Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

А. В. Яковлев

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ. II

§1. Введение

Мы используем обычные для теории Галуа обозначения; напомним некоторые из них.

- K^* – мультипликативная группа поляK;
- $\mathrm{Gal}(K/k)$ – группа Галуа расширения K/k;
- K^S – множество элементов из K, инвариантных относительно подгруппы S группы Галуа расширения K/k;
- $Nm_{K/k}(w)$ – норма элемента $w \in K$ для расширения полей K/k;
- $\mathbb{F}_p$ – поле из p элементов;
- $A \rtimes F$ – полупрямое расширение факторгруппы F при помощи F-модуля A.

Пусть K/k – расширение Галуа с группой Галуа F, и пусть $\varphi : G \to F = \mathrm{Gal}(K/k)$ – эпиморфизм конечных групп. Мы обозначаем через $(K/k, G, \varphi)$ следующую задачу погружения:

построить расширение Галуа L/k с группой Галуа G, такое что $L \supset K$ и ограничение любого автоморфизма $g \in G = \mathrm{Gal}(L/k)$ на K совпадает с $\varphi(g)$.

Всюду далее G_n – группа верхних унитреугольных матриц порядка $n \geqslant 4$ над полем $\mathbb{F}_p$, то есть группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \in \mathbb{F}_p$. Как обычно, мы обозначаем через e_{ij} матрицу, единственный ненулевой элемент которой равен 1 и расположен в i-й строке и j-м столбце. Обозначим через $g_{ij} \in G_n$ матрицу $E + e_{ij}$, где $1 < i < j \leqslant n$,

Ключевые слова: расширение Галуа, задача погружения.

а E – единичная матрица. Для $1 \leqslant s \leqslant n$ пусть H_s – множество таких матриц $g \in G_n$, что все ненулевые элементы матрицы $g - E$ расположены выше s-й диагонали. Иначе говоря, H_s – подгруппа G_n, порождённая элементами g_{ij} с $j - i > s$. Очевидно, H_s – нормальная подгруппа G_n. Положим $F_n = G_n/H_1$, $\overline{G}_n = G_n/H_2$ и обозначим через $\varphi_n : G_n \to G_n/H_1 = F_n$, $\overline{\varphi}_n : \overline{G}_n = G_n/H_2 \to G_n/H_1 = F_n$ канонические эпиморфизмы групп на факторгруппы. Заметим, что F_n – элементарная абелева группа порядка p^{n-1}. Целью работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть k – поле, содержащее первообразный корень степени p из 1, и пусть K_n/k – расширение Галуа с группой Галуа F_n. Если разрешима задача погружения $(K_n/k, \overline{G}_n, \overline{\varphi}_n)$, то разрешима и задача погружения $(K_n/k, G_n, \varphi_n)$.*

Это утверждение при $p = 2$ было высказано в качестве гипотезы и для ряда случаев доказано А.Палом и другими авторами с использованием достаточно глубоких результатов (см. [2,3]). Я узнал об этом из его доклада на коллоквиуме факультета математики и компьютерных наук в сентябре 2019 года. Мне понадобился год для того, чтобы понять, что при $p = 2$ эта задача совершенно элементарна и достаточно проста (см. [4]). Что касается случая нечётного p, индукция проходит в общем так же, как при $p = 2$; однако, доказательство для случая $n = 4$, использованное при $p = 2$, не проходит для нечётного p. И только спустя ещё год я понял, что для нечётного p всё ещё элементарнее и проще. Этому и посвящена настоящая статья. Отметим, что приведённое ниже доказательство для нечётного p не проходит при $p = 2$.

§2. Основная лемма

Лемма 1. *Пусть p – нечётное простое число, и пусть G – группа порядка p^3, порождённая элементами f, g, h с определяющими соотношениями*

$$f^p = g^p = h^p = e, \quad [f^{-1}, g] = h, \quad fh = hf, \quad gh = hg.$$

Далее, пусть k – поле, содержащее первообразный корень степени p из 1, L/k – расширение Галуа с группой Галуа G. Поле $k_1 = L^{\langle g,h \rangle}$ является циклическим расширением поля k с группой Галуа $F = \langle f \rangle$, *а $k_2 = L^{\langle f,h\rangle}$ – тоже циклическое расширение степени p поля k; пусть $b \in k$ – такой элемент, что $k_2 = k(\beta)$, $\beta^p = b$.*

1) Существует элемент $u \in k_1$, такой что $b = Nm_{k_1/k}(u)$.

