal{A}_2\{-n(a), -n(b)\} \to \mathbb{H}_{a,b}.$$

Если, кроме того, $n(a) \neq 0$ и $n(b) \neq 0$, то $\psi_{a,b}$ – изоморфизм.

Доказательство. Поскольку a и b – чисто мнимые элементы, имеем $a^2 = -n(a) = -\mu_1$ и $b^2 = -n(b) = -\mu_2$. Из равенств $k = -2\langle a, b\rangle = -t(a\bar{b}) = t(ab)$ следует, что $ba = \bar{b}\bar{a} = \overline{ab} = k - ab$.

Элементы a и b строго альтернируют, поэтому $a(ab) = a^2 b = -\mu_1 b$, $b(ab) = b(k - ba) = kb - b^2 a = kb + \mu_2 a$, $(ab)a = (k - ba)a = ka - ba^2 = ka + \mu_1 b$, $(ab)b = ab^2 = -\mu_2 a$. Наконец, из леммы 3.1 следует, что $n(ab) = n(a)n(b) = \mu_1\mu_2$, поэтому $(ab)^2 = (ab)(k - \overline{ab}) = kab - n(ab) = kab - \mu_1\mu_2$. Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения в $\mathbb{H}_{a,b}$.

Таблица 2. Таблица умножения в $\mathbb{H}_{a,b}$.

$\times$	e_0	a	b	ab
e_0	e_0	a	b	ab
a	a	$-\mu_1$	ab	$-\mu_1 b$
b	b	$k-ab$	$-\mu_2$	$kb+\mu_2 a$
ab	ab	$ka+\mu_1 b$	$-\mu_2 a$	$kab-\mu_1\mu_2$

Если $k=0$, т.е. $a \perp b$, то можно задать $\psi_{a,b} : \mathcal{A}_2\{-\mu_1,-\mu_2\} \to \mathbb{H}_{a,b}$ равенствами $\psi_{a,b}(e_0)=e_0$, $\psi_{a,b}(e_1)=a$, $\psi_{a,b}(e_2)=b$, $\psi_{a,b}(e_3)=ab$. Тогда ассоциативность $\mathbb{H}_{a,b}$ следует из ассоциативности $\mathcal{A}_2\{-\mu_1,-\mu_2\}$, и оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 3.4.

Теперь предположим, что $k \neq 0$. Сперва рассмотрим случай, когда $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $n(a) \neq 0$. Обозначим $b' = b - qa$, где $q = \frac{\langle a,b\rangle}{n(a)}$. Тогда $a \perp b'$ и $\mathbb{H}_{a,b} = \operatorname{span}(e_0,a,b,ab) = \operatorname{span}(e_0,a,b',ab') = \mathbb{H}_{a,b'}$. Кроме того, $[a,a,b'] = [a,a,b]-q[a,a,a] = 0$ и $[b',b',a] = [b,b,a]-q[a,b,a]-q[b,a,a]+q^2[a,a,a]=0$, то есть a и b' строго альтернируют. Следовательно, $\mathbb{H}_{a,b'}$ – ассоциативная подалгебра в $\mathcal{A}_n$, замкнутая относительно инволюции, что и доказывает требуемое утверждение.

Пусть теперь $n(a)=n(b)=0$. Рассмотрим элементы $x = e_1+e_2$, $y = -\frac{k}{2}(e_1+e_3)$, $xy = \frac{k}{2}(e_0+e_1+e_2+e_3)$ в $\mathcal{A}_2\{-1,1\}$. Тогда e_0,x,y,xy линейно независимы в $\mathcal{A}_2\{-1,1\}$, а их произведения удовлетворяют тем же соотношениям, что и произведения e_0,a,b,ab, так как $\mathcal{A}_2\{-1,1\}$ ассоциативна, $n(x)=n(y)=0$ и $t(xy)=k$. Значит, мы можем задать гомоморфизм $\theta_{a,b} : \mathcal{A}_2\{-1,1\} \to \mathbb{H}_{a,b}$ равенствами $\theta_{a,b}(e_0)=e_0$, $\theta_{a,b}(x)=a$, $\theta_{a,b}(y)=b$, $\theta_{a,b}(xy)=ab$, и ассоциативность $\mathbb{H}_{a,b}$ следует из ассоциативности $\mathcal{A}_2\{-1,1\}$. $\square$

Следствие 3.8. *Пусть $a,b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют. Тогда множество $\operatorname{span}(e_0,a,b,ab)$ – ассоциативная подалгебра в $\mathcal{A}_n$, замкнутая относительно инволюции.*

Доказательство. Пусть $a' = \mathfrak{Im}(a)$, $b' = \mathfrak{Im}(b)$. Ясно, что a' и b' строго альтернируют и $\operatorname{span}(e_0,a,b,ab) = \operatorname{span}(e_0,a',b',a'b')$. Тогда требуемое утверждение непосредственно следует из теоремы 3.7, применённой к элементам a' и b'. $\square$

Следующая теорема является обобщением [17, теорема 5.1].

Теорема 3.9. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$ – дважды чисто мнимые элементы, $b \perp \operatorname{span}(a, \widetilde{a})$. Пусть также a строго альтернирует с b. Обозначим $\mathbb{O}_{a,b} = \operatorname{span}(e_0, a, b, ab, \widetilde{e}_0, \widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{ab})$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм $\varphi_{a,b} : \mathcal{A}_3\{-n(a), -n(b), \gamma_{n-1}\} \to \mathbb{O}_{a,b}$, поэтому $\mathbb{O}_{a,b}$ – альтернативная подалгебра $\mathcal{A}_n$. Если, кроме того, $n(a) \neq 0$ и $n(b) \neq 0$, то $\varphi_{a,b}$ – изоморфизм.*

Доказательство. Обозначим $\mu_1 = n(a)$, $\mu_2 = n(b)$, $\mu_3 = n(\widetilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$. Поскольку a, b и $\widetilde{e}_0$ – чисто мнимые элементы, имеем $a^2 = -n(a) = -\mu_1$, $b^2 = -n(b) = -\mu_2$ и $(\widetilde{e}_0)^2 = -n(\widetilde{e}_0) = -\mu_3$. С помощью леммы 2.12(2) нетрудно показать, что из $a \perp \operatorname{span}(e_0, \widetilde{e}_0)$ и $b \perp \operatorname{span}(e_0, a, \widetilde{e}_0, \widetilde{a})$ следует, что система $\{e_0, a, b, ab, \widetilde{e}_0, \widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{ab}\}$ ортогональна относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда, по лемме 2.18, элементы $a, b, ab, \widetilde{e}_0$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}, \widetilde{ab}$ попарно антикоммутируют. Отметим, что ab – также дважды чисто мнимый элемент.

По теореме 3.7, существует сюръективный гомоморфизм

$$\psi_{a,b} : \mathcal{A}_2\{-\mu_1, -\mu_2\} \to \mathbb{H}_{a,b}.$$

Мы продолжим его до $\varphi_{a,b} : \mathcal{A}_3\{-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3\} \to \mathbb{O}_{a,b}$. Применим лемму 3.4 к элементам a, b и ab по отдельности. Затем используем лемму 3.2(2), чтобы показать, что $\widetilde{a}b = -\widetilde{ab}$, $\widetilde{a}(ab) = -\widetilde{a(ab)} = \mu_1\widetilde{b}$, $\widetilde{b}a = -\widetilde{ba} = \widetilde{ab}$, $\widetilde{b}(ab) = -\widetilde{b(ab)} = -\mu_2\widetilde{a}$, $\widetilde{ab} \cdot a = -\widetilde{(ab)a} = -\mu_1\widetilde{b}$, $\widetilde{ab} \cdot b = -\widetilde{(ab)b} = \mu_2\widetilde{a}$. Из леммы 3.2(5) получаем $\widetilde{b}\widetilde{a} = -\gamma_{n-1}ab = \mu_3 ab$, $\widetilde{ab} \cdot \widetilde{a} = -\gamma_{n-1}a(ab) = -\mu_1\mu_3 b$ и $\widetilde{ab} \cdot \widetilde{b} = -\gamma_{n-1}b(ab) = \mu_2\mu_3 a$. Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения в $\mathbb{O}_{a,b}$.

Таблица 3. Таблица умножения в $\mathbb{O}_{a,b}$.

$\times$	e_0	a	b	ab	$\widetilde{e}_0$	$\widetilde{a}$	$\widetilde{b}$	$\widetilde{ab}$
e_0	e_0	a	b	ab	$\widetilde{e}_0$	$\widetilde{a}$	$\widetilde{b}$	$\widetilde{ab}$
a	a	$-\mu_1$	ab	$-\mu_1 b$	$\widetilde{a}$	$-\mu_1\widetilde{e}_0$	$-\widetilde{ab}$	$\mu_1\widetilde{b}$
b	b	$-ab$	$-\mu_2$	$\mu_2 a$	$\widetilde{b}$	$\widetilde{ab}$	$-\mu_2\widetilde{e}_0$	$-\mu_2\widetilde{a}$
ab	ab	$\mu_1 b$	$-\mu_2 a$	$-\mu_1\mu_2$	$\widetilde{ab}$	$-\mu_1\widetilde{b}$	$\mu_2\widetilde{a}$	$-\mu_1\mu_2\widetilde{e}_0$
$\widetilde{e}_0$	$\widetilde{e}_0$	$-\widetilde{a}$	$-\widetilde{b}$	$-\widetilde{ab}$	$-\mu_3$	$\mu_3 a$	$\mu_3 b$	$\mu_3 ab$
$\widetilde{a}$	$\widetilde{a}$	$\mu_1\widetilde{e}_0$	$-\widetilde{ab}$	$\mu_1\widetilde{b}$	$-\mu_3 a$	$-\mu_1\mu_3$	$-\mu_3 ab$	$\mu_1\mu_3 b$
$\widetilde{b}$	$\widetilde{b}$	$\widetilde{ab}$	$\mu_2\widetilde{e}_0$	$-\mu_2\widetilde{a}$	$-\mu_3 b$	$\mu_3 ab$	$-\mu_2\mu_3$	$-\mu_2\mu_3 a$
$\widetilde{ab}$	$\widetilde{ab}$	$-\mu_1\widetilde{b}$	$\mu_2\widetilde{a}$	$\mu_1\mu_2\widetilde{e}_0$	$-\mu_3 ab$	$-\mu_1\mu_3 b$	$\mu_2\mu_3 a$	$-\mu_1\mu_2\mu_3$

Теперь мы можем задать $\varphi_{a,b}$ равенствами $\varphi_{a,b}((e_j,0)) = \psi_{a,b}(e_j)$ и $\varphi_{a,b}((0,e_j)) = \widetilde{\psi_{a,b}(e_j)}$ для всех $0 \leqslant j \leqslant 3$. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 3.4. □

§4. Делители нуля с условиями на альтернативность компонент

Этот параграф посвящён изучению таких пар делителей нуля в произвольной алгебре Кэли–Диксона, компоненты которых удовлетворяют дополнительным условиям на норму и альтернативность. Мы обобщаем и усиливаем результаты, полученные в разделе 3 работы автора [22] для случая вещественных алгебр Кэли–Диксона.

