Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

Д. И. Школьник

О (2,3)-ПОРОЖДЕНИИ $\mathbf{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$

§1. Введение

Группа называется (2,3)-порождённой, если она может быть порождена инволюцией и элементом порядка 3. Поскольку модулярная группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ изоморфна свободному произведению циклической группы C_2 порядка 2 и циклической группы C_3 порядка 3, то задача классификации (2,3)-порождённых групп равносильна задаче об описании факторгрупп модулярной группы, отличных от $\{1\}$, C_2, C_3. В отличие от $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$, где $n \geqslant 3$, у $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ имеются нормальные подгруппы, не являющиеся конгруэнц-подгруппами, что делает их классификацию и описание соответствующих факторгрупп чрезвычайно трудными. Поэтому обычно рассматривается ограниченная задача о том, какие группы из важных классов (например, классических матричных групп) являются (2,3)-порождёнными. Вопрос о (2,3)-порождённости классических матричных групп исследовался разными авторами как в случае конечных полей (работы [6–9]), так и в случае кольца целых чисел (работы [1, 4, 9–13]). Среди перечисленных работ в случае линейных групп над кольцом целых чисел наилучший из известных результатов содержался в серии работ М. К. Тамбурини и её соавторов. В частности, известно, что группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ при $n \geqslant 13$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ при $n = 13$ или $n \geqslant 15$ являются (2,3)-порождёнными.
Задача о (2,3)-порождении группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ рассмотрена в работе [4], в которой при $n = 5$ доказана следующая теорема.

Теорема 1 (см. [4])**.** *Предположим, что группа* $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ *является* (2,3)*-порождённой. Тогда порождающие её инволюция и элемент порядка* 3 *сопряжены с одной из пар*

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

Ключевые слова: (2,3)-порождение, линейные группы.

где набор (a_1, a_2, a_3, a_4) *совпадает с одним из следующих:*

$$(1,-1,-2,-2), \qquad (0,-1,-2,-2), \tag{2}$$

$$(1,-1,-2,4), \qquad (0,-1,4,-8), \tag{3}$$

$$(-1,1,-2,-2), \qquad (0,1,-2,-2), \tag{4}$$

$$(-1,1,-2,4), \qquad (0,1,4,-8), \tag{5}$$

$$(1,-1,1,-3), \qquad (0,-1,0,-1). \tag{6}$$

Однако работа [4] не давала ответ на вопрос, порождают ли матрицы, соответствующие наборам (2)–(6), группу $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$. При доказательстве теоремы 1 в работе [4] использовались "локальные" методы. А именно, было показано, что если $X^2 = Y^3 = I, \det X = -1$ и $\langle X \mod p, Y \mod p\rangle = \mathrm{SL}_5^{\pm}(\mathbb{Z}_p)$, то набор $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ должен содержаться среди перечисленных в теореме 1. Здесь $\mathrm{SL}_5^{\pm}(\mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}_p) \mid \det(A) = \pm 1\}$. Как доказано в работе [1], только наборы (2), (4), (6) приводят к образующим $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$. Для того, чтобы исключить наборы (3), (5), использовались другие методы, которые можно охарактеризовать как "глобальные". В связи с этим возникает вопрос, дают ли "локальные" методы или их обобщения только необходимые или необходимые и достаточные условия для $(2,3)$-порождённости. В настоящей работе показано, что только "локальных" методов не достаточно, а именно, что для наборов (3), (5) матрицы $-X \mod p$, $Y \mod p$ порождают $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ для всех простых p.

Теорема 2. *Пусть матрицы* X, Y *определены согласно* (1), *а набор* (a_1, a_2, a_3, a_4) *соответствует одному из наборов* (3), (5). *Тогда матрицы* $X \mod p$, $Y \mod p$ (*соответственно* $-X \mod p$, $Y \mod p$) *порождают* $\mathrm{SL}_5^{\pm}(\mathbb{Z}_p)$ (*соответственно,* $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$) *для всех простых* p.