2) Пусть D – свободный $\mathbb{F}_p[F]$-модуль, порождённый одним элементом d, $F \rtimes D$ – полупрямое расширение, $\psi : F \rtimes D \to F$ – расщепляющий эпиморфизм. Поле $\overline{L}$, полученное присоединением к k_1 корней степени p из элемента u и всех сопряжённых с u элементов, решает задачу погружения $(k_1/k, F \rtimes D, \psi)$, причём подполе элементов поля L, инвариантных относительно f и $[f,d]$, равно k_2.

Доказательство. 1) Группа G является полупрямым произведением группы F и нормальной подгруппы $A = \langle g,h\rangle$. Группа A – элементарная абелева p-группа, на которой g и h действуют тривиально, а f действует по формулам

$$g^f = f^{-1}gf = [f^{-1},g]g = hg, \quad f(h) = f^{-1}hf = h.$$

Тогда $g^{f-1} = g^f/g = h$, $h^{f-1} = h^f/h = e$, так что $a^{(f-1)^2} = e$ для всех $a \in A$.

Пусть $M \supset k_1^*$ – группа всех элементов из L, p-е степени которых принадлежат k_1^*. Как хорошо известно, F-модуль M/k_1^* изоморфен модулю характеров G-модуля A, поэтому существует элемент $\omega \in M$, класс $\overline{\omega}$ которого по модулю k_1^* порождает M/k_1^*. При этом элементы $\overline{\omega}, \overline{\omega}^f/\overline{\omega}$ составляют базис M/k_1^* как элементарной абелевой p-группы, а элемент $\overline{\omega}^f/\overline{\omega}$ порождает в ней подгруппу G-инвариантных элементов. В частности, класс β по модулю k_1^* принадлежит этой подгруппе, так что $\beta = v(\omega^f/\omega)^j$ для некоторого $v \in k_1^*$ и некоторого j, не делящегося на p. Пусть r – такое число, что $jr \equiv 1 \pmod p$; положим $u = v^r$. Тогда

$$\begin{aligned} b = \beta^{r(1+f+\ldots+f^{p-1}} &= v^{r(1+f+\ldots+f^{p-1})}(\omega^{j(f-1)})^{1+f+\ldots+f^{p-1}} \\ &= Nm_{k_1/k}(v^r) = Nm_{k_1/k}(u). \end{aligned}$$

2) Пусть N – множество элементов из k_1^*, которые становятся p-ми степенями в $\overline{L}$. Фактормодуль $N/(k_1^*)^p$ порождается классом по $(k_1^*)^p$ элемента u, и, поскольку $b = Nm_{k_1/k}(u) \notin k_1^p$, этот фактормодуль – свободный $\mathbb{F}_p[F]$-модуль. Группа Галуа D расширения $\overline{L}/k_1$ как F-модуль изоморфна модулю характеров модуля $N/(k_1^*)^p$, и потому это тоже свободный модуль. Поскольку D – свободный модуль, расширение $e \to D \to \overline{G} \to F \to e$ расщепляется, так что $\overline{G} = F \rtimes D$. Наконец,

элемент $\beta = \sqrt[p]{u}$ принадлежит L и, очевидно, инвариантен относительно f и $[f,d]$. $\square$

§3. Случай $n = 4$

Образы элементов g_{ij} при факторизации по нормальным подгруппам группы G_n будем обозначать теми же символами g_{ij}. В частности, K_n/k – расширение с группой Галуа, являющейся элементарной абелевой группой с базисом $g_{12}, g_{23}, \ldots, g_{n-1,n}$. Обозначим через k_i подполе элементов из K_n, инвариантных относительно всех $g_{j,j+1}$, кроме $g_{i,i+1}$; Тогда $K_n = k_1k_2\ldots k_{n-1}$. Пусть a_i – такой элемент из k, что $k_i = k(\sqrt[p]{a_i})$.

