Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 514, 2022 г.

**Ю. А. Альпин, А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев**

# ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ЦЕПНОГО ИНДЕКСА

## §1. Введение

Пусть $M_n$ обозначает множество вещественных неотрицательных матриц порядка $n$, а $M_n(0,1)$ – его подмножество, состоящее из матриц с коэффициентами из множества $\{0,1\}$. Основным предметом рассмотрения в работе являются цепные матрицы и их характеристики.

**Определение 1.1.** Матрица $A = (a_{ik}) \in M_n$, не имеющая нулевых строк и столбцов, называется *цепной*, если для каждой пары ее положительных элементов $a_{ik}$, $a_{pq}$ существует последовательность положительных элементов $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_nk_n}$, удовлетворяющая следующим условиям:
a) $i_1 = i,\ k_1 = k$;
b) $i_n = p,\ k_n = q$;
c) для каждого $l \in \{1, 2, ..., n-1\}$ справедливо $i_l = i_{l+1}$ или $k_l = k_{l+1}$.

Проиллюстрируем это определение следующим образом. Представим, что элементы матрицы – это клетки шахматной доски и ладье разрешено ходить только по положительным элементам. Матрица является цепной, если ладья может добраться от любой положительной клетки до любой другой.

Цепные матрицы были впервые рассмотрены в [4], где изучалась их структура и алгебраические свойства, и [5], где они использовались для исследования свойств стохастических матриц. Позже структура и свойства цепных матриц исследовались в ряде публикаций, см., например, работы [1] и [2] и цитированную в них литературу.

**Определение 1.2.** Пусть $A \in M_n$ и существует такое число $k \in \mathbb{N}$, что матрица $A^k$ является цепной. Тогда $A$ называется *потенциально*

---

*Ключевые слова*: неотрицательные матрицы, цепные матрицы, цепной индекс, цепной ранг.

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение No. 075-02-2022-882). Работа второго автора поддержана ERC грантом 101039692.

*цепной.* Наименьшее $k$, для которого $A^k$ – цепная матрица, называется *цепным индексом* $A$ и обозначается через $\mathrm{CI}(A)$. Если $A$ не является потенциально цепной, то полагаем $\mathrm{CI}(A) = 0$.

Понятия цепного индекса и потенциально цепной матрицы были введены в [1] как естественно возникающие из свойств цепных матриц.

В работе [1] было высказано предположение, что для любой матрицы $A \in M_n$ справедливо $\mathrm{CI}(A) \leqslant n - 1$, и установлено, что для любого $n$ существует матрица, цепной индекс которой равен $n-1$. Основным результатом настоящей заметки является доказательство этой гипотезы.

Для доказательства нам понадобится соответствие между матрицами и графами.

Пусть $D = (V, E)$ обозначает ориентированный граф с множествами вершин $V = V(D)$ и ребер $E = E(D)$ без кратных ориентированных ребер, но, возможно, с петлями. Пусть $u, v \in V$ – вершины графа $V$. Ориентированный путь из $u$ в $v$ представляет собой последовательность вершин и направленных ребер $u$,$(u, w_1)$, $w_1$,$(w_1, w_2)$,$w_2, \dots$,$w_l$,$(w_l, v)$, $v$, причем вершины и ребра не обязательно различны. Длиной пути называется число входящих в него ребер. Выражение $u \xrightarrow{t} v$ обозначает, что существует ориентированный путь длины $t$ из вершины $u$ в вершину $v$. В том случае, когда $u$ и $v$ соединены направленным ребром, будем использовать обозначение $u \to v$ вместо $u \xrightarrow{1} v$. Мы рассматриваем множество $\mathcal{P}$ графов, каждая вершина которых имеет хотя бы одно входящее и хотя бы одно исходящее ребро.

Каждой матрице $A = (a_{ij}) \in M_n$ ставится в соответствие ориентированный граф $D = D(A)$ с $n$ вершинами $V(D) = \{1, \dots, n\}$ и множеством ребер, определенным правилом: $v_i \to v_j$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$. Каждому ориентированному графу $D = (V, E)$ ставится в соответствие матрица смежности $B(D) = (b_{ij}) \in M_n(0, 1)$, где $b_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $v_i \to v_j$, а остальные коэффициенты равны нулю. Заметим, что граф $D$ содержится в $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда его матрица смежности не имеет нулевых строк и нулевых столбцов. Если $A \in M_n(0, 1)$, то $B(D(A)) = A$.