§2. Необходимые определения и утверждения

Прежде всего, отметим, что в случае нечётной размерности для доказательства (2,3)-порождённости $\mathrm{SL}_5^{\pm}(\mathbb{Z}_p)$ достаточно доказать (2,3)-порождённость $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$. Более точно, верно следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть n нечётно,* $x, y \in \mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{Z}_p)$ *и* $x^2 = y^3 = I$. *Равенство* $\langle x, y\rangle = \mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{Z}_p)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\langle -x, y\rangle = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

Доказательство. См., например, [1, с. 24, лемма 2.1] с точностью до замены $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ на $\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ на $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$. □

Опишем кратко стратегию доказательства теоремы 2. Матрица вида $I+v\cdot u^{\mathrm{T}}$, где I – единичная матрица, $u, v \in \mathbb{Z}_p^n$ при условии $u^{\mathrm{T}}\cdot v = 0$, называется *трансвекцией*. Трансвекции вида $t_{ij}(\zeta) = I + \zeta e_i \cdot e_j^{\mathrm{T}}$, где e_i, e_j – векторы стандартного базиса $\mathbb{Z}_p^n$, $\zeta \in \mathbb{Z}_p$, называются элементарными. Хорошо известно (см., например, [3]), что при $n \geqslant 2$ группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ порождается элементарными трансвекциями $t_{ij}(1), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. На этом утверждении основано доказательство теоремы 2.

Предположим, что уже построен набор трансвекций по некоторой строке k, то есть набор матриц вида $I + e_k \cdot u_j^{\mathrm{T}}$ при условии $u_j^{\mathrm{T}} \cdot e_k = 0$. Тогда, если соответствующие этому набору векторы u_j порождают над $\mathbb{Z}_p$ подпространство $\mathbb{Z}_p^5$ размерности 4, ортогональное e_k, то элементарные трансвекции по этой строке могут быть получены следующим образом:

$$I + e_k \cdot e_i^{\mathrm{T}} = \prod_j (I + e_k \cdot u_j^{\mathrm{T}})^{\alpha_{ij}}, \tag{7}$$

где числа α_{ij} – коэффициенты разложения $e_i = \sum_j \alpha_{ij} u_j$ вектора e_i по векторам u_j.

Предположим теперь, что уже получены все элементарные трансвекции по k-ой строке и k-му столбцу для некоторого k. Воспользовавшись коммутаторным тождеством

$$t_{ik}(\zeta)t_{kj}(\xi)t_{ik}(\zeta)^{-1}t_{kj}(\xi)^{-1} = t_{ik}(\zeta)t_{kj}(\xi)t_{ik}(-\zeta)t_{kj}(-\xi) = t_{ij}(\zeta\xi), \tag{8}$$

где i, j, k попарно различны, получим все остальные элементарные трансвекции.

Замечание 1. Как отмечено в работе [4], достаточно исследовать только два случая. Пары матриц $-X$,Y и $-X$,Y^2 порождают или не порождают $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ одновременно. Если пара матриц $-X$, Y соответствует первому набору в строке (3) или (5), то второй набор той же строки соответствует паре матриц, сопряжённых в $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ с $-X$, Y^2. Это значит, что существуют матрицы $D_1 \in \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ и $D_2 \in \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$, для которых выполнены следующие условия: $D_1(-X) = (-X)D_1, D_1Y_{11}^2 = Y_{12}D_1$ и $D_2(-X) = (-X)D_2, D_2Y_{21}^2 = Y_{22}D_2$, где $(-X, Y_{11})$ и $(-X, Y_{21})$ отвечают первым наборам соответственно строк

(3) и (5), а $(-X, Y_{12})$ и $(-X, Y_{22})$ отвечают вторым наборам соответственно строк (3) и (5). Можно убедиться, что матрицы

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

удовлетворяют условиям выше.

Замечание 2. Отметим, что большинство вычислений ниже достаточно проводить для матриц, определённых над $\mathbb{Q}$. Для почти всех простых p будет корректно определена их редукция по модулю p. Нам надо будет отдельно рассмотреть конечный набор исключительных случаев. В частности, исключительными будут те простые, которые появляются в знаменателях дробей.

§3. Первый случай

В этом случае пара матриц $-X, Y$ имеет вид

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь и далее, если не оговорено иное, мы будем рассматривать все матрицы как элементы $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$.