Лемма 2. *Пусть B_1 – свободный $\mathbb{F}_p[\langle g_{12}\rangle]$-модуль, порождённый одним элементом d_1, $\langle g_{12}\rangle \rtimes B_1$ – полупрямое расширение, $\psi_1 : \langle g_{12}\rangle \rtimes B_1 \to \langle g_{12}\rangle$ – расщепляющий эпиморфизм. Аналогично, пусть B_3 – свободный $\mathbb{F}_p[\langle g_{34}\rangle]$-модуль, порождённый одним элементом d_3, $\langle g_{34}\rangle \rtimes B_3$ – полупрямое расширение, $\psi_3 : \langle g_{34}\rangle \rtimes B_3 \to \langle g_{34}\rangle$ – расщепляющий эпиморфизм. Если разрешима задача погружения $(K_3/k, \overline{G}_3, \overline{\varphi}_3)$, то существуют решения L_1 и L_3 полупрямых задач погружения $(k_1/k, \langle g_{12}\rangle \rtimes B_1, \psi_1)$ и $(k_3/k, \langle g_{34}\rangle \rtimes B_3, \psi_3)$. При этом $L_1^{\langle g_{12},[g_{12},d_1]\rangle} = L_3^{\langle g_{34},[g_{34},d_3]\rangle} = k_2$, и эти вложения k_2 в L_1 и L_3 индуцируют эпиморфизмы $\theta_1 : B_1 \to \mathrm{Gal}(k_2/k)$ и $\theta_3 : B_3 \to \mathrm{Gal}(k_2/k)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{L}_3$ – решение задачи погружения $(K_3/k, \overline{G}_3, \overline{\varphi}_3)$, и пусть L – подполе $\overline{L}_3$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно всех g_{ij} с $j > 3$. В лемме 1 положим $f = g_{12}$, $g = g_{23}$, $h = g_{13}$. Тогда по этой лемме существует решение L_1 полупрямой задачи погружения $(k_1/k, \langle g_{12}\rangle \rtimes B_1, \psi_1)$, причём $L_1^{\langle g_{12},[g_{12},d_1]\rangle} = k_2$.

Пусть теперь L – подполе $\overline{L}_3$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно g_{12}, g_{34}. В лемме 1 положим $f = g_{34}$, $g = g_{23}$, $h = g_{24}$. Тогда по этой лемме существует решение L_1 полупрямой задачи погружения $(k_3/k, \langle g_{34}\rangle \rtimes B_3, \psi_3)$, причём $L_3^{\langle g_{34},[g_{34},d_3]\rangle} = k_2$. $\square$

На $\langle g_{12}\rangle$-модуле B_1 элемент g_{34} действует тривиально, поэтому B_1 можно рассматривать как модуль над группой Галуа $\langle g_{12}, g_{34}\rangle$ расширения k_1k_3. Точно так же B_3 является $\langle g_{12}, g_{34}\rangle$-модулем.

Лемма 3. *Композит $L = L_1 \otimes_{k_1k_3} L_3$ – полупрямое расширение поля k_1k_3 с ядром B, являющимся расслоенным произведением $B_1 \times_{\mathrm{Gal}(k_2/k)}$*

B_3 для эпиморфизмов $\theta_1 : B_1 \to \mathrm{Gal}(k_2/k)$ и $\theta_3 : B_3 \to \mathrm{Gal}(k_2/k)$. Это ядро является подмодулем $\langle g_{12}, g_{34}\rangle$-модуля $B_1 \times B_3$, порождённым элементом $d = d_1 \times d_3$, и соотношения

$$d^p = d^{(g_{12}-e)^{p-2}} = d^{(g_{34}-e)^{p-2}} = e$$

являются определяющими соотношениями для этого модуля.

Доказательство. Пусть $d_1' \in B_1$, $d_3' \in B_3$. Элемент $d_1' \times d_3' \in B_1 \times B_3$ принадлежит ядру B тогда и только тогда, когда d_1' и d_3' одинаково действуют на k_2, то есть когда $\theta_1(d_1') = \theta_3(d_3')$. Это и означает, что $B = B_1 \times_{\mathrm{Gal}(k_2/k)} B_3$. Элемент $d = d_1 \times d_3$ порождает B, и ясно, что соотношения $d^p = d^{(g_{12}-e)^{p-2}} = d^{(g_{34}-e)^{p-2}} = e$ являются определяющими соотношениями для B. □

Лемма 4. *Если разрешима задача погружения $(K_3/k, \overline{G}_3, \overline{\varphi}_3)$, то существует и решение L''/k задачи погружения $(K_4/k, \overline{G}_4, \overline{\varphi}_4)$.*

Доказательство. Задача погружения $(K_3/k, \overline{G}_3, \overline{\varphi}_3)$ полупрямая, и её ядро U – подгруппа $\overline{G}_4$, порождённая как $\langle g_{12}\rangle$-модуль элементом g_{23}. Элемент g_{23} удовлетворяет соотношениям

$$g_{23}^p = g_{23}^{(g_{12}-e)^{p-2}} = g_{23}^{(g_{34}-e)^{p-2}} = e,$$

поэтому существует эпиморфизм α модуля B на U, такой что $\alpha(d) = g_{23}$. Расширение $L^{\mathrm{Ker}\,\alpha}$ решает задачу погружения $(K_4/k, \overline{G}_4, \overline{\varphi}_4)$. □

Ниже будут встречаться факторгруппы G_n по нормальным подгруппам, порождённым некоторыми из g_{ij}. Хотя мы будем точно описывать эти факторгруппы, для наглядности, как в [4], будем изображать их для случая $n = 7$ матрицами, в которых пустые места выше диагонали соответствуют тем g_{ij}, по которым происходит факторизация.