4.1. Шестиугольники в графах делителей нуля.

Лемма 4.1. *Пусть* $(a,b),(c,d) \in \mathcal{A}_{n+1}$ *и пусть элементы* $c,d \in \mathcal{A}_n$ *(нестрого) альтернируют с элементами* $a,b \in \mathcal{A}_n$. *Предположим также, что* $n(c) - \chi\gamma_n n(d) = \chi n(c) - \gamma_n n(d) = 0$ *для некоторого* $\chi \in \mathbb{F}$. *Тогда*

(1) *если* $(a,b)(c,d) = 0$, *то* $(c,d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$;
(2) *если* $(c,d)(a,b) = 0$, *то* $(\overline{ca}, -\chi d\bar{a})(c,d) = 0$.

Доказательство.

(1) Имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}
(c,d)(\overline{ac}, -\chi da) &= \big(c(\overline{ac}) + \gamma_n(\overline{-\chi da})d, (-\chi da)c + d(ac)\big) \\
&= \big(c(\bar{c}\bar{a}) - \chi\gamma_n(\bar{a}\bar{d})d, \chi(b\bar{c})c - \gamma_n d(\bar{d}b)\big) \\
&= \big((c\bar{c})\bar{a} - \chi\gamma_n\bar{a}(\bar{d}d), \chi b(\bar{c}c) - \gamma_n(d\bar{d})b\big) \\
&= ((n(c) - \chi\gamma_n n(d))\bar{a}, (\chi n(c) - \gamma_n n(d))b) = 0.
\end{aligned}$$

(2) Аналогично,

$$\begin{aligned}
(\overline{ca}, -\chi d\bar{a})(c,d) &= \big((\overline{ca})c + \gamma_n\bar{d}(-\chi d\bar{a}), d(\overline{ca}) + (-\chi d\bar{a})\bar{c}\big) \\
&= \Big((\bar{a}\bar{c})c - \chi\gamma_n\bar{d}(d\bar{a}), d(\overline{-\gamma_n\bar{b}d}) + \chi(bc)\bar{c}\Big) \\
&= \big(\bar{a}(\bar{c}c) - \chi\gamma_n(\bar{d}d)\bar{a}, -\gamma_n(d\bar{d})b + \chi b(c\bar{c})\big) \\
&= ((n(c) - \chi\gamma_n n(d))\bar{a}, (\chi n(c) - \gamma_n n(d))b) = 0.
\end{aligned}$$

□

Замечание 4.2. Если в лемме 4.1 выполнено $n(c) = n(d) = 0$, то можно взять произвольное $\chi \in \mathbb{F}$. В противном случае мы немедленно получаем

$$\begin{cases} n(c) = \pm\gamma_n n(d) \neq 0; \\ \chi = \dfrac{n(c)}{\gamma_n n(d)} = \dfrac{\gamma_n n(d)}{n(c)} = \pm 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

Условие $(*)$ автоматически выполнено в том случае, когда $\mathcal{A}_{n+1}$ – вещественная алгебра главной последовательности, см. [16, стр. 25–27], или когда $\mathcal{A}_{n+1}$ – вещественная контр-алгебра Кэли–Диксона, см. [3, лемма 4.1]. Можно проверить, что данные доказательства используют только тот факт, что $c, d \in \mathcal{A}_n$ (нестрого) альтернируют с $a, b \in \mathcal{A}_n$, и тогда $n(c) = n(d)$. Таким образом, значения χ равны -1 и 1 соответственно. Из леммы 4.6 вытекает, что условие $(*)$ также выполняется и в том случае, когда $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Однако в общем случае условие $(*)$ может не выполняться, см. [3, пример 4.17] и пример 6.3 ниже.

Обозначение 4.3. Пусть $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $n(a) \neq 0$. Тогда *характеристикой* элемента (a, b) называется число $\chi((a, b)) = \dfrac{\gamma_n n(b)}{n(a)}$.

Замечание 4.4. В качестве характеристики можно было бы рассматривать и обратную к $\chi((a, b))$ величину, а именно, $\frac{n(a)}{\gamma_n n(b)}$. Тогда требование $n(a) \neq 0$ следовало бы заменить условием $n(b) \neq 0$. Бóльшая часть результатов этого раздела без труда переносится на случай такого определения характеристики. В частности, в лемме 4.19 следовало бы тогда выражать c через d, а не наоборот.

Предложение 4.5. *Если $(x, y) \in \mathcal{A}_{n+1}$ и $\chi((x, y)) = 1$, то (x, y) ортогонален (в сильном смысле) самому себе.*

Доказательство. По определению, $n((x, y)) = n(x) - \gamma_n n(y) = \gamma_n n(y) - \gamma_n n(y) = 0$, поэтому $(x, y)(x, y) = -(x, y)\overline{(x, y)} = -n((x, y)) = 0$. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть элементы $c, d \in \mathcal{A}_n$ альтернируют с элементами $a, b \in \mathcal{A}_n$ и пусть $(a, b)(c, d) = 0$ или $(c, d)(a, b) = 0$ в $\mathcal{A}_{n+1}$. Предположим, что $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$, а также $n(c) \neq 0$ или $n(d) \neq 0$. Тогда $\chi = \chi((a, b)) = \chi((c, d)) = \pm 1$ и, кроме того, $\chi((\overline{ac}, -\chi da)) = \chi((\overline{ca}, -\chi d\bar{a})) = \chi$. Другими словами, элементы (a, b), (c, d), $(\overline{ac}, -\chi da)$*

и $(\overline{ca}, -\chi d\bar{a})$ *удовлетворяют условию* $(*)$ *с одним и тем же значением* χ.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что

$$(a,b)(c,d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0;$$

случай $(c,d)(a,b) = 0$ рассматривается аналогично. По лемме 3.1,

$$\begin{aligned}
n(a)n(c) &= n(ac) = n(-\gamma_n \bar{d}b) = \gamma_n^2 n(\bar{d}b) = \gamma_n^2 n(b)n(\bar{d}) = \gamma_n^2 n(b)n(d),\\
n(a)n(d) &= n(da) = n(-b\bar{c}) = n(b\bar{c}) = n(b)n(\bar{c}) = n(b)n(c),\\
(n(c))^2 n(a) &= n(c)(n(a)n(c)) = \gamma_n^2 n(c)(n(b)n(d)) = \gamma_n^2 n(d)(n(b)n(c))\\
&= \gamma_n^2 n(d)(n(a)n(d)) = (\gamma_n n(d))^2 n(a),\\
(n(c))^2 n(b) &= n(c)(n(b)n(c)) = n(c)(n(a)n(d)) = n(d)(n(a)n(c))\\
&= \gamma_n^2 n(d)(n(b)n(d)) = (\gamma_n n(d))^2 n(b).
\end{aligned}$$

Из $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$ следует, что $(n(c))^2 = (\gamma_n n(d))^2$, откуда $n(c) = \pm\gamma_n n(d) \neq 0$. Аналогично, из $n(c) \neq 0$ или $n(d) \neq 0$ следует, что $n(a) = \pm\gamma_n n(b) \neq 0$. Значит, $\chi = \chi((a,b)) = \gamma_n \dfrac{n(b)}{n(a)} = \gamma_n \dfrac{n(d)}{n(c)} = \chi((c,d)) = \pm 1$. Кроме того, из леммы 3.1 вытекает, что

$$\chi((\overline{ac}, -\chi da)) = \gamma_n \frac{n(-\chi da)}{n(\overline{ac})} = \gamma_n \frac{n(da)}{n(ac)} = \gamma_n \frac{n(a)n(d)}{n(a)n(c)} = \gamma_n \frac{n(d)}{n(c)} = \chi.$$

Аналогично доказывается, что $\chi((\overline{ca}, -\chi d\bar{a})) = \chi$. □

В утверждениях 4.7–4.12 и на рис. 1 мы предполагаем, что $(a,b)(c,d) = 0$ в $\mathcal{A}_{n+1}$ и элементы $a, b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{A}_n$, то есть $[x,x,y] = [y,y,x] = 0$ при $x \in \{a,b\}$ и $y \in \{c,d\}$. Везде, кроме леммы 4.7, мы также считаем, что (a,b) и (c,d) удовлетворяют условию $(*)$.

Лемма 4.7. *Элементы* ac, da *строго альтернируют с элементами* a, b, c, d.