Рассмотрим коммутатор пары X_0, Y_0,

$$X_0 Y_0 X_0^{-1} Y_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -6 & 16 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Заметим, что для простых p, отличных от 2 и 13, он сопряжён с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а матрица перехода имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -12 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -14 & -6 & 1 & -6 \\ \frac{5}{4} & -\frac{13}{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

то есть $C = G^{-1} X_0 Y_0 X_0^{-1} Y_0^{-1} G$.

Для простых p, отличных от 3 и 13, нижний блок (размера 2×2) матрицы C диагонализуем над $\bar{\mathbb{Z}}_p$, и его порядок не делится на p, поэтому некоторая степень $n(p)$ матрицы C имеет вид

$$C_1 := C^{n(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Заменим X_0, Y_0 на сопряжённые $X_1 = G^{-1} X_0 G, Y_1 = G^{-1} Y_0 G$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & 0 & -\frac{12}{13} & 0 & -\frac{1}{13} \\ -\frac{7}{13} & \frac{14}{13} & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{11}{26} \\ \frac{375}{338} & -\frac{7}{13} & -\frac{27}{169} & \frac{1}{26} & -\frac{38}{169} \\ \frac{41}{338} & -\frac{5}{13} & -\frac{12}{169} & -\frac{60}{13} & \frac{6486}{169} \\ \frac{9}{676} & -\frac{1}{26} & -\frac{1}{169} & -\frac{6}{13} & \frac{612}{169} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

при этом $C_1 \in \langle X_1, Y_1 \rangle$.

Рассмотрим матрицу $F = C_1^{-2}Y_1^2C_1^{13}Y_1C_1^{-2}Y_1^2C_1Y_1$,

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{4003}{13} & -\frac{352}{13} & -\frac{1800}{13} & \frac{170}{13} & -\frac{1085}{13} \\ \frac{921646}{2197} & \frac{6381}{169} & \frac{413112}{2197} & -\frac{3001}{169} & \frac{497995}{4394} \\ -\frac{482140}{2197} & -\frac{3584}{169} & -\frac{213911}{2197} & \frac{1556}{169} & -\frac{129263}{2197} \\ \frac{7668}{2197} & \frac{24}{169} & \frac{3768}{2197} & \frac{145}{169} & \frac{2030}{2197} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Для простых p, отличных от 2, 3, 17, 163, 499, 76519, она сопряжена с матрицей

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{809974}{2197} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

а матрица перехода имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2197}{814368} & -\frac{2197}{814368} & \frac{404987}{407184} & \frac{2197}{814368} \\ 0 & -\frac{2197}{1628736} & -\frac{24160409}{530967936} & -\frac{13079663826767}{9721081498752} & -\frac{2729054419}{747775499904} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{2197}{814368} & \frac{64923547}{530967936} & -\frac{484317217511}{249258499968} & -\frac{3941073071}{747775499904} \\ \frac{11}{2} & \frac{2197}{67864} & \frac{100611615}{88494656} & \frac{294342762523}{4860540749376} & \frac{61414769}{373887749952} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Для простых p, отличных от 2, 3, 5, 17, 47, 499, 857, нижний блок (размера 2×2) матрицы F_1 диагонализуем над $\bar{\mathbb{Z}}_p$, и его порядок не делится на p, поэтому некоторая степень $m(p)$ матрицы F_1 имеет вид

$$t_{23}(1) = F_1^{m(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Заменим X_1, Y_1 на сопряжённые $X_2 = T^{-1}X_1T, Y_2 = T^{-1}Y_1T$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 & X_2^5 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} Y_2^1 & Y_2^2 & Y_2^3 & Y_2^4 & Y_2^5 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где