Данная заметка построена следующим образом. В §2 введено отношение пересечения $\wedge$ на множестве строк матрицы (вершин графа), исследованы его свойства и переформулировано понятие цепного индекса в этих терминах. В §3 мы доказываем, что если последовательность цепных рангов стабилизировалась по крайней мере один раз, то

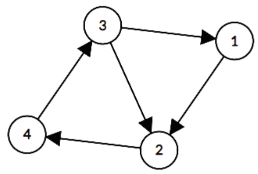


Рис. 1. Граф $D_1$, иллюстрирующий отношения $\wedge$ и $\vee$.

ее рост прекращается, и как следствие получено доказательство основной гипотезы. §4 посвящен исследованию цепного индекса серии графов $W_{n,i}$, обобщающих классический граф Виландта. Вычисленные значения цепного индекса этой серии графов показывают, что цепной индекс может принимать все свои допустимые значения.

## §2. Отношение $\wedge$ и граф пересечений

Сформулируем ряд вспомогательных определений и утверждений, которые потребуются в дальнейшем для доказательства основного результата.

**Определение 2.1.** Пусть $D$ – ориентированный граф, $u, v \in V(D)$, $k \in \mathbb{N}$. Вершины $u$, $v$ *пересекаются в степени* $k$, если существует такая вершина $w \in V(D)$, что $u \xrightarrow{k} w$ и $v \xrightarrow{k} w$. Обозначение: $u \wedge^k v$. Вершина $w$ называется вершиной, по которой вершины $u$, $v$ пересекаются в степени $k$.

Следующий пример иллюстрирует введенное отношение.

**Пример 2.2.** Рассмотрим граф $D_1$, изображенный на рис. 1. Тогда, по определению, имеем: $1 \wedge 3$, $1 \wedge^2 3$, $1 \wedge^3 3$, $3 \wedge^2 4$, $3 \wedge^3 4$, $2 \wedge^3 4$.

Установим некоторые свойства отношения $\wedge^k$.

**Лемма 2.3.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда бинарное отношение $u \wedge^t v$ на множестве вершин графа $D$ симметрично и рефлексивно для любого $t \in \mathbb{N}$.*

**Доказательство.** Симметричность выполняется по определению. Рефлексивность следует из условия $D \in \mathcal{P}$, поскольку из каждой вершины можно построить ориентированный путь любой заданной длины. $\square$

**Обозначение 2.4.** Пусть $D \in \mathcal{P}$ и $u, v \in V(D)$ – его вершины. Будем писать $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$, если существуют вершины $w_1, \dots, w_m \in V(D)$, для которых $u \wedge^k w_1, w_1 \wedge^k w_2, \dots, w_m \wedge^k v$. Если необходимо указать промежуточные вершины, будем использовать обозначение

$$u \wedge^k w_1 \wedge^k w_2 \wedge^k \cdots \wedge^k w_m \wedge^k v.$$

Как и ранее, в случае $k = 1$ будем писать $u \wedge \cdots \wedge v$.

**Определение 2.5.** Цепным индексом $\mathrm{CI}(D)$ графа $D$ называется наименьшее из таких чисел $k \in \mathbb{N}$, что для любых вершин $u, v \in V(D)$ справедливо $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$. Если такого $k$ не существует, то цепной индекс считается равным нулю.

Проверим, что цепной индекс графа совпадает с цепным индексом его матрицы смежности, введенным в определении 1.2. Для этого нам потребуются следующие понятия.

**Определение 2.6.** Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$. Будем говорить, что строки матрицы $A$ с номерами $i$ и $j$ *пересекаются*, если существует такой индекс $l$, что $a_{il} \neq 0$ и $a_{jl} \neq 0$, т.е. в этих строках имеются положительные элементы в некотором общем столбце.

На языке графов это определение переформулируется следующим образом: две вершины пересекаются, если существуют два ребра с началом в этих вершинах и общим концом.