Доказательство. Из $(a,b)(c,d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$ получаем, что $ac = -\gamma_n \bar{d}b$ и $da = -b\bar{c}$. Тогда остаётся применить следствие 3.8 к парам элементов a и c, b и c, a и d, b и d.

Отметим, что это утверждение нетрудно доказать и непосредственно:

$$[a,a,ac] = -[a,\bar{a},ac] = -(a\bar{a})(ac) + a(\bar{a}(ac))$$

$$= -(a\bar{a})(ac) + a((\bar{a}a)c) = -n(a)ac + n(a)ac = 0,$$
$$[b, b, ac] = [b, b, -\gamma_n \bar{d}b] = \gamma_n[\bar{d}b, b, b] = -\gamma_n[\bar{d}b, \bar{b}, b] = 0.$$

Аналогично можно показать, что a, b, c, d альтернируют с ac, da. И наоборот

$$\begin{aligned}[ac, ac, a] &= -[ac, \overline{ac}, a] = -((ac)(\overline{ac}))a + (ac)((\bar{c}\bar{a})a) \\ &= -n(ac)a + (ac)(\bar{c}(\bar{a}a)) = -n(ac)a + n(a)(ac)\bar{c} \\ &= -n(ac)a + n(a)a(c\bar{c}) = -n(ac)a + n(a)n(c)a = 0,\end{aligned}$$

поскольку из леммы 3.1 следует, что $n(ac) = n(a)n(c)$. Таким образом, элементы ac, da альтернируют с элементами a, b, c, d. □

Следствие 4.8. *В $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ существует следующий цикл длины 6:*

$$(a, b) \to (c, d) \to (\overline{ac}, -\chi da) \to (a, -b) \to (c, -d) \to (\overline{ac}, \chi da) \to (a, b).$$

Доказательство. По лемме 4.6,

$$\chi = \chi((a, b)) = \chi((c, d)) = \chi((\overline{ac}, -\chi da)) = \pm 1.$$

Кроме того, согласно лемме 4.7, элементы ac, da строго альтернируют с элементами a, b, c, d. Мы получаем искомый цикл последовательным применением леммы 4.1(1):

- из $(a, b)(c, d) = 0$ следует $(c, d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$;
- имеют место равенства $\overline{c(\overline{ac})} = \overline{c(\bar{c}\bar{a})} = \overline{(c\bar{c})\bar{a}} = n(c)a$ и $-\chi(-\chi da)c = (da)c = (-b\bar{c})c = -b(\bar{c}c) = -n(c)b$, поэтому из $(c, d)(\overline{ac}, -\chi da) = 0$ следует $(\overline{ac}, -\chi da)(a, -b) = 0$, так как $n(c) \neq 0$;
- имеют место равенства $\overline{(\overline{ac})a} = \overline{(\bar{c}\bar{a})a} = \overline{\bar{c}(\bar{a}a)} = n(a)c$ и $-\chi(-b)(\overline{ac}) = \chi b(\overline{-\gamma_n \bar{d}b}) = -\chi\gamma_n b(\bar{b}d) = -\chi\gamma_n(b\bar{b})d = -\chi\gamma_n n(b)d = -n(a)d$, поэтому из $(\overline{ac}, -\chi da)(a, -b) = 0$ следует $(a, -b)(c, -d) = 0$, так как $n(a) \neq 0$;
- из $(a, -b)(c, -d) = 0$ следует $(c, -d)(\overline{ac}, \chi da) = 0$;
- из $(c, -d)(\overline{ac}, \chi da) = 0$ следует $(\overline{ac}, \chi da)(a, b) = 0$. □

Предложение 4.9. *Пусть $(x, y)(z, w) = 0$ в $\mathcal{A}_{n+1}$. Тогда*

$$(\bar{x}, \bar{y})(\gamma_n \bar{w}, \bar{z}) = (\gamma_n \bar{y}, \bar{x})(\gamma_n w, z) = (\gamma_n y, x)(\bar{z}, \bar{w}) = 0.$$

Доказательство. По условию, $(x, y)(z, w) = (xz + \gamma_n \bar{w}y, wx + y\bar{z}) = 0$. Тогда

$$(\bar{x}, \bar{y})(\gamma_n \bar{w}, \bar{z}) = (\gamma_n \bar{x}\bar{w} + \gamma_n z\bar{y}, \bar{z}\bar{x} + \gamma_n \bar{y}w)$$

$$\begin{aligned}
&= (\gamma_n(\overline{wx + y\bar{z}}), \overline{xz + \gamma_n \bar{w} y}) = 0,\\
(\gamma_n \bar{y}, \bar{x})(\gamma_n w, z) &= (\gamma_n^2 \bar{y} w + \gamma_n \bar{z}\bar{x}, \gamma_n z\bar{y} + \gamma_n \bar{x}\bar{w})\\
&= \gamma_n(\overline{xz + \gamma_n \bar{w} y}, \overline{wx + y\bar{z}}) = 0,\\
(\gamma_n y, x)(\bar{z}, \bar{w}) &= (\gamma_n y\bar{z} + \gamma_n wx, \gamma_n \bar{w} y + xz) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Следствие 4.10. *В $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ существуют следующие циклы длины 6:*

$$\begin{aligned}
(\bar{a}, \bar{b}) &\to (\gamma_n \bar{d}, \bar{c}) \to (-\chi\gamma_n da, \overline{ac}) \to (\bar{a}, -\bar{b})\\
&\to (\gamma_n \bar{d}, -\bar{c}) \to (\chi\gamma_n da, \overline{ac}) \to (\bar{a}, \bar{b}),\\
(\gamma_n b, a) &\to (\bar{c}, \bar{d}) \to (-\chi\gamma_n \overline{da}, ac) \to (\gamma_n b, -a)\\
&\to (\bar{c}, -\bar{d}) \to (\chi\gamma_n \overline{da}, ac) \to (\gamma_n b, a),\\
(\gamma_n \bar{b}, \bar{a}) &\to (\gamma_n d, c) \to (ac, -\chi\overline{da}) \to (\gamma_n \bar{b}, -\bar{a})\\
&\to (\gamma_n d, -c) \to (ac, \chi\overline{da}) \to (\gamma_n \bar{b}, \bar{a}).
\end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из следствия 4.8 и предложения 4.9. $\square$

Замечание 4.11. Циклы из следствия 4.10 можно также получить при помощи следствия 4.8, если брать в качестве исходных пар делителей нуля пары $(\bar{a}, \bar{b})$ и $(\gamma_n \bar{d}, \bar{c})$, $(\gamma_n b, a)$ и $(\bar{c}, \bar{d})$, $(\gamma_n \bar{b}, \bar{a})$ и $(\gamma_n d, c)$.

Описание 4.12. Используя следствия 4.8 и 4.10, мы получаем подграфы графа делителей нуля $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$, которые мы называем *шестиугольниками.* Они изображены на рис. 1 ниже.

Объединяя результаты лемм 4.6 и 4.7, а также следствий 4.8 и 4.10, мы получаем следующую теорему.

Теорема 4.13. *Пусть элементы $a, b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{A}_n$ и пусть $(a, b)(c, d) = 0$ в $\mathcal{A}_{n+1}$. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *Элементы ac, da строго альтернируют с каждым из элементов a, b, c, d.*
(2) *Пусть $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$, а также $n(c) \neq 0$ или $n(d) \neq 0$. Тогда (a, b), (c, d) и $(\overline{ac}, -\chi da)$ удовлетворяют условию $(*)$ с одним и тем же значением χ.*

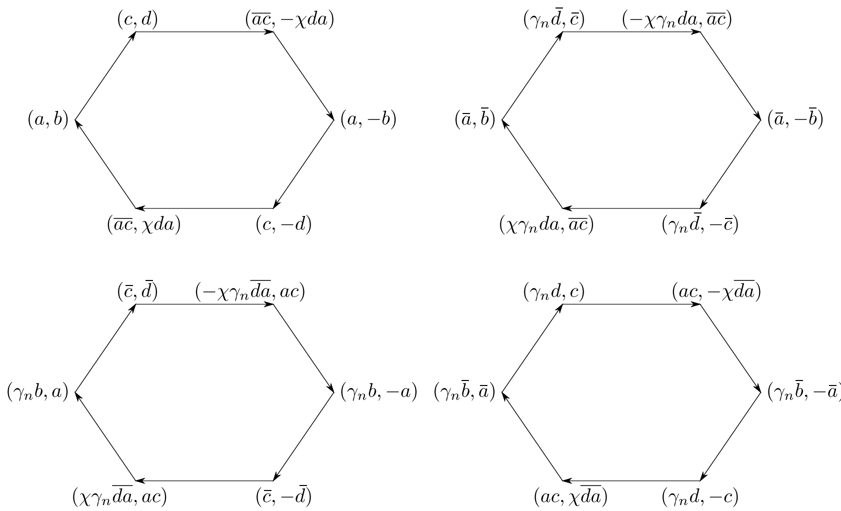

Рис. 1. Шестиугольники.

(3) *В этом случае в* $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ *существуют следующие циклы длины* 6*:*

$$\begin{aligned}
(a,b) &\to (c,d) \to (\overline{ac},-\chi da) \to (a,-b)\\
&\to (c,-d) \to (\overline{ac},\chi da) \to (a,b),\\
(\bar{a},\bar{b}) \to (\gamma_n\bar{d},\bar{c}) &\to (-\chi\gamma_n da,\overline{ac}) \to (\bar{a},-\bar{b})\\
&\to (\gamma_n\bar{d},-\bar{c}) \to (\chi\gamma_n da,\overline{ac}) \to (\bar{a},\bar{b}),\\
(\gamma_n b,a) \to (\bar{c},\bar{d}) &\to (-\chi\gamma_n\overline{da},ac) \to (\gamma_n b,-a)\\
&\to (\bar{c},-\bar{d}) \to (\chi\gamma_n\overline{da},ac) \to (\gamma_n b,a),\\
(\gamma_n\bar{b},\bar{a}) \to (\gamma_n d,c) &\to (ac,-\chi\overline{da}) \to (\gamma_n\bar{b},-\bar{a})\\
&\to (\gamma_n d,-c) \to (ac,\chi\overline{da}) \to (\gamma_n\bar{b},\bar{a}).
\end{aligned}$$

4.2. Дважды альтернативные делители нуля.