$$X_2^1 = (1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^2 = \left(0, \frac{14500}{8483}, \frac{652}{8483}, \frac{3127761}{8483}, -\frac{194878441539}{1433627}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^3 = \left(0, -\frac{13857855}{5530916}, -\frac{7831}{8483}, \frac{65849579289}{5530916}, -\frac{315600237030843}{71901908}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^4 = \left(0, \frac{5688578574313599}{5704384629476}, -\frac{528103048}{18637151}, \frac{220054746067293595}{5704384629476},\right.$$
$$\left. -\frac{1782468554173536917665 65}{12532533030958772}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^5 = \left(0, \frac{7023161713}{2596442708}, -\frac{652}{8483}, \frac{271674234841}{2596442708}, -\frac{220059230629487863}{5704384629476}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^1 = \left(\frac{13}{12}, \frac{13847}{169}, \frac{652}{169}, -\frac{64630109}{2197}, \frac{52348331044771}{4826809}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^2 = \left(-\frac{24167}{1628736}, -\frac{303301}{135728}, \frac{163}{33932}, \frac{848225335}{1764464}, -\frac{687031786289657}{3876527408}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^3 = \left(-\frac{185393845}{353978624}, -\frac{9252807285}{88494656}, \frac{121137}{135728}, -\frac{2900644918137}{1150430528},\right.$$
$$\left. \frac{2349610081892424279}{2527495870016}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^4 = \left(\frac{943705727585}{19442162997504}, -\frac{757298410956644233}{3559536008793024}, \frac{1859939129171397}{296628000732752},\right.$$
$$\left. \frac{6717292686696847499 99}{3559536008793024}, \frac{829331749985825}{1620180249792}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^5 = \left(\frac{196902407}{1495550999808}, -\frac{311645781773}{540060083264}, \frac{6888679105}{405045062448}, \frac{829331749985825}{1620180249792},\right.$$
$$\left. -\frac{67173190702591618788 7}{3559536008793024}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Положим $C_2 = T^{-1}C_1T \in \langle X_2, Y_2\rangle$ и $M = X_2Y_2X_2Y_2^{-1}$, при этом $C_2 = M^{n(p)}$, то есть C_2 неявно выражается через M. Заметим, что используя (14) и (19), можно получить явный вид C_2. Таким образом,

$$t_{23}(1) = (C_2^{-2}Y_2^2C_2^{13}Y_2C_2^{-2}Y_2^2C_2Y_2)^{m(p)}.$$

Напомним, что $M, C_2, t_{23}(1) \in \langle X_2, Y_2\rangle$. Чтобы найти трансвекции по третьему столбцу, перебираем слова в образующих $X_2, Y_2, M, C_2, t_{23}(1)$

и ищем слово h, удовлетворяющее следующему условию:

$$e_3^{\mathrm{T}} h = e_3^{\mathrm{T}}. \tag{23}$$

Тогда $h^{-1}t_{23}(1)h = h^{-1}(I + e_2 \cdot e_3^{\mathrm{T}})h = I + h^{-1}e_2 \cdot e_3^{\mathrm{T}}$, то есть получаем трансвекции по третьему столбцу.

Получены следующие матрицы, удовлетворяющие (23):

$$h_1 = Y_2^{-1} X_2 M^2 Y_2, \tag{24}$$

$$h_2 = Y_2^{-1} X_2 M^{-1} C_2 X_2 C_2^{-1} M Y_2 t_{23}(1), \tag{25}$$

$$h_3 = t_{23}(2) C_2^{-1} Y_2^{-1} M C_2^{-1} Y_2^{-2} C_2, \tag{26}$$

$$h_4 = t_{23}(2) C_2^2 X_2 C_2 X_2 C_2 M C_2^{-1} Y_2 X_2 Y_2 C_2^{-1} X_2 Y_2 C_2^{-1}, \tag{27}$$

$$h_5 = (M Y_2 t_{23}(1) X_2 Y_2^{-1})^2. \tag{28}$$

Соответствующие им трансвекции имеют вид:

$$h_1^{-1} t_{23}(1) h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{16731}{271456} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{184429}{33932} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{28895295}{33932} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1800304456401}{5734508} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$h_2^{-1} t_{23}(1) h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{184041}{271456} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1999181}{33932} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{260057655}{33932} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16202740107609}{5734508} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$h_3^{-1} t_{23}(1) h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16835}{271456} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{602572}{110279} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30257948583}{18637151} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24507886968980499}{40945820747} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$h_4^{-1}t_{23}(1)h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{975}{15968} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{69961}{12974} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{195665781}{2192606} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{158453402114739}{4817155382} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