**Лемма 2.7.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$, $A = A(D) \in M_n(0,1)$ – матрица смежности графа $D$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда вершины $u, v \in \{1, \dots, n\}$ пересекаются в степени $k$, $u \wedge^k v$, тогда и только тогда, когда строки матрицы $A^k$ с индексами $u$, $v$ пересекаются.*

**Доказательство.** В силу [3, стр. 223], условие $u \wedge^k v$ эквивалентно тому, что существует такая вершина $w$, что в графе матрицы $A^k$ найдутся ребра $u \to w$ и $v \to w$, а это равносильно тому, что в матрице $A^k$ строки с индексами $u$ и $v$ пересекаются по столбцу с индексом $w$. □

**Лемма 2.8.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$, $A = A(D) \in M_n(0,1)$ – матрица смежности графа $D$. Тогда $\mathrm{CI}(D) = \mathrm{CI}(A)$, т.е. цепной индекс графа равняется цепному индексу его матрицы смежности.*

**Доказательство.** Утверждение следует из леммы 2.7. □

Выведем еще несколько свойств отношения пересечения, необходимых для дальнейшего.

**Лемма 2.9.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{N}$, $u, v \in V(D)$ и пусть вершины $u, v$ пересекаются в степени $k$. Тогда для любого $t > k$ вершины $u, v$ пересекаются в степени $t$.*

**Доказательство.** Обозначим через $w$ вершину, по которой $u$ и $v$ пересекаются в степени $k$. Поскольку $D \in \mathcal{P}$, существует такая вершина $w' \in V(D)$, что $w \xrightarrow{t-k} w'$. Тогда $u \xrightarrow{t} w'$ и $v \xrightarrow{t} w'$, т.е. $u \wedge^t v$. □

**Лемма 2.10.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда отношение $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ является отношением эквивалентности на множестве $V(D)$.*

**Доказательство.** Симметричность следует из симметричности отношения $\wedge^t$, см. лемму 2.3. Рефлексивность следует из того, что для любой вершины $u \in V(D)$ найдется такая $u' \in V(D)$, что $u \to u'$. Транзитивность непосредственно следует из определения отношения $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$. □

Напомним, что обозначение $u \wedge \cdots \wedge v$ используется вместо $u \wedge^1 \cdots \wedge^1 v$.

**Определение 2.11.** Классы эквивалентности по отношению $u \wedge \cdots \wedge v$ обозначим через $\widehat{\pi}_1, \widehat{\pi}_2, \ldots, \widehat{\pi}_i$. Количество $i$ этих классов называется *цепным рангом* графа и обозначается через $\operatorname{crk} D$.

**Определение 2.12.** Пусть $D$ – граф, $t \in \mathbb{N}$. Определим граф $D^t$ как граф с тем же множеством вершин, что и $D$, в котором вершины $u$ и $v$ соединены ребром тогда и только тогда, когда в $D$ существует путь длины $t$ из $u$ в $v$.

**Замечание 2.13.** Широко известен (и легко проверяется по индукции) следующий факт: если $A = A(D)$ – матрица смежности графа $D$, то матрица $B(D(A^k))$ является матрицей смежности введенного графа $D^k$.

**Лемма 2.14.** *Пусть $D$ – граф, $t \in \mathbb{N}$. Тогда классы $\widehat{\pi}_i$ на множестве вершин графа $D^t$ совпадают с классами эквивалентности по отношению $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ на множестве вершин графа $D$.*

**Доказательство.** По определению, $u \to v$ в $D^t$ тогда и только тогда, когда $u \xrightarrow{t} v$ в $D$. Следовательно, $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ в $D$ тогда и только тогда, когда $u \wedge \cdots \wedge v$ в $D^t$. □

Цепной ранг и рассматриваемые классы эквивалентности были введены на матричном языке в работе [1]. Там же для матриц были установлены следующие факты, которые мы переформулируем и, для полноты изложения, устанавливаем на языке графов.