Обозначение 4.14. Пусть $a \in \mathcal{A}_n$. Отображения $L_a, R_a : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} L_a(x) &= ax, \\ R_a(x) &= xa \end{aligned} \tag{4.1}$$

для всех $x \in \mathcal{A}_n$. Они являются линейными операторами в 2^n-мерном линейном пространстве $\mathcal{A}_n$.

Лемма 4.15. *Пусть* $a \in \mathcal{A}_n$. *Тогда* $\dim(\operatorname{Ker} L_a) = \dim(\operatorname{Ker} R_a)$, *или, что то же самое,* $\dim(l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a)) = \dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a))$.

Доказательство. По лемме 2.12(2), операторы L_a и $L_{\bar{a}}$ сопряжены относительно симметрической билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в том смысле, что для любых $x, y \in \mathcal{A}_n$ выполнено $\langle L_a(x), y\rangle = \langle x, L_{\bar{a}}(y)\rangle$. Значит, $\dim(\operatorname{Ker} L_a) = \dim(\operatorname{Ker} L_{\bar{a}})$. Кроме того, $L_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x} = \overline{xa} = \overline{R_a(x)}$ для любого $x \in \mathcal{A}_n$, откуда $\dim(\operatorname{Ker} L_{\bar{a}}) = \dim(\operatorname{Ker} R_a)$, что и доказывает требуемое утверждение. □

Следствие 4.16. $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, $a \neq 0$. Тогда, согласно лемме 4.15, $\operatorname{Ker} L_a \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} R_a \neq \{0\}$. Другими словами, a – правый делитель нуля тогда и только тогда, когда a – левый делитель нуля. Значит, множества левых и правых делителей нуля в $\mathcal{A}_n$ совпадают, то есть $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$. □

Таким образом, в случае алгебр Кэли–Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля. Следующее предложение описывает связь между графами ортогональности и графами делителей нуля этих алгебр. Отметим, что в работе [22] оно сформулировано только для вещественных алгебр Кэли–Диксона, однако его доказательство дословно переносится на случай произвольного поля.

Предложение 4.17 ([22, предложение 3.10])**.** *Ребро* $([a],[b])$ *в графе* $\Gamma_Z(\mathcal{A}_n)$ *является ребром также и в* $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) $[b] = [\bar{a}]$ *и* $n(a) = 0$*;*
(2) $t(a) = t(b) = 0$.

Из предложения 4.17 следует, что любой делитель нуля $a \in \mathcal{A}_n$ с нетривиальным ортогонализатором либо является чисто мнимым, либо имеет нулевую норму. Если a не является чисто мнимым, то содержащая его компонента связности $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ состоит из двух вершин: $[a]$ и $[\bar{a}]$. Таким образом, в контексте графов ортогональности нас интересуют только чисто мнимые делители нуля.

Далее мы будем рассматривать такие делители нуля $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$, у которых обе компоненты a и b являются альтернативными элементами в $\mathcal{A}_n$.

Определение 4.18. Множество *дважды альтернативных элементов* $\mathcal{A}_{n+1}$ определяется как

$$DA(\mathcal{A}_{n+1}) = \{(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1} \mid \text{ элементы } a \text{ и } b \text{ альтернативны в } \mathcal{A}_n\}.$$

Алгебра $\mathcal{A}_n$ является альтернативной только при $n \leqslant 3$, поэтому все элементы $\mathcal{A}_{n+1}$ являются дважды альтернативными, если и только если $n \leqslant 3$. Заметим, что дважды альтернативные элементы могут не быть альтернативными, см. [17, теорема 3.3] и [3, лемма 4.16].

Отметим также, что, согласно [3, пример 4.17], дважды альтернативные элементы не обязаны удовлетворять условию $(*)$ даже в том случае, когда обе их компоненты имеют ненулевую норму. Другими словами, их характеристика χ может быть корректно определена, но не равна 0 или ± 1. Однако, по лемме 4.6, если левый или правый аннулятор некоторого дважды альтернативного элемента (a, b) содержит элемент (c, d), причём $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$, а также $n(c) \neq 0$ или $n(d) \neq 0$, то (a, b) удовлетворяет условию $(*)$.

Лемма 4.19. *Пусть* $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$ *и пусть* $n(a) \neq 0$. *Обозначим* $\chi = \chi((a, b))$. *Тогда*

$$l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \left\{ \left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \;\middle|\; b(ca) = \chi(bc)a \right\},$$

$$r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \left\{ \left(c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)} \right) \;\middle|\; (ac)\bar{b} = \chi a(c\bar{b}) \right\}.$$

Если, кроме того, $t((a, b)) = 0$, *то*

$$O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \left\{ \left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)} \right) \;\middle|\; t(c) = 0,\; b(ca) = \chi(bc)a \right\}.$$

Доказательство. Сперва рассмотрим $l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$. Пусть для $(c, d) \in \mathcal{A}_{n+1}$ выполнено $(c, d)(a, b) = (ca + \gamma_n \bar{b}d, bc + d\bar{a}) = 0$. Тогда

$bc + d\bar{a} = 0$, поэтому $n(a)d = d(\bar{a}a) = (d\bar{a})a = -(bc)a$. Кроме того, $ca + \gamma_n \bar{b}d = 0$ и $\chi n(a) = \gamma_n n(b)$, откуда $b(ca) = -\gamma_n b(\bar{b}d) = -\gamma_n(b\bar{b})d = -\gamma_n n(b)d = -\chi n(a)d = \chi(bc)a$. Проводя эти же рассуждения в противоположную сторону, нетрудно показать, что для любого $c \in \mathcal{A}_n$, такого что $b(ca) = \chi(bc)a$, выполнено $\left(c, -\frac{(bc)a}{n(a)}\right) \in l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b))$. Таким образом, обратное утверждение также верно.

Теперь рассмотрим $r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b))$. Пусть для $(c,d) \in \mathcal{A}_{n+1}$ выполнено $(a,b)(c,d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = 0$. Тогда $da + b\bar{c} = 0$, поэтому $n(a)d = d(a\bar{a}) = (da)\bar{a} = -(b\bar{c})\bar{a}$. Поскольку $ac + \gamma_n \bar{d}b = 0$ и $\chi n(a) = \gamma_n n(b)$, имеем $(ac)\bar{b} = -\gamma_n(\bar{d}b)\bar{b} = -\gamma_n \bar{d}(b\bar{b}) = -\gamma_n n(b)\bar{d} = -\chi n(a)\bar{d} = \chi(\overline{-n(a)d}) = \chi\overline{(b\bar{c})\bar{a}} = \chi a(c\bar{b})$. Ясно, что в этом случае обратное утверждение тоже верно, то есть для любого $c \in \mathcal{A}_n$, такого что $(ac)\bar{b} = \chi a(c\bar{b})$, выполнено $\left(c, -\frac{(b\bar{c})\bar{a}}{n(a)}\right) \in r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b))$.

Наконец, чтобы получить формулу для $O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a,b))$, достаточно воспользоваться предложением 4.17. $\square$

Следствие 4.20. *Пусть $a, b, c, d, ac, ad \in \mathcal{A}_n$ попарно строго альтернируют, $(a,b)(c,d) = 0$ в $\mathcal{A}_{n+1}$, (a,b) и (c,d) удовлетворяют условию $(*)$. Пусть также $t(a) = t(c) = t(ac) = 0$. Тогда левый верхний шестиугольник на рис. 1 также является неориентированным шестиугольником в $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$, и в $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$ нет других рёбер, соединяющих его вершины, то есть в этом шестиугольнике нет хорд.*

Доказательство. Поскольку $t(a) = t(c) = t(ac) = 0$, из предложения 4.17 следует, что данный шестиугольник является шестиугольником не только в $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$, но и в $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$.

Пусть теперь (x,y) и (z,w) – какие-то две из его вершин, возможно, совпадающие. Сперва мы покажем, что элемент (x,y) не может быть ортогонален (z,w) и $(z,-w)$ одновременно. Предположим противное. Тогда, аналогично доказательству леммы 4.19, из $(x,y)(z,w) = 0$ следует, что $w = -\frac{(yz)x}{n(x)}$, а из $(x,y)(z,-w) = 0$ следует, что $-w = -\frac{(yz)x}{n(x)}$, откуда $w = -w$. Но $w \neq 0$, противоречие.

Пусть $t(x) = 0$. В общем случае, равенство $(x,y)(x,-y) = (-n(x) - \gamma_n n(y), -2yx) = 0$ может выполняться, то есть (x,y) и $(x,-y)$ могут быть ортогональны. Однако, если x строго альтернирует с y и (x,y) удовлетворяет условию $(*)$, то (x,y) не может быть ортогонален $(x,-y)$. Действительно, по лемме 3.1, $n(yx) = n(y)n(x) \neq 0$. Значит, $yx \neq 0$, откуда $(x,y)(x,-y) \neq 0$. $\square$

Доказательство следующей леммы использует соображения из [16, стр. 21].