Лемма 5. *Пусть $\widetilde{G}_n$ – факторгруппа G_n по подгруппе, порождённой всеми g_{ij} с $j - i > 2$, кроме g_{14}, $\widetilde{F}_n$ – факторгруппа $\overline{G}_n$ по подгруппе,* *порождённой* $g_{13}, g_{23}, g_{14}, g_{24}$, $\widetilde{\varphi}_n : \widetilde{G}_n \to \widetilde{F}_n$ *– естественный эпиморфизм:*

$$\widetilde{G}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & & & \\ & 1 & * & * & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{F}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть $\overline{L}$ *– решение задачи погружения* $(K_n/k, \overline{G}_n, \overline{\varphi}_n)$, *существующее по условию теоремы,* $\overline{L}'$ *– подполе* $\overline{L}$, *состоящее из всех элементов, инвариантных относительно* g_{13}, g_{23}, g_{24}, *так что* $\mathrm{Gal}(\overline{L}'/k) = \widetilde{F}_n$. *Тогда существует решение* $\widetilde{L}$ *задачи погружения* $(\overline{L}'/k, \widetilde{G}_n, \widetilde{\varphi}_n)$. *При этом подполе* $\widetilde{L}$, *состоящее из элементов, инвариантных относительно всех* g_{ij}, *кроме* g_{12}, *равно* k_2.

Доказательство. Достаточно в качестве $\widetilde{L}$ взять композит $L'' \otimes_{k_1 k_3} \overline{L}'$ поля $\overline{L}'$ и поля L'' из леммы 4. $\square$

§4. Доказательство теоремы 1

Дальнейшие рассуждения повторяют окончание доказательства теоремы 1 из [4] с точностью до мелких деталей, из-за которых нам придётся воспроизвести это доказательство.

Пусть $\overline{L}_n$ – решение задачи погружения $(K_n/k, \overline{G}_n, \overline{\varphi}_n)$, которое существует по условию теоремы 1. В следующих далее рассуждениях появляются факторгруппы не всей группы $\widetilde{G}_n$, а её подгруппы $\widetilde{G}_n^0$, порождённой всеми g_{ij}, кроме g_{12}:

$$\widetilde{G}_n^0 \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & & & \\ & 1 & * & * & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\widehat{L}$ – подполе $\widetilde{L}$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно g_{23}, g_{24}; оно не является нормальным расширением k, но зато является нормальным расширением полей k_1' и $K' = k_1' k_3 \ldots k_{n-1}$, где

k_1' – поле, полученное присоединением к k корня степени p из элемента $d_1^{(g_{12}-e)^{p-2}(g_{34}-e)}$. Группы Галуа $\widehat{G}_n$ и F_n' расширений $\widehat{L}/k_1'$ и K'/k_1' имеют вид

$$\widehat{G}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \ F_n' \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & & & \\ & & & 1 & * & & \\ & & & & 1 & * & \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix};$$

первая из них – факторгруппа $\widetilde{G}_n^0$ по подгруппе, порождённой g_{23} и g_{24}, а вторая – факторгруппа первой по подгруппе, порождённой g_{14} и всеми $g_{s,s+2}$ с $s \geqslant 3$.

Дальнейшее доказательство теоремы ведём индукцией по n. По лемме 4 теорема справедлива при $n = 4$. Пусть $n \geqslant 5$, и теорема уже доказана для группы G_{n-1}.

Лемма 6. *Пусть G_n^0 – подгруппа G_n, порождённая всеми g_{ij}, кроме g_{12}, а G_n' – её факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всеми g_{2j} из второй строки:*

$$G_n' \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * & * & * \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть $\varphi_n' : G_n' \to F_n'$, $\widehat{\varphi}_n : \widehat{G}_n \to F_n'$ – канонические эпиморфизмы групп на факторгруппы. Существует решение L'/k_1' задачи погружения $(K'/k_1', G_n', \varphi_n')$.