**Лемма 2.15.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$. Тогда*

1) *для любого $k \in \mathbb{N}$ каждый класс эквивалентности $\widehat{\pi}_i$ на множестве вершин графа $D^k$ содержится в одном из классов эквивалентности на множестве вершин графа $D^{k+1}$;*
2) *для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство* $\operatorname{crk} D^k \geqslant \operatorname{crk} D^{k+1}$;
3) $\operatorname{crk} D = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{CI}(D) = 1$.

**Доказательство.** 1) По лемме 2.9, для любой пары вершин $u, v \in V(D)$ из $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$ следует $u \wedge^{k+1} \cdots \wedge^{k+1} v$. Поэтому для каждого класса $\widehat{\pi}_i$ на множестве вершин графа $D^k$ найдется такой класс $\widehat{\pi}'_i$ на множестве вершин графа $D^{k+1}$, что $\widehat{\pi}_i \subseteq \widehat{\pi}'_i$.

Утверждение 2) непосредственно следует из п. 1).

Утверждение 3) непосредственно следует из определений цепного ранга и цепного индекса. □

Проиллюстрируем введенные понятия цепного ранга и классов эквивалентности по отношению пересечения на следующем примере.

**Пример 2.16.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Заметим, что $\widehat{\pi}_1(A) = \{1, 4\}$, $\widehat{\pi}_2(A) = \{2, 3\}$, $\widehat{\pi}_1(A^2) = \{1, 2, 3, 4\}$. Отсюда, $\operatorname{crk} A = 2$, $\operatorname{crk} A^2 = 1$.

**Лемма 2.17.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{N}$ и $u, v \in V(D)$. Если $\operatorname{crk} D^k = \operatorname{crk} D^{k+1}$, то $u \wedge^{k+1} \cdots \wedge^{k+1} v$ тогда и только тогда, когда $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$.*

**Доказательство.** Применяя лемму 2.9 к каждой паре вершин $w_j$, $w_{j+1}$ из определения отношения $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$, получим, что для любого графа $D \in \mathcal{P}$ условие $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$ влечет $u \wedge^{k+1} \cdots \wedge^{k+1} v$. Теперь докажем, что из отрицания второго условия следует отрицание первого.

Предположим, что существуют такие вершины $u, v \in V(D)$, что выполняется $u \wedge^{k+1} \cdots \wedge^{k+1} v$, но не выполняется $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$. Тогда вершины $u$ и $v$ лежат в разных классах $\widehat{\pi}_i, \widehat{\pi}_j$ на множестве вершин графа $D^k$, но в одном классе на множестве вершин графа $D^{k+1}$. По п. 1) леммы 2.15, отсюда вытекает, что $\operatorname{crk} D^k > \operatorname{crk} D^{k+1}$, что противоречит условию. $\square$

**Лемма 2.18.** *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in M_n$ не имеет нулевых строк и столбцов. Если $i$-я и $j$-я строки матрицы $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ пересекаются, то $i$-я и $j$-я строки матрицы $A^{k+1}$ также пересекаются.*

**Доказательство.** Пусть $i$-я и $j$-я строки матрицы $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ пересекаются по столбцу с номером $l$. Поскольку в $A$ нет нулевых столбцов, то существует такой индекс $m \in \{1, \dots, n\}$, что $a_{lm} \neq 0$. Тогда, по формуле элементов матричной степени, из $a_{il}^{(k)} > 0,\ a_{jl}^{(k)} > 0,\ a_{lm} > 0$ следует, что $a_{im}^{(k+1)} > 0,\ a_{jm}^{(k+1)} > 0$, т.е. $i$-я и $j$-я строки матрицы $A^{k+1}$ пересекаются по столбцу с номером $m$. $\square$

## §3. Верхняя оценка цепного индекса

Для доказательства основного результата нам потребуется граф пересечений, введенный в [1].

**Определение 3.1.** Пусть $A \in M_n$. Неориентированный граф $\Pi$ с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$ называется *графом пересечений* матрицы $A$, если вершины $i$ и $j$ соединены ребром тогда и только тогда, когда строки с номерами $i$ и $j$ пересекаются в матрице $A$.

Тогда выражение $u \wedge v$ означает, что вершины $u$ и $v$ смежны в графе пересечений матрицы $A$, а выражение $u \wedge \dots \wedge v$ означает, что вершины $u$ и $v$ соединяются путем в графе $\Pi$, т.е. лежат в одной связной компоненте этого графа.