$$h_5^{-1}t_{23}(1)h_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{18484037}{13816567488} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1151271251}{1151380624} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1113391874837}{194583325456} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{901818511038653527}{427499566026832} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Напомним, что в знаменателях элементов матриц (29)–(33) присутствуют только те простые, которые входят в знаменатели элементов матрицы T, то есть которые были включены в список исключительных простых. Составим матрицу размера 5×6, столбцами которой являются векторы e_2, $h_1^{-1}e_2$, $h_2^{-1}e_2$, $h_3^{-1}e_2$, $h_4^{-1}e_2$, $h_5^{-1}e_2$. Посчитаем миноры четвёртого порядка и найдём наибольший общий делитель их числителей. Он равен $3 \times 11 \times 76519$, поэтому для всех простых, кроме рассмотренных выше и $p = 11$, найдены 4 линейно независимых вектора, которые порождают подпространство $\mathbb{Z}_p^5$, ортогональное e_3. Согласно (7) для почти всех p можно получить элементарные трансвекции по третьему столбцу $t_{13}(1)$, $t_{43}(1)$, $t_{53}(1)$.

Чтобы доказать теорему 2, достаточно теперь получить элементарные трансвекции по третьей строке. Обозначим $t_{23}(s)$ – параметризованную трансвекцию, где $s \in \mathbb{Q}$. Пусть h – слово в образующих X_2, Y_2, C_2, вновь рассматриваемых над $\mathbb{Q}$, и положим $g = ht_{23}(s)$. Выберем s так, чтобы $ge_3 \in \langle e_3 \rangle^{\perp}$, при этом $s \mod p$ корректно определено для почти всех p и $t_{23}(s \mod p) \in \langle t_{23}(1) \rangle$. Поскольку в $\langle X_2, Y_2 \rangle$ существует матрица $I + u \cdot e_3^{\mathrm{T}}$, где $u = ge_3$, то $g^{-1}(I + u \cdot e_3^{\mathrm{T}})g = I + e_3 \cdot e_3^{\mathrm{T}} g$. Далее, найдём достаточное количество матриц g, чтобы с их помощью можно было породить все элементарные трансвекции по 3 строке согласно (7). Получены следующие матрицы g:

$$g_1 = X_2 t_{23}\left(-\frac{7831}{652}\right), \tag{34}$$

$$g_2 = Y_2 t_{23}\left(-\frac{121137}{652}\right), \tag{35}$$

$$g_3 = Y_2 X_2 t_{23}\left(\frac{190083}{652}\right), \tag{36}$$

$$g_4 = Y_2^2 X_2 t_{23}\left(-\frac{30595}{163}\right), \tag{37}$$

$$g_5 = C_2 t_{23}\left(\frac{112561}{2282}\right). \tag{38}$$

Отметим, что простые, входящие в знаменатели дробей формул (34)–(38), уже присутствуют в списке исключительных. Трансвекции, соответствующие матрицам (34)–(38):

$$I + e_3 \cdot e_3^{\mathrm{T}} g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{652}{8482} & 1 & -\frac{528103048}{18637151} & -\frac{652}{8483} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$I + e_3 \cdot e_3^{\mathrm{T}} g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{652}{169} & \frac{163}{33932} & 1 & \frac{1859939129171397}{296628000732752} & \frac{6888679105}{405045062448} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$I + e_3 \cdot e_3^{\mathrm{T}} g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{652}{169} & -\frac{163}{33932} & 1 & -\frac{7254669634584737}{296628000732752} & -\frac{26870213405}{405045062448} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$I + e_3 \cdot e_3^{\mathrm{T}} g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2608}{2197} & -\frac{163}{12974} & 1 & -\frac{10482367043684}{3271632361023} & -\frac{25880977}{2978272518} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$I + e_3 \cdot e_3^{\mathrm{T}} g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2282}{110279} & 1 & -\frac{1848360668}{242282963} & -\frac{2282}{110279} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

В знаменателях элементов матриц (39)–(43) присутствуют только те простые, которые входят в знаменатели элементов матрицы T, то есть которые были включены в список исключительных простых. Составим матрицу размера 5×5, строками которой являются векторы $e_3^{\mathrm{T}} g_1$, $e_3^{\mathrm{T}} g_2$, $e_3^{\mathrm{T}} g_3$, $e_3^{\mathrm{T}} g_4$, $e_3^{\mathrm{T}} g_5$. Посчитаем миноры четвёртого порядка и найдём наибольший общий делитель их числителей. Он равен $2^4 \times 3 \times 163^4$, поэтому для всех простых, кроме рассмотренных выше, найдены 4 линейно независимых вектора, которые порождают подпространство $\mathbb{Z}_p^5$, ортогональное e_3^{T}. Согласно (7) для почти всех p можно получить элементарные трансвекции по третьей строке.