Доказательство. Группы G'_n, $\widehat{G}_n$, F'_n изоморфны соответственно группам G_{n-1}, $\overline{G}_{n-1}$, F_{n-1}, и эти изоморфизмы согласованы со связывающими их гомоморфизмами: диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G'_n & \xrightarrow{\varphi'_n} & F'_n & \xleftarrow{\widehat{\varphi}_n} & \widehat{G}_n \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ G_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & F_{n-1} & \xleftarrow{\overline{\varphi}_{n-1}} & \overline{G}_{n-1} \end{array},$$

вертикальные стрелки которой – упомянутые выше изоморфизмы, коммутативна. Поэтому задачи погружения

$$(K'/k'_1, G'_n, \varphi'_n), \qquad (K'/k'_1, \overline{G}'_n, \overline{\varphi}'_n)$$

фактически являются задачами вида

$$(K_{n-1}/k, G_{n-1}, \varphi_{n-1}), \qquad (K_{n-1}/k, \overline{G}_{n-1}, \overline{\varphi}_{n-1})$$

из теоремы. Но задача $(K'/k_1, \widehat{G}_n, \overline{\varphi}'_n)$ разрешима – расширение $\widehat{L}/k_1$ решает её, поэтому по предположению индукции существует и решение L' задачи погружения $(K'/k'_1, G'_n, \varphi'_n)$. $\square$

Для завершения доказательства воспользуемся утверждением, которое в [4] было названо

Следствие из теоремы Фаддеева. (см. [1], теорема 3.7 из §7 главы 3). *Пусть K/k – расширение Галуа с группой Галуа F, F_0 – подгруппа F, A – конечный F-модуль, A_0 – его F_0-подмодуль. Предположим, что существует F-эпиморфизм $\theta : \mathbb{Z}[F] \otimes_{\mathbb{Z}[F_0]} A_0 \to A$, такой что $\theta(1 \otimes a) = a$ для любого $a \in I_0$. Далее, пусть L_0/K^{F_0} – решение задачи погружения $(K/K^{F_0}, A_0 \rtimes F_0, \varphi_0)$. Тогда существует решение L/k задачи погружения $(K/k, A \rtimes F, \varphi)$, содержащее расширение L_0/K^{F_0} (через $\varphi_0 : A_0 \rtimes F_0 \to F_0 = \mathrm{Gal}(K/K^{F_0})$ и $\varphi : A \rtimes F \to F = \mathrm{Gal}(K/k)$ обозначены канонические эпиморфизмы групп на факторгруппы).*

Положим $G_0 = G'_n = \mathrm{Gal}(L'/k_1)$, и пусть I_0 – подгруппа группы G'_n, порождённая всеми g_{1s} с $3 \leqslant s < n$, $L_0 = L'$, $K = L_0^{I_0}$, $G = G_n$, I – подгруппа G, порождённая всеми g_{1s}, g_{2s} с $3 \leqslant s < n$. Поле K нормально не только над $k_1 = K^{F_0}$, но и над полем k, причём $\mathrm{Gal}(K/k) = G/I$.

Следующие схемы изображают не только группы, но и полупрямые задачи погружения $(K/k'_1, G_0, \varphi_0) = (K/K^{F_0}, G_0, \varphi_0)$ и $(K/k, G, \varphi)$. Ядра этих задач порождаются элементами g_{ij}, позиции которых на схеме отмечены кружочками $\circ$:

$$G_0 \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad G_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Поле $L_0 = L'$ решает первую из этих задач, а ядро I второй задачи изоморфно как G-модуль тензорному произведению $\mathbb{Z}[F] \otimes_{\mathbb{Z}[F_0]} I_0$; поэтому по следствию из теоремы Фаддеева существует решение L второй задачи погружения, содержащее поле $L_0 = L'$. В частности, L содержит поле инвариантных относительно g_{12} элементов поля k_1', а это в точности поле k_2 элементов поля L, инвариантных относительно всех g_{ij}, кроме g_{23}. Таким образом, поле L решает задачу погружения $(K_n/k, G_n, \varphi_n)$.

Список литературы

1. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, М. (1990).
2. A. Pal, E. Szabo, *The strong Massey vanishing for fields with virtual cohomological dimension at most* 1, `arXiv:1811.06192` (2020).
3. Y. Harpaz, O. Wittenberg, *The Massey vanishing condition for number fields.* `arXiv:1904.06512` (2019).
4. А. В. Яковлев, *Об одной задаче погружения.* — Записки научн. семин. ПОМИ, **500** (2021), 204–212.

Yakovlev A. V. About one Galois embedding problem. II.

For an odd prime p, the Galois embedding problem of an extension with elementary abelian p-group in an extension with the Galois group isomorphic to the group of unitriangular matrices over the finite field of order p is considered. It is proved that the solvability of the maximal accompanying problem with central kernel of period p is sufficient for the solvability of the original problem.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: `yakovlev.anatoly@gmail.com`

Поступило 14 февраля 2022 г.