**Лемма 3.2** ([1]). *Пусть $A \in M_n$. Тогда цепной ранг $\operatorname{crk} A$ равняется числу компонент связности графа $\Pi$.*

Обозначим граф пересечений матрицы $A^k$ через $\Pi^k$. Тогда для вершин $u, v \in V(D)$ отношение $u \wedge^k \dots \wedge^k v$ эквивалентно тому, что вершины $u$ и $v$ соединяются маршрутом в графе $\Pi^k$, т.е. лежат в одной связной компоненте этого графа. Из леммы 2.9 следует, что для любого натурального $k$ граф $\Pi^k$ является подграфом графа $\Pi^{k+1}$; это обозначается через $\Pi^k \subseteq \Pi^{k+1}$.

Итак, имеем последовательность

$$\Pi^1 \subseteq \Pi^2 \subseteq \ldots \subseteq \Pi^k \subseteq \Pi^{k+1} \subseteq \ldots. \tag{1}$$

Переформулируя лемму 2.15 на этом языке, заметим, что при переходе от $\Pi^k$ к $\Pi^{k+1}$ число рёбер может лишь увеличиться, а число компонент лишь уменьшиться. Следовательно,

$$\operatorname{crk} A \geqslant \operatorname{crk} A^2 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{crk} A^k \geqslant \operatorname{crk} A^{k+1} \geqslant \ldots . \tag{2}$$

Точнее, если каждое новое ребро графа $\Pi^{k+1}$ соединяет вершины из одной компоненты $\Pi^k$, то $\operatorname{crk} A^k = \operatorname{crk} A^{k+1}$, а если некоторое новое ребро графа $\Pi^{k+1}$ соединяет вершины из различных компонент $\Pi^k$, то $\operatorname{crk} A^k > \operatorname{crk} A^{k+1}$.

**Лемма 3.3.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$ и пусть $u, v \in V(D)$. Тогда $u \wedge^{k+1} v$ в том и только том случае, когда существуют вершины $w_1, w_2 \in V(D)$, такие что $u \to w_1$, $v \to w_2$, $w_1 \wedge^k w_2$.*

**Доказательство.** Импликация справа налево вытекает непосредственно из определения отношения $a \wedge^t b$.

Пусть теперь $u \wedge^{k+1} v$. Тогда, по определению, существуют такие $w_1, w_2, w \in V(D)$, что

$$u \to w_1,\ w_1 \xrightarrow{k} w \quad \text{и} \quad v \to w_2,\ w_2 \xrightarrow{k} w.$$

Отсюда следует требуемое утверждение. □

**Лемма 3.4.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$ и пусть $u, v \in V(D)$. Если существуют такие вершины $w_1, w_2 \in V(D)$, что $u \to w_1$, $v \to w_2$ и $w_1 \wedge^k \cdots \wedge^k w_2$, то $u \wedge^{k+1} \cdots \wedge^{k+1} v$.*

**Доказательство.** По условию, существуют вершины $p_1, \ldots, p_s \in V(D)$, такие что

$$w_1 \wedge^k p_1 \wedge^k \ \ldots\ \wedge^k p_s \wedge^k w_2.$$

Поскольку $D \in \mathcal{P}$, для найденных вершин $p_1, p_2, \ldots, p_s$ существуют такие вершины $q_1, q_2, \ldots, q_s \in V(D)$, что $q_t \to p_t$ для всех $t \in \{1, \ldots, s\}$. Обозначив $q_0 = u$, $p_0 = w_1$, $p_{s+1} = w_2$ и $q_{s+1} = v$, получим, что условия $q_t \to p_t$, $q_{t+1} \to p_{t+1}$, $p_t \wedge^k p_{t+1}$ выполняются для каждого $t \in \{0, \ldots, s\}$. Тогда, по лемме 3.3, для каждого $t \in \{0, \ldots, s\}$ имеем $q_t \wedge^{k+1} q_{t+1}$. Отсюда, по определению отношения $\wedge^{k+1} \ldots \wedge^{k+1}$, получаем, что $q_0 \wedge^{k+1} \ldots \wedge^{k+1} q_{s+1}$, т.е. $u \wedge^{k+1} \ldots \wedge^{k+1} v$. □