Лемма 4.21. *Пусть элементы* $a, b, c \in \mathcal{A}_n$ *удовлетворяют условиям* $t(a) = t(b) = 0$, $[a, b, b] = 0$ *и* $b = [a, c, b]$. *Тогда* $n(b) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $S : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$, задаваемое формулой $S(x) = [a, x, b]$ для всех $x \in \mathcal{A}_n$. Тогда $S = R_b L_a - L_a R_b$, где L_a и R_b определяются равенством (4.1). Отображения L_a и R_b кососимметричны относительно симметрической билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, так как, по лемме 2.12(2), $\langle L_a(x), y\rangle = \langle ax, y\rangle = \langle x, \bar{a}y\rangle = \langle x, -ay\rangle = -\langle x, L_a y\rangle$. Значит, S также кососимметрично, и из $S(S(x)) = 0$ следует, что $0 = \langle x, -S(S(x))\rangle = \langle S(x), S(x)\rangle = n(S(x))$. Поскольку $b = S(c)$ и $0 = [a, b, b] = S(b) = S(S(c))$, получаем $n(b) = n(S(c)) = 0$. □

Следующая теорема обобщает лемму 2.20(1) на случай дважды альтернативных делителей нуля, характеристика χ которых равна 1. Если же характеристика корректно определена, но не равна 1, то норма такого элемента отлична от нуля, поэтому применима лемма 2.20(2). Таким образом, нам известен явный вид централизатора произвольного чисто мнимого дважды альтернативного элемента, первая компонента которого имеет ненулевую норму.

Теорема 4.22. *Пусть* $(a, b) \in DA(\mathcal{A}_{n+1})$ *– чисто мнимый элемент, и* $\chi((a, b)) = 1$. *Тогда* $C_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) = \mathbb{F} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$.

Доказательство. Так как $\chi((a, b)) = 1$, то $n((a, b)) = n(a) - \gamma_n n(b) = 0$. Предположим, что существует $(c, d) \in C_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)) \setminus (\mathbb{F} \oplus O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b)))$. Без ограничения общности можно считать, что $t(c) = 0$. Тогда

$$\overline{(a, b)(c, d)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} = (c, d)(a, b) = (a, b)(c, d),$$

то есть $(a, b)(c, d) = k \in \mathbb{F}$. Поскольку $(c, d) \notin O_{\mathcal{A}_{n+1}}((a, b))$, то $k \neq 0$. Предположим без ограничения общности, что $k = 1$. Тогда

$$(1, 0) = (a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da - bc).$$

Из условия $da = bc$ следует, что $n(a)d = d(a\bar{a}) = (da)\bar{a} = (bc)\bar{a}$, значит, $n(a)\bar{d} = a(\bar{c}\bar{b}) = -a(c\bar{b})$. Умножим равенство $1 = ac + \gamma_n \bar{d}b$ справа на $\bar{b}$ и подставим выражение для $n(a)\bar{d}$:

$$\begin{aligned}\bar{b} &= (ac)\bar{b} + \gamma_n(\bar{d}b)\bar{b} = (ac)\bar{b} + \gamma_n \bar{d}(b\bar{b}) = (ac)\bar{b} + \gamma_n n(b)\bar{d} \\ &= (ac)\bar{b} + n(a)\bar{d} = (ac)\bar{b} - a(c\bar{b}) = [a, c, \bar{b}].\end{aligned}$$

Из леммы 2.12(1) следует, что $t(\bar{b}) = t([a, c, \bar{b}]) = 0$, откуда $\bar{b} = -b$ и $b = [a, c, b]$. Применяя лемму 4.21, получаем $n(b) = 0$, что противоречит условию $\chi((a, b)) = 1$. □

§5. Делители нуля в алгебрах с анизотропной нормой

В лемме 5.1 мы переносим результаты раздела 1 работы Морено [16], полученные для вещественных алгебр главной последовательности, на случай алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой над произвольным полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Напомним, что мы обозначаем $\widetilde{e}_0 = (0, e_0) \in \mathcal{A}_n$ и $\widetilde{a} = a\widetilde{e}_0$ для всех $a \in \mathcal{A}_n$.

Как было показано в следствии 4.16, в алгебрах Кэли–Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля, то есть $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$. В случае алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой имеет место более сильный результат.

Лемма 5.1 ([16, следствия 1.5, 1.6, 1.9 и 1.12]). *Пусть $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда*

(1) $n(ab) = n(\bar{a}b) = n(a\bar{b}) = n(ba)$*;*

(2) *элементы ab, ba, $\bar{a}b$, $a\bar{b}$ равны нулю или не равны нулю одновременно;*

(3) *если $a \in Z(\mathcal{A}_n)$, то $t(a) = 0$;*

(4) *если $a \in Z(\mathcal{A}_n)$, то a – дважды чисто мнимый элемент;*

(5) $ab = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a\widetilde{b} = 0$.

Доказательство.

(1) По лемме 2.12(2), $n(ab) = \langle ab, ab\rangle = \langle \bar{a}(ab), b\rangle = \langle \bar{b}(\bar{a}(ab)), e_0\rangle = \frac{1}{2}t(\bar{b}(\bar{a}(ab)))$. Заметим, что $\bar{a}(ab) = (t(a) - a)(ab) = a((t(a) - a)b) = a(\bar{a}b)$, откуда $n(ab) = \frac{1}{2}t(\bar{b}(\bar{a}(ab))) = \frac{1}{2}t(\bar{b}(a(\bar{a}b))) = n(\bar{a}b)$. Кроме того, $n(\bar{a}b) = n(\overline{\bar{a}b}) = n(\bar{b}a) = n(ba) = n(\overline{ba}) = n(\bar{a}\bar{b}) = n(a\bar{b})$.

(2) Сразу следует из пункта (1) и анизотропности нормы на $\mathcal{A}_n$.

(3) Пусть $a \in Z(\mathcal{A}_n)$, то есть $ab = 0$ для некоторого $b \in \mathcal{A}_n$, $b \neq 0$. Согласно пункту (2), $ab = \bar{a}b = 0$, откуда $t(a)b = (a + \bar{a})b = 0$. Так как $t(a) \in \mathbb{F}$ и $b \neq 0$, получаем $t(a) = 0$.

(4) Из предложения 4.9 следует, что если $a = (a_1, a_2) \in Z(\mathcal{A}_n)$, то $\widetilde{a} = (\gamma_{n-1}a_2, a_1) \in Z(\mathcal{A}_n)$. Поэтому, согласно пункту (3), $t(a) = t(\widetilde{a}) = 0$, то есть $t(a_1) = t(a_2) = 0$.

(5) Если $a = 0$ или $b = 0$, то $ab = a\widetilde{b} = 0$. В противном случае, по пункту (4), a и b дважды чисто мнимые, поэтому требуемое утверждение следует из первого равенства в предложении 4.9. □

Следствие 5.2. *Пусть $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой. Тогда граф $\Gamma_Z(\mathcal{A}_n)$ может быть получен из графа $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ заменой каждого неориентированного ребра на пару ориентированных рёбер.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из леммы 5.1(2). $\square$

Теорема 5.3. *Пусть $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, $a, b \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $t(a) = t(b) = 0$. Если a и b C-эквивалентны, то есть $C_{\mathcal{A}_n}(a) = C_{\mathcal{A}_n}(b)$, то $[a] = [b]$.*

Доказательство. По лемме 2.20(2), $C_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}a \oplus O_{\mathcal{A}_n}(a)$. Кроме того, по предложению 4.17, для всех $x \in O_{\mathcal{A}_n}(a)$ выполнено $t(x) = 0$. Так как $b \in C_{\mathcal{A}_n}(b) = C_{\mathcal{A}_n}(a)$ и $t(b) = 0$, имеем $b = ka + x$ для некоторых $k \in \mathbb{F}$ и $x \in O_{\mathcal{A}_n}(a)$. Отсюда следует, что $C_{\mathcal{A}_n}(a) \subseteq C_{\mathcal{A}_n}(x)$.

Предположим от противного, что $[a] \neq [b]$, то есть $x \neq 0$. В силу анизотропности нормы на $\mathcal{A}_n$, это означает, что $n(x) \neq 0$. Согласно лемме 5.1(5), из $ax = 0$ следует $a\widetilde{x} = 0$, то есть $\widetilde{x} \in O_{\mathcal{A}_n}(a)$. Значит, $\widetilde{x} \in C_{\mathcal{A}_n}(a) \subseteq C_{\mathcal{A}_n}(x)$. Кроме того, по лемме 5.1(4), элемент x является дважды чисто мнимым. Из леммы 3.4 получаем, что $\widetilde{x}x = -x\widetilde{x} = n(x)\widetilde{e}_0 \neq 0$, что противоречит равенству $\widetilde{x}x = x\widetilde{x}$. $\square$

Следствие 5.4. *Пусть $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, $a, b \in \mathcal{A}_n$, $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$, $\mathfrak{Im}(b) \neq 0$. Если a и b C-эквивалентны, то $[\mathfrak{Im}(a)] = [\mathfrak{Im}(b)]$.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 5.3, так как $C_{\mathcal{A}_n}(a) = C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$ и $C_{\mathcal{A}_n}(b) = C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(b))$. $\square$

Замечание 5.5. Пусть $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, $a \in Z(\mathcal{A}_n)$. Тогда, по леммам 3.2(3) и 5.1(4–5), элементы a и $\widetilde{a}$ дважды чисто мнимые и линейно независимые, но при этом O-эквивалентные. Кроме того, если $b \in Z(\mathcal{A}_{n-1})$, то $O_{\mathcal{A}_n}((b, 0)) = O_{\mathcal{A}_n}((0, b)) = \{(c, d) \mid c, d \in O_{\mathcal{A}_{n-1}}(b)\}$, поэтому $(b, 0)$ и $(0, b)$ также дважды чисто мнимые и линейно независимые, но O-эквивалентные.