Соотношение (8) теперь позволяет утверждать наличие всех элементарных трансвекций в группе $\langle X_2 \mod p, Y_2 \mod p\rangle$ для почти всех p. Значит, $\langle X_2 \mod p, Y_2 \mod p\rangle = \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ для почти всех p. Исключительные случаи $p = 2, 3, 5, 11, 13, 17, 47, 163, 499, 857, 76519$. Используя классификацию максимальных подгрупп $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$, приведённую в [5], докажем, что в этих случаях $\langle X_2 \mod p, Y_2 \mod p\rangle = \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$.

При рассмотрении исключительных случаев для удобства будем работать с исходной парой матриц X_0, Y_0. Докажем, что $\langle X_0, Y_0\rangle$ не является максимальной геометрической подгруппой класса $\mathcal{C}_1$. Для этого достаточно доказать, что $\langle X_0, Y_0\rangle$ является неприводимой, то есть не существует собственного подпространства $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$, инвариантного относительно $\langle X_0, Y_0\rangle$. Предположим, что существует собственное $\langle X_0, Y_0\rangle$-инвариантное подпространство (а значит, и $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle$-инвариантное подпространство). Поскольку 1 – собственное число Y_0 кратности 1, то либо собственный вектор Y_0, отвечающий собственному числу 1, лежит в $\langle X_0, Y_0\rangle$-инвариантном подпространстве, либо собственный вектор Y_0^{T}, отвечающий собственному числу 1, лежит в $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle$-инвариантном подпространстве.

Обозначим u, v – собственные векторы матриц Y_0 и Y_0^{T}, соответствующие собственному числу 1.

$$u = (1, -2, 0, 6, 3)^{\mathrm{T}}, \tag{44}$$
$$v = (0, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}. \tag{45}$$

Покажем, что на самом деле $\langle X_0, Y_0 \rangle$-инвариантное и $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}} \right\rangle$-инвариантное подпространства совпадают с $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$. Для этого достаточно указать векторы из множеств $\langle X_0, Y_0 \rangle\, u$ и $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}} \right\rangle v$, порождающие $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$.

Рассмотрим следующие векторы:

$$\begin{aligned} u &= (1, -2, 0, 6, 3)^{\mathrm{T}}, \\ X_0 u &= (3, -6, 1, -22, -10)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0 X_0 u &= (-16, 13, -2, -16, -10)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0^2 X_0 u &= (3, 13, 4, -38, -10)^{\mathrm{T}}, \\ X_0 Y_0^2 X_0 u &= (3, 13, 4, 35, 6)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0 X_0 Y_0^2 X_0 u &= (19, -22, 23, -12, 6)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

и составим из них матрицу, рассматривая её элементы как целые числа. Посчитаем миноры пятого порядка и найдём их наибольший общий делитель. Он равен 1, поэтому $\langle X_0, Y_0 \rangle\, u$ порождает $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$. Значит, $\langle X_0, Y_0 \rangle$-инвариантное подпространство совпадает со всем пространством и, следовательно, не является собственным.

Рассмотрим следующие векторы:

$$\begin{aligned} v &= (0, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \\ X_0^{\mathrm{T}} v &= (0, 0, -1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0^{\mathrm{T}} X_0^{\mathrm{T}} v &= (0, 0, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \\ (Y_0^{\mathrm{T}})^2 X_0^{\mathrm{T}} v &= (-1, 0, 1, 1, -3)^{\mathrm{T}}, \\ (X_0^{\mathrm{T}} Y_0^{\mathrm{T}})^2 X_0^{\mathrm{T}} v &= (-2, 0, 4, -1, 3)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0^{\mathrm{T}} X_0^{\mathrm{T}} (Y_0^{\mathrm{T}})^2 X_0^{\mathrm{T}} v &= (-1, -2, 1, 5, -11)^{\mathrm{T}}, \\ X_0^{\mathrm{T}} Y_0^{\mathrm{T}} X_0^{\mathrm{T}} (Y_0^{\mathrm{T}})^2 X_0^{\mathrm{T}} v &= (-5, -1, 11, -5, 10), \end{aligned}$$

и составим из них матрицу, рассматривая её элементы как целые числа. Посчитаем миноры пятого порядка и найдём их наибольший общий делитель. Он равен 1, поэтому $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}} \right\rangle u$ порождает $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$. Значит,

$\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\rangle$-инвариантное подпространство совпадает со всем пространством и, следовательно, не является собственным.