**Теорема 3.5.** *Пусть $A \in M_n$, $k \in \mathbb{N}$ – любое натуральное число. Если $\operatorname{crk} A^{k+1} = \operatorname{crk} A^k$, то $\operatorname{crk} A^{k+t} = \operatorname{crk} A^k$ для всех $t \in \mathbb{N}$.*

**Доказательство.** Ввиду произвольности выбора $k$, достаточно доказать, что $\operatorname{crk} A^{k+2} = \operatorname{crk} A^{k+1}$. Для любых вершин $u, v \in V(D(A))$ из $u \wedge^{k+2} v$ по лемме 3.3 следует, что существуют такие $w_1, w_2 \in V(D(A))$, что

$$u \to w_1,\ v \to w_2,\ w_1 \wedge^{k+1} w_2.$$

Из равенства $\operatorname{crk} A^{k+1} = \operatorname{crk} A^k$ следует, что вершины $w_1, w_2$ графа $\Pi^{k+2}$ лежат в одной компоненте графа $\Pi^{k+1}$, значит, $w_1 \wedge^k \cdots \wedge^k w_2$. Тогда, по лемме 3.4, $u \wedge^{k+1} \cdots \wedge^{k+1} v$.

Мы доказали, что смежные вершины графа $\Pi(A^{k+2})$ связаны маршрутом в графе $\Pi(A^{k+1})$, т.е. лежат в одной его компоненте. Это доказывает, что $\operatorname{crk} D^{k+2} = \operatorname{crk} D^{k+1}$. □

**Лемма 3.6** ([1, предложение 3.2])**.** *Для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ справедливо равенство* $\operatorname{crk} A = \operatorname{crk} A^T$, *где $A^T$ обозначает транспонированную матрицу $A$.*

**Лемма 3.7.** *Если матрица $A \in M_n(0,1)$ не имеет нулевых строк и столбцов, то* $\operatorname{crk} A = n$ *тогда и только тогда, когда $A$ – матрица перестановки, т.е. каждый столбец и каждая строка $A$ содержат ровно один ненулевой элемент.*

**Доказательство.** 1. Если $A$ – матрица перестановки, то, по определению, в каждом столбце $A$ есть ровно один положительный элемент, а значит никакие две строчки $A$ не пересекаются, так что $\operatorname{crk} A = n$.

2. Пусть теперь $A = (a_{ij}) \in M_n(0,1)$, $\operatorname{crk} A = n$ и $A$ содержит хотя бы по одному положительному элементу в каждой строке и в каждом столбце.

Если $A$ содержит два положительных элемента $a_{kl}, a_{ml}$ в каком-то столбце под номером $l$, то строки с номерами $k$ и $m$ пересекаются и $\operatorname{crk} A \leqslant n-1$.

Если же $A$ содержит два положительных элемента $a_{kl}, a_{km}$ в какой-то строке, то строки с номерами $l$ и $m$ пересекаются в матрице $A^T$, и $\operatorname{crk} A \leqslant n-1$ по лемме 3.6.

Поэтому $A$ имеет ровно один положительный элемент в каждой строке и каждом столбце и является матрицей перестановки. □

**Теорема 3.8.** *Пусть $A$ – матрица порядка $n \geqslant 2$ без нулевых строк и столбцов. Тогда* $\operatorname{CI}(A) \leqslant n-1$.

**Доказательство.** Пусть $\varkappa$ – наименьшее число, при котором $\operatorname{crk} A^{\varkappa+1} = \operatorname{crk} A^{\varkappa}$. Рассмотрим два случая.

1. $\varkappa = 1$, т.е. в последовательности (2) все нестрогие неравенства являются равенствами. Есть две возможности: а) $\operatorname{crk} A = 1$, тогда $\mathrm{CI}(A) = 1$; б) $\operatorname{crk} A > 1$, тогда $\mathrm{CI}(A) = 0$. В частности, если $A$ – матрица перестановки, то $\operatorname{crk} A^k = n$ $(k = 1, 2, \dots)$, следовательно, $\mathrm{CI}(A) = 0$.