Пункты (1)–(5) леммы 5.6 были доказаны Морено в [16, стр. 25–27] для вещественных алгебр главной последовательности. В своём доказательстве Морено предполагает, что c и d – альтернативные элементы в $\mathcal{M}_n$, однако оно дословно переносится на тот случай, когда элементы $c, d \in \mathcal{M}_n$ альтернируют лишь с элементами $a, b \in \mathcal{M}_n$. Морено также доказал пункт (6) леммы 5.6, однако его доказательство использует тот факт, что элементы c и d строго альтернируют.

Напомним, что антиассоциатором элементов a, b, c алгебры $\mathcal{A}$ называется элемент $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc)$.

Лемма 5.6. *Пусть $\mathcal{A}_{n+1}$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, элементы $c, d \in \mathcal{A}_n$ альтернируют с элементами $a, b \in \mathcal{A}_n$, $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$, $(a, b)(c, d) = 0$. Тогда*

(1) $t(a) = t(b) = t(c) = t(d) = 0$;
(2) $n(a) = -\gamma_n n(b)$ *и* $n(c) = -\gamma_n n(d)$, *т.е.* $\chi((a, b)) = \chi((c, d)) = -1$;
(3) $[c, a, d] = 2n(c)b$, $[c, b, d] = -2n(d)a$;
(4) $\{c, a, d\} = \{c, b, d\} = 0$;
(5) $a \perp b$;
(6) $a, b \in \operatorname{span}(e_0, c, d, cd)^{\perp}$;
(7) $(c, d)(ac, ad) = 0$.

Доказательство.

(1) Сразу следует из леммы 5.1(4).

(2) Так как $(a, b) \neq 0$, $(c, d) \neq 0$ и норма на $\mathcal{A}_n$ анизотропна, имеем $n(a) \neq 0$ или $n(b) \neq 0$, а также $n(c) \neq 0$ или $n(d) \neq 0$. По лемме 4.6, $\chi = \chi((a, b)) = \chi((c, d)) = \pm 1$. Однако, если $\chi = 1$, то $n((a, b)) = n((c, d)) = 0$, что противоречит анизотропности нормы на $\mathcal{A}_{n+1}$. Значит, $\chi = -1$.

(3) Имеем $(a, b)(c, d) = (ac + \gamma_n \bar{d}b, da + b\bar{c}) = (ac - \gamma_n db, da - bc) = 0$, откуда $ac = \gamma_n db$ и $da = bc$. Значит,

$$\begin{aligned} n(d)a &= \bar{d}(da) = -d(bc), \\ n(d)a &= -\tfrac{1}{\gamma_n} n(c)a = -\tfrac{1}{\gamma_n}(ac)\bar{c} = \tfrac{1}{\gamma_n}(\gamma_n db)c = (db)c, \\ n(c)b &= (bc)\bar{c} = -(da)c, \\ n(c)b &= -\gamma_n n(d)b = -\bar{d}(\gamma_n db) = d(ac). \end{aligned}$$

Применяя инволюцию к левой и правой частям каждого равенства, получаем $n(d)a = -(cb)d = c(bd)$ и $n(c)b = -c(ad) = (ca)d$. Отсюда $[c, a, d] = 2n(c)b$, $[c, b, d] = -2n(d)a$ и $\{c, a, d\} = \{c, b, d\} = 0$, что доказывает также пункт (4).

(5) Аналогично доказательству леммы 4.21, рассмотрим кососимметрический линейный оператор $S : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$, задаваемый формулой $S(x) = [c, x, d]$ для всех $x \in \mathcal{A}_n$. Тогда $a \perp S(a) = [c, a, d] = 2n(c)b$, откуда $a \perp b$.

(6) Согласно пункту (1), $e_0 \in \operatorname{span}(a,b,c,d)^\perp$. Применим лемму 4.1(1) к элементам (a,b) и (c,d) со значением $\chi = \chi((c,d)) = -1$ и воспользуемся тем, что $\overline{ac} = \bar{c}\bar{a} = ca$. Тогда $(c,d)(ca,da) = 0$ и, по лемме 5.1(4), $t(ca) = t(da) = 0$. Из предложения 2.10 вытекает, что $\langle a,c\rangle = -\langle a,\bar{c}\rangle = -\frac{1}{2}t(ca) = 0$ и, аналогично, $\langle a,d\rangle = 0$, то есть $a \perp c$ и $a \perp d$. Пользуясь равенствами $ca = \gamma_n bd$ и $da = bc$, аналогично получаем, что $b \perp c$ и $b \perp d$.

Из леммы 2.18 следует, что элементы a, b антикоммутируют с элементами c, d. Тогда $ac = -ca$ и $ad = -da$, что сразу доказывает пункт (7). Остаётся заметить, что, по лемме 2.12(2),

$$\langle a, cd\rangle = \langle a\bar{d}, c\rangle = \langle da, c\rangle = \langle bc, c\rangle = \langle b, c\bar{c}\rangle = n(c)\langle b, e_0\rangle = 0,$$

$$\langle b, cd\rangle = \langle \bar{c}b, d\rangle = \langle bc, d\rangle = \langle da, d\rangle = \langle a, \bar{d}d\rangle = n(d)\langle a, e_0\rangle = 0,$$

откуда следует, что $a \perp cd$ и $b \perp cd$. □

Теперь мы обобщим некоторые результаты, полученные ранее для вещественных алгебр главной последовательности в п. 4.2 работы автора [22]. Отметим, что в ней была допущена неточность: имевшееся доказательство попарной ортогональности элементов a, b, c, d относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ использовало попарное строгое альтернирование элементов a, b, c, d, однако все утверждения были сформулированы лишь в предположении, что элементы a, b строго альтернируют с элементами c, d (см. [22, следствие 4.4, лемма 4.6]).

В утверждениях 5.7–5.10 и на рис. 2 мы предполагаем, что $\mathcal{A}_{n+1}$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, $(a,b), (c,d) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$, $(a,b)(c,d) = 0$, и элементы $a, b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{A}_n$, то есть $[x,x,y] = [y,y,x] = 0$ при $x \in \{a,b\}$ и $y \in \{c,d\}$.

Следствие 5.7. *В графе ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$ *существует следующий цикл длины* 6*:*

$$(a,b) \leftrightarrow (c,d) \leftrightarrow (ac,ad) \leftrightarrow (a,-b) \leftrightarrow (c,-d) \leftrightarrow (ac,-ad) \leftrightarrow (a,b).$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 4.8 для $\chi = \chi((c,d)) = -1$. По лемме 5.6(6), мы имеем $\overline{ac} = -ac$ и $da = -ad$. Наконец, из следствия 5.2 мы получаем, что ориентированные рёбра шестиугольника в $\Gamma_Z(\mathcal{A}_{n+1})$ соответствуют неориентированным рёбрам в $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$. □

Описание 5.8. Используя лемму 5.1(5) и следствие 5.7, мы получаем подграф $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$, который мы называем *двойным шестиугольником.* Он изображён на рис. 2. Двойной шестиугольник состоит из шести склеенных вместе полных двудольных графов $K_{2,2}$. Отметим, что он содержит в себе все шестиугольники, изображённые на рис. 1.

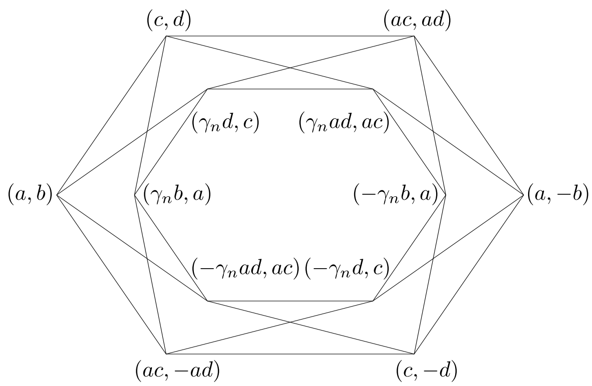

Рис. 2. Двойной шестиугольник.

Лемма 5.9.

(1) *Элементы* e_0, a, b, c, d *ортогональны относительно* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
(2) *Элементы* e_0, a, b, c, d, ac, ad *ортогональны относительно* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Доказательство.

(1) Утверждение следует из леммы 5.6(5–6), применённой к парам элементов $(a, b)(c, d) = 0$ и $(c, d)(a, b) = 0$.
(2) Согласно лемме 4.7, элементы ac, ad строго альтернируют с элементами a, b, c, d. По следствию 5.7, $(a, b)(c, d) = (c, d)(ac, ad) = (ac, ad)(a, -b) = 0$. Остаётся трижды воспользоваться пунктом (1). □

Следствие 5.10. *Все элементы в вершинах двойного шестиугольника на рис.* 2 *линейно независимы.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из леммы 5.9(2), так как, по лемме 3.1, $n(ac) = n(a)n(c) \neq 0$ и $n(ad) = n(a)n(d) \neq 0$. □

Объединяя результаты лемм 4.7 и 5.9(2), следствий 5.7 и 5.10, а также описания 5.8, мы получаем следующую теорему.

Теорема 5.11. *Пусть $\mathcal{A}_{n+1}$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой, элементы $a, b \in \mathcal{A}_n$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{A}_n$, $(a,b),(c,d) \in Z(\mathcal{A}_{n+1})$, $(a,b)(c,d) = 0$. Тогда*

(1) *элементы ac, ad строго альтернируют с элементами a, b, c, d;*
(2) *элементы e_0, a, b, c, d, ac, ad ортогональны относительно $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$;*
(3) *существует подграф $\Gamma_O(\mathcal{A}_{n+1})$, изображённый на рис. 2 и называемый двойным шестиугольником;*
(4) *все элементы в вершинах двойного шестиугольника линейно независимы.*

В [22, теорема 4.11] была также получена таблица умножения вершин двойного шестиугольника в том случае, когда $\mathcal{A}_{n+1}$ – вещественная алгебра главной последовательности $\mathcal{M}_{n+1}$. Этот результат можно обобщить и на случай произвольной алгебры Кэли–Диксона с анизотропной нормой, однако новая таблица умножения будет зависеть от параметров $n(a)$, $n(c)$ и γ_n. Если же $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{M}_{n+1}$, то $\gamma_n = -1$, и без ограничения общности можно считать, что $n(a) = n(c) = 1$, поэтому все коэффициенты в таблице умножения вершин двойного шестиугольника [22, стр. 677, таблица 1] постоянны.

§6. Размерности аннуляторов

В этом разделе мы переносим доказательство теоремы 9.8 из работы Бисса, Даггера и Исаксена [8], согласно которой размерность аннулятора любого элемента вещественной алгебры главной последовательности кратна четырём, на случай произвольной алгебры Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n$ с анизотропной нормой над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Но сперва мы покажем, что это утверждение может не выполняться для алгебр Кэли–Диксона с изотропной нормой. Напомним, что, по лемме 4.15, для любого $a \in \mathcal{A}_n$ выполнено $\dim(l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a)) = \dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}}(a))$.

Лемма 6.1. *Пусть $n \geqslant 1$, $a \in \mathcal{A}_n$, $t(a) = 0$. Тогда $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a))$ чётна.*

Доказательство. В силу $t(a) = 0$, по лемме 2.12(2) имеем $\langle L_a(b), c\rangle = \langle ab, c\rangle = \langle b, \bar{a}c\rangle = -\langle b, L_a(c)\rangle$ для всех $b, c \in \mathcal{A}_n$, то есть L_a – кососимметрический линейный оператор относительно невырожденной симметрической билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Так как $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, отсюда следует, что ранг L_a чётен. При этом $\dim\mathcal{A}_n = 2^n$ чётна, поэтому $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a)) = \dim(\operatorname{Ker} L_a)$ также чётна. $\square$

Предложение 6.2 ([3, лемма 4.18], [5, следствие 4.5]). *Пусть* $\mathcal{A}_n$ *– вещественная контр-алгебра малой размерности, то есть* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_n = \mathcal{H}_n$ *и* $1 \leqslant n \leqslant 4$, *и пусть также* $a \in \mathcal{A}_n$.

(1) *Если* $1 \leqslant n \leqslant 3$, *то* $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a)) \in \{0, 2^{n-1}, 2^n\}$.

(2) *Если* $n = 4$, *то* $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a)) \in \{0, 4, 8, 16\}$.

Таким образом, при $n \in \{3, 4\}$ $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a))$ *кратна четырём.*

Примеры ниже показывают, что при $n \geqslant 4$ в $\mathcal{A}_n$ могут существовать такие дважды альтернативные чисто мнимые элементы, что размерность их аннуляторов чётна, но не кратна четырём.

Пример 6.3 ([3, пример 4.17]). Пусть $n \geqslant 4$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_n = \mathcal{H}_{n-1}\{1\}$. Рассмотрим $a = e_1^{(n-2)} \in \mathcal{M}_{n-2}$. Тогда, согласно [3, лемма 4.16], элемент $A = (2a + \widetilde{a}, a) \in \mathcal{A}_n$ чисто мнимый и дважды альтернативный. Однако $n(a) = 1$ и $n(2a+\widetilde{a}) = 3$, поэтому $\chi(A) = \gamma_{n-1}\frac{n(a)}{n(2a+\widetilde{a})} = \frac{1}{3} \neq \pm 1$, а значит, A не удовлетворяет условию $(*)$. Кроме того, из теоремы 3.9 и леммы 4.19 можно получить, что

$$r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(A) = \left\{(c, -c) \,\middle|\, c = (x, -x),\ x \in \operatorname{span}(e_0, a)^{\perp} \subseteq \mathcal{M}_{n-2}\right\}.$$

Следовательно, $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(A)) = \dim(\operatorname{span}(e_0, a)^{\perp}) = 2^{n-2} - 2$ чётна, но не кратна четырём.

Пример 6.4. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_4 = \mathcal{H}_3\{1\}$. Рассмотрим $a = e_2 + e_5 + e_6$, $b = e_0 + e_1 + e_5 \in \mathcal{H}_3$. Так как $\mathcal{H}_3$ альтернативна, элемент $(a, b) \in \mathcal{A}_4$ чисто мнимый и дважды альтернативный. Кроме того, $n(b) = -n(a) = 1$, поэтому $\chi((a, b)) = \gamma_{n-1}\frac{n(b)}{n(a)} = -1$, то есть (a, b) удовлетворяет условию $(*)$. Однако

$$\begin{aligned} r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_4}((a, b)) = \operatorname{span}\big(&(-e_2 + e_3 - e_6 - e_7, e_2 + e_3 + e_6 - e_7), \\ &(e_1 + e_2 + 2e_3 - 2e_4 + e_5 - e_7, e_1 - 3e_3 + 2e_4 + e_5 - e_6 + 2e_7)\big). \end{aligned}$$

Значит, $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_4}((a, b))) = 2$ чётна, но не кратна четырём.

Следующий пример показывает, что если элемент алгебры $\mathcal{A}_n$ не является чисто мнимым, то при достаточно больших n размерность его аннулятора может быть нечётной.

Пример 6.5. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_5 = \mathcal{H}_5 = \mathcal{M}_4\{-1\}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} a = {} & e_0 - e_1 + 2e_2 + 2e_5 - e_6 + 2e_7 \\ & + e_9 - e_{10} - e_{11} - 2e_{12} - 2e_{13} - 2e_{14} - 2e_{15}, \end{aligned}$$

$$b = -e_0 - 2e_1 + e_2 - 2e_3 - 2e_4 - 2e_6 + 2e_7 \\ + e_9 - 2e_{10} + 2e_{11} + e_{12} + e_{13} - e_{15} \in \mathcal{M}_4.$$

Можно проверить, что в этом случае $\dim(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}_5}((a,b))) = 3$ нечётна.

Пусть теперь $\mathcal{A}_n$ – алгебра Кэли–Диксона с анизотропной нормой над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$. Напомним, что, по лемме 5.1(2), в этом случае для любого $a \in \mathcal{A}_n$ выполнено $l.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a) = r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a) = O_{\mathcal{A}_n}(a)$.

Лемма 6.6. *Пусть* $n \geqslant 1$. *Обозначим* $\mathbb{K} = \operatorname{span}(e_0, \widetilde{e}_0)$. *Тогда*

(1) $\mathbb{K}$ – *поле;*
(2) $\mathcal{A}_n$ – *левое векторное пространство над* $\mathbb{K}$.

Доказательство.

(1) Так как $(\widetilde{e}_0)^2 = \gamma_{n-1}$, множество $\mathbb{K}$ замкнуто относительно сложения и умножения, то есть является подалгеброй в $\mathcal{A}_n$. Кроме того, умножение на $\mathbb{K}$ коммутативно и ассоциативно. Поскольку норма на $\mathcal{A}_n$ анизотропна, её ограничение на $\mathbb{K}$ также анизотропно, поэтому $\mathbb{K}$ не содержит делителей нуля. Значит, $\mathbb{K}$ – поле.
(2) Требуется показать, что $[k_1, k_2, a] = 0$ для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ и $a \in \mathcal{A}_n$. Это равносильно выполнению равенства $[\widetilde{e}_0, \widetilde{e}_0, a] = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}_n$, то есть альтернативности элемента $\widetilde{e}_0$. Но $\widetilde{e}_0 = (0, e_0)$ – один из элементов стандартного базиса, а значит, альтернативен по [21, лемма 4]. □

По лемме 2.12(2), $\langle a, b\rangle = \langle a\bar{b}, e_0\rangle$, то есть $\langle a, b\rangle$ – ортогональная проекция $a\bar{b}$ на $\mathbb{F}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пользуясь этим наблюдением, можно задать эрмитово скалярное произведение на $\mathcal{A}_n$ со значениями в поле $\mathbb{K}$.

Обозначение 6.7. Для элементов $a, b \in \mathcal{A}_n$ через $\langle a, b\rangle_{\mathbb{K}}$ обозначим ортогональную проекцию $a\bar{b}$ на $\mathbb{K}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 6.8.

(1) *Для любых* $a, b \in \mathcal{A}_n$ *выполнено* $\langle a, b\rangle_{\mathbb{K}} = \langle a, b\rangle + \frac{1}{\gamma_{n-1}}\langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle \widetilde{e}_0$.
(2) $\langle a, b\rangle_{\mathbb{K}}$ – *невырожденное эрмитово скалярное произведение, то есть анизотропная эрмитова полуторалинейная форма.*

Доказательство.