Итак, при $\varkappa = 1$ утверждение теоремы верно.

2. $\varkappa \geqslant 2$. В этом случае, последовательность (2) выглядит так:

$$\operatorname{crk} A > \operatorname{crk} A^2 > \ldots > \operatorname{crk} A^{\varkappa} = \operatorname{crk} A^{\varkappa+1} = \ldots . \tag{3}$$

Матрица $A$ не является матрицей перестановки, значит, по лемме 3.7, имеем $\operatorname{crk} A \leqslant n-1$. Тогда число строгих неравенств в формуле (3) не превосходит $n-1$, так что $\mathrm{CI}(A) \leqslant n-1$. □

## §4. Реализуемость значений цепного индекса

Введем двойственное понятие к введенному выше понятию пересечения вершин.

**Обозначение 4.1.** Пусть $D \in \mathcal{P}$, $u, v \in V(D)$, $k \in \mathbb{N}$. Скажем, что $u \vee^k v$, если существует такая вершина $w \in V(D)$, что $w \xrightarrow{k} u$ и $w \xrightarrow{k} v$. Будем писать $u \vee^k \cdots \vee^k v$, если существуют $l \in \mathbb{N}$ и такие вершины $u_1, \dots, u_l \in V(D)$, что $u \vee^k u_1, u_1 \vee^k u_2, \dots, u_l \vee^k v$.

**Замечание 4.2.** Поскольку $D \in \mathcal{P}$, аналогично доказательству леммы 2.9 можно показать, что если существует $k \in \mathbb{N}$, для которого $u \vee^k v$, то $u \vee^t v$ для любого $t \in \mathbb{N}$, $t > k$.

Проиллюстрируем отношение $\vee$ при помощи графа $D_1$ из примера 2.2.

**Пример 4.3.** Для графа $D_1$, изображенного на рис. 1, имеем: $1 \vee^1 2$, $2 \vee^2 4$ и $3 \vee^3 4$.

**Лемма 4.4.** *Пусть $D \in \mathcal{P}$ и существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых вершин $u, v \in V(D)$ выполняется $u \vee^k \cdots \vee^k v$. Тогда $\mathrm{CI}(D) \leqslant k$.*

**Доказательство.** Для любых двух вершин $a, b \in V(D)$ найдем такие вершины $u, v \in V(D)$, что $a \xrightarrow{k} u$ и $b \xrightarrow{k} v$. Вершины $u, v \in V(D)$ существуют, поскольку $D \in \mathcal{P}$. Тогда, по условию, $u \vee^k \cdots \vee^k v$. Следовательно, по определению, найдутся такие вершины $w_1, \dots, w_q \in V(D)$, что

$$w_1 \xrightarrow{k} u, w_1 \xrightarrow{k} u_2, \quad w_2 \xrightarrow{k} u_2, w_2 \xrightarrow{k} u_3, \ \dots, \ w_q \xrightarrow{k} u_q, w_q \xrightarrow{k} v.$$

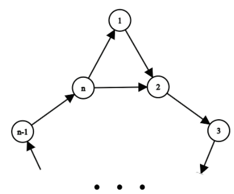

Рис. 2. Граф матрицы Виландта $W_n$.

Тогда, учитывая изначальный выбор вершин $u, v$, получаем

$$a \xrightarrow{k} u, w_1 \xrightarrow{k} u, \quad w_1 \xrightarrow{k} u_2, w_2 \xrightarrow{k} u_2, \quad \dots, \; w_q \xrightarrow{k} v, b \xrightarrow{k} v,$$

что и означает, что $a \wedge^k \cdots \wedge^k b$, откуда $\mathrm{CI}(D) \leqslant k$. $\square$

**Определение 4.5.** Матрицей Виландта [6] называется матрица

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф матрицы Виландта изображен на рис. 2.

В работе [1] доказано, что $\mathrm{CI}(W_n) = n - 1$.