(1) По лемме 2.12(2), $\langle a\bar{b}, e_0\rangle = \langle a, b\rangle$ и $\langle a\bar{b}, \widetilde{e}_0\rangle = \langle a, \widetilde{e}_0 b\rangle = -\langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle$. Так как $e_0 \perp \widetilde{e}_0$, $n(e_0) = 1$ и $n(\widetilde{e}_0) = -\gamma_{n-1}$, имеем

$$\langle a, b\rangle_{\mathbb{K}} = \frac{\langle a\bar{b}, e_0\rangle}{n(e_0)} e_0 + \frac{\langle a\bar{b}, \widetilde{e}_0\rangle}{n(\widetilde{e}_0)} \widetilde{e}_0 = \langle a, b\rangle + \frac{\langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle}{\gamma_{n-1}} \widetilde{e}_0.$$

(2) Аддитивность по обоим аргументам очевидна. Покажем, что $\langle ka, b\rangle_{\mathbb{K}} = k\langle a, b\rangle_{\mathbb{K}}$ для всех $k \in \mathbb{K}$ и $a, b \in \mathcal{A}_n$. В силу линейности по $\mathbb{F}$, достаточно доказать это утверждение для $k = e_0$ и $k = \widetilde{e}_0$. Первый случай очевиден, тогда как во втором случае мы получаем

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle_{\mathbb{K}} &= \langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle + \frac{\langle \widetilde{e}_0(\widetilde{e}_0 a), b\rangle}{\gamma_{n-1}} \widetilde{e}_0 = \langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle + \frac{\langle (\widetilde{e}_0)^2 a, b\rangle}{\gamma_{n-1}} \widetilde{e}_0 \\ &= \langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle + \langle a, b\rangle \widetilde{e}_0 = \langle a, b\rangle \widetilde{e}_0 + \frac{\langle \widetilde{e}_0 a, b\rangle}{\gamma_{n-1}} (\widetilde{e}_0)^2 = \widetilde{e}_0 \langle a, b\rangle_{\mathbb{K}}.\end{aligned}$$

Кроме того, из равенства $a\bar{b} = \overline{b\bar{a}}$ следует, что $\langle a, b\rangle_{\mathbb{K}} = \overline{\langle b, a\rangle_{\mathbb{K}}}$. Анизотропность $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{K}}$ вытекает из того, что $a\bar{a} = n(a) \in \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, поэтому $\langle a, a\rangle_{\mathbb{K}} = n(a)$ для всех $a \in \mathcal{A}_n$. □

Лемма 6.9. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$ – дважды чисто мнимый элемент. Тогда L_a – сопряжённо-линейное косоэрмитово отображение в том смысле, что*

(1) $L_a(b + c) = L_a(b) + L_a(c)$,
(2) $L_a(kb) = \bar{k} L_a(b)$,
(3) $\langle L_a(b), c\rangle_{\mathbb{K}} = -\overline{\langle b, L_a(c)\rangle_{\mathbb{K}}}$

для всех $k \in \mathbb{K}$, $b, c \in \mathcal{A}_n$.

Доказательство.

(1) Аддитивность L_a очевидна.
(2) В силу линейности по $\mathbb{F}$, достаточно рассмотреть случаи $k = e_0$ и $k = \widetilde{e}_0$. Первый случай очевиден, тогда как во втором случае требуется доказать, что $a(\widetilde{e}_0 b) = -\widetilde{e}_0(ab)$. Применяя инволюцию к левой и правой частям требуемого равенства и пользуясь тем, что a чисто мнимый, мы получаем, что оно равносильно соотношению $(\bar{b}\widetilde{e}_0)a = -(\bar{b}a)\widetilde{e}_0$. Но, так как a дважды чисто мнимый, по лемме 3.2(2) имеем $\widetilde{\bar{b}}a = -\widetilde{\bar{b}a}$, что и требовалось доказать.

(3) Пользуясь леммами 2.12(2) и 6.8(1), а также пунктом (2), мы выводим:

$$\begin{aligned}\langle L_a(b), c\rangle_{\mathbb{K}} = \langle ab, c\rangle_{\mathbb{K}} = \langle ab, c\rangle + \frac{\langle \widetilde{e}_0(ab), c\rangle}{\gamma_{n-1}}\widetilde{e}_0 = \langle b, \bar{a}c\rangle + \frac{\langle b, \bar{a}(\overline{\widetilde{e}_0}c)\rangle}{\gamma_{n-1}}\widetilde{e}_0 \\ = -\langle b, ac\rangle + \frac{\langle b, a(\widetilde{e}_0c)\rangle}{\gamma_{n-1}}\widetilde{e}_0 = -\langle b, ac\rangle + \frac{\langle b, -\widetilde{e}_0(ac)\rangle}{\gamma_{n-1}}\widetilde{e}_0 \\ = -\langle b, ac\rangle + \frac{\langle \widetilde{e}_0b, (ac)\rangle}{\gamma_{n-1}}\widetilde{e}_0 = -\overline{\langle b, ac\rangle_{\mathbb{K}}} = -\overline{\langle b, L_a(c)\rangle_{\mathbb{K}}}. \qquad \square\end{aligned}$$

В работе [8] следующая лемма сформулирована только для поля комплексных чисел, однако её доказательство дословно переносится на случай произвольного поля $\mathbb{K}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, с инволюцией $a \mapsto a^*$.

Лемма 6.10 ([8, лемма 6.7]). *Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{K}$ с невырожденным эрмитовым скалярным произведением и пусть L – сопряжённо-линейный косоэрмитов эндоморфизм V. Тогда $\mathbb{K}$-коразмерность $\operatorname{Ker} L$ в V чётна.*

Теорема 6.11. *Пусть $n \geqslant 2$, $a \in \mathcal{A}_n$. Тогда $\dim_{\mathbb{F}}(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a))$ кратна четырём.*

Доказательство. Если $a = 0$, то $\dim_{\mathbb{F}}(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a)) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_n) = 2^n$ кратна четырём, а если $a \neq 0$ и $a \notin Z(\mathcal{A}_n)$, то $\dim_{\mathbb{F}}(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a)) = 0$ тоже кратна четырём. Теперь рассмотрим случай, когда $a \in Z(\mathcal{A}_n)$. По лемме 5.1(4), элемент a является дважды чисто мнимым. Значит, по лемме 6.9, L_a – сопряжённо-линейное косоэрмитово отображение. Из леммы 6.10 следует, что $\operatorname{codim}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_a$ чётна. Так как $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_n = 2^{n-1}$ чётна, это означает, что $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_a$ также чётна. Следовательно, $\dim_{\mathbb{F}}(r.\operatorname{Ann}_{\mathcal{A}_n}(a)) = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} L_a = 2\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_a$ кратна четырём. $\square$

Некоторые другие результаты о размерностях аннуляторов, полученные в работах [8, 9] для вещественных алгебр главной последовательности, также можно обобщить на случай произвольных алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой. В частности, это справедливо для леммы 8.4, предложения 8.11 и теоремы 13.2 из работы [8]. Отметим, что в случае произвольных алгебр Кэли–Диксона с анизотропной нормой определение 3.1 элемента $\{a, b\} \in \mathcal{A}_{n+1}$ из работы [9] изменится следующим образом: множитель $\frac{1}{\sqrt{2}}$ исчезнет, а в первой компоненте элемента $\{a, b\}$ появится множитель γ_n.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения.

Список литературы

1. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 44–75.
2. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Графы отношений алгебры седенионов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 61–86.
3. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Контр-алгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений.* — Фунд. прикл. мат. **23**, No. 3 (2020), 95–129.
4. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, М., Наука (1978).
5. С. А. Жилина, *Графы отношений алгебры контрседенионов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 87–113.
6. J. C. Baez, *The octonions.* — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2001), 145–205.
7. L. Bentz, D. Tray, *Subalgebras of the split octonions.* — Adv. Appl. Clifford Alg. **28**, No. 2 (2018), 40.
8. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley-–Dickson algebras.* — Comm. Algebra **36**, No. 2 (2008), 632–664.
9. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley–Dickson algebras* II. — Bol. Soc. Mat. Mex. **13**, No. 2 (2007), 269–292.
10. G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar, *Characterization of orthomaps on the Cayley plane.* — Aeq. Math. **92**, No. 2 (2018), 243–265.
11. G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar, *The orthogonality relation classifies formally real simple Jordan algebras.* — Comm. Algebra **48**, No. 6 (2020), 2274–2292.
12. P. Eakin, A. Sathaye, *On automorphisms and derivations of Cayley–Dickson algebras.* — J. Algebra **129**, No. 2 (1990), 263–278.
13. N. Jacobson, *Composition algebras and their automorphisms.* — Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55–80.
14. B. Kuzma, *Dimensions of complex Hilbert spaces are determined by the commutativity relation.* — J. Operator Theory **79**, No. 1 (2018), 201–211.
15. K. McCrimmon, *A taste of Jordan algebras*, New York, Springer-Verlag (2004).
16. G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers.* — Bol. Soc. Mat. Mex. (tercera ser.) **4**, No. 1 (1998), 13–28.
17. G. Moreno, *Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras.* — Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebañski, Hackensack, NJ, World Sci. Publ. (2006), 333–346.
18. G. Moreno, *Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley–Dickson algebras*, `arXiv:math/0512517` (2005).
19. R. Moufang, *Zur Structur von Alternativekörpern.* — Math. Ann. **110** (1935), 416–430.
20. A. Pixton, *Alternators in the Cayley–Dickson algebras.* — Forum Math. **21**, No. 5 (2009), 853–869.

21. R. D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley–Dickson process.* — Amer. J. Math. **76**, No. 2 (1954), 435–446.
22. S. Zhilina, *Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part* I: *Doubly alternative zero divisors and their hexagons.* — Int. J. Algebra Comput. **31**, No. 4 (2021), 663–689.
23. S. Zhilina, *Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part* II: *The subgraph on pairs of basis elements.* — Int. J. Algebra Comput. **31**, No. 4 (2021), 691–725.

Zhilina S. A. Doubly alternative zero divisors in Cayley–Dickson algebras.

Zero divisors of Cayley–Dickson algebras over an arbitrary field $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, are studied. It is shown that the zero divisors whose components alternate strongly pairwise and have nonzero norm form hexagonal structures in the zero divisor graph of a Cayley–Dickson algebra. Properties of doubly alternative zero divisors at least one of whose components has nonzero norm are established, and explicit forms of their annihilators, othogonalizers, and centralizers are obtained. Properties of zero divisors in Cayley–Dickson algebras with anisotropic norm are described, and it is shown that in this case directed hexagons in the zero divisor graph can be extended to undirected double hexagons in the orthogonality graph. A criterion of C-equivalence for elements of Cayley–Dickson algebras with anisotropic norm is obtained. Possible values of dimension for annihilators of elements of Cayley–Dickson algebras are considered.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия;
Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, 141701, Россия
E-mail: s.a.zhilina@gmail.com

Поступило 4 октября 2022 г.