**Определение 4.6.** Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \{2, \dots, n\}$ определим граф $W_{n,i}$ с $n$ вершинами $v_1, \dots, v_n$ и следующим набором ребер:

1) $v_1 \to v_2, v_2 \to v_3, \dots, v_{n-1} \to v_n, v_n \to v_1$, т.е. все вершины лежат в цикле длины $n$;

2) $v_n \to v_1, v_n \to v_2, \dots, v_n \to v_i$ – дополнительные $i$ ребер с началом в $v_n$, см. рис. 3.

Множество графов $W_{n,i}$ строится по графу Виландта $W_n (= W_{n,2})$ и задает некоторое его расширение. Для вычисления цепного индекса графа $W_{n,i}$ потребуется следующая лемма.

**Лемма 4.7.** *Пусть* $i, n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant i \leqslant n$. *Тогда* $\mathrm{CI}(W_{n,i}) = n - i + 1$.

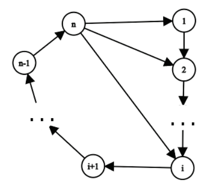


Рис. 3. Граф матрицы $W_{n,i}$.

**Доказательство.** Мы используем обобщение идеи доказательства соответствующего результата для $W_n$, см. [1].

Заметим, что из вершины $v_i$ выходит единственный путь длины $n-i$, который заканчивается в вершине $v_n$. Других путей длины $n-i$ с концом в вершине $v_n$ не существует. Таким образом, не существует такой вершины $v_j$, что $v_j \wedge^{n-i} v_i$, так что $\mathrm{CI}(W_{n,i}) \geqslant n-i+1$.

Докажем теперь обратное неравенство. Для этого заметим, что поскольку из вершины $v_n$ выходит ребро в каждую из вершин $v_1, \ldots, v_i$, то для любого $t \in \{1, 2, \ldots, n-i+1\}$ из вершины $v_n$ выходит путь длины $t$ в каждую из вершин $v_t, \ldots, v_{t+i-1}$, т.е. выполняется

$$v_t \vee^t v_{t+1} \vee^t \cdots \vee^t v_{t+i-2} \vee^t v_{t+i-1},$$

где все пути начинаются в вершине $v_n$.

Тогда, в силу замечания 4.2, для каждого $t \in \{1, 2, \ldots, n-i+1\}$ имеем

$$v_t \vee^{n-i+1} v_{t+1} \vee^{n-i+1} \cdots \vee^{n-i+1} v_{t+i-2} \vee^{n-i+1} v_{t+i-1}.$$

Значит, рассматривая последовательно $t = 1, 2, \ldots, n-i+1$ и используя транзитивность, получаем

$$v_1 \vee^{n-i+1} v_2 \vee^{n-i+1} \cdots \vee^{n-i+1} v_{n-1} \vee^{n-i+1} v_n.$$

Таким образом, условие $v_k \vee^{n-i+1} \cdots \vee^{n-i+1} v_l$ выполняется для всех пар $v_k, v_l \in D(V)$.

По лемме 4.4, отсюда следует, что $\mathrm{CI}(W_{n,i}) \leqslant n-i+1$. □

**Следствие 4.8.** *На множестве квадратных матриц порядка n реализуются все значения цепного индекса от нуля до $n-1$ включительно.*

## Список литературы


1. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 5–25.
2. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 5–20.
3. В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, *Комбинаторика неотрицательных матриц*, Изд-во ТВП, 2000.
4. D. J. Hartfiel, C. J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Math. **12** (1975), 245–256.
5. R. Sinkhorn, P. Knopp, *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices.* — Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 67–75.
6. H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.* — Math. Zeit. **52**, No. 1 (1950), 642–648.


Alpin Yu. A., Guterman A. E., Shafeev E. R. An upper bound for the chainable index.

The paper considers the chainable index of a square matrix of order $n$ and proves that it does not exceed $n-1$. Also it is demonstrated that every integer in between 0 and $n-1$ is a value of the chainable index.

ул. Гоголя, 9, кв. 1,
420015 Казань, Россия
*E-mail*: yurialpin016@gmail.com

Поступило 12 октября 2022 г.

Израильский технологический институт
Технион, 3200003 Хайфа, Израиль
*E-mail*: alexander.guterman@gmail.com

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
119991 Москва, Россия
*E-mail*: shafeev.ev@yandex.ru