Таким образом, группа $\langle X_0, Y_0\rangle$ абсолютно неприводима и не может быть максимальной геометрической подгруппой класса $\mathcal{C}_1$.

В таблице разобраны оставшиеся классы. Отметим, что случай класса $\mathcal{C}_5$ не реализуется, поскольку рассматриваемые p не являются степенями простых, а случай одной из максимальных подгрупп класса $\mathcal{C}_8$ невозможен, поскольку p не является квадратом. Если в группе $\langle X_0, Y_0\rangle$ существует слово, порядок которого не делит порядок максимальной группы, то $\langle X_0, Y_0\rangle$ не может быть соответствующей максимальной подгруппой.

Простое	Класс, максимальная подгруппа и её порядок			Слово	Порядок слова
2	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	5×31	Y_0	$\mathbf{3}$
3	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	5×11^2	$Y_0(X_0Y_0^2)^2$ $(X_0Y_0)^2X_0$	$2\times\mathbf{13}$
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^7\times 3^4\times 5$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3\times 3\times 5\times 11$		
	$\mathscr{S}$	M_{11}	$2^4\times 3^2\times 5\times 11$		
5	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^{11}\times 3\times 5$	$(Y_0^2X_0)^4Y_0^2$	$2^2\times 3\times\mathbf{31}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	$5\times 11\times 71$		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^7\times 3^2\times 5^4\times 13$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3\times 3\times 5\times 11$		
11	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^7\times 3\times 5^5$	X_0Y_0	$2^2\times 5\times\mathbf{19}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	$5^2\times 3221$		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^3\times 3\times 5^4\times 11$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^7\times 3^4\times 5$		
13	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^{11}\times 3^5\times 5$	$(Y_0X_0)^2(Y_0^2X_0)^3$ $Y_0X_0Y_0$	$3\times\mathbf{61}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	5×11^2		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^7\times 3^4\times 5$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^6\times 3^4\times 5$		
17	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^{19}\times 3\times 5$	$Y_0(X_0Y_0^2)^2X_0$	$2^2\times\mathbf{307}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	5×88741		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^{11}\times 3^4\times 5\times 17^4\times 29$		
47	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^7\times 3\times 5\times 23^4$	$X_0Y_0^{-1}(X_0Y_0)^2\times$ $X_0Y_0^{-1}X_0Y_0X_0\times$ $Y_0^{-1}X_0Y_0$	$2^5\times 23\times$ $37\times\mathbf{61}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	$5\times 11\times 31\times 14621$		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^{11}\times 3^2\times 5\times 13\times$ $17\times 23^2\times 47^4$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3\times 3\times 5\times 11$		
163	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^7\times 3^{17}\times 5$	X_0Y_0	$2\times 3^4\times 7\times$ $19\times\mathbf{67}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	$5\times 11\times 31\times 1301\times 1601$		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^7\times 3^8\times 5\times 41^2\times$ $163^4\times 2657$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3\times 3\times 5\times 11$		
	$\mathscr{S}$	$d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^6\times 3^4\times 5$		
499	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$	$2^7\times 3^5\times 5\times 83^4$	X_0Y_0	$2^3\times 3^2\times 5^3\times$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	$5\times 11\times 101\times 55918991$		
	$\mathcal{C}_8$	$d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^7\times 3^2\times 5^6\times 13\times 61\times$		

			$83^2 \times 157 \times 499^4$		$7 \times 83 \times \mathbf{109}^2$
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3 \times 3 \times 5 \times 11$		
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{U}_4(2)$	$2^6 \times 3^4 \times 5$		
857	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4 : \mathrm{S}_5$	$2^{15} \times 3 \times 5 \times 107^4$	$Y_0X_0Y_0^{-1}$	$2^4 \times 3$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1} : 5$	$5 \times 41^2 \times 71 \times 4524851$	$(X_0Y_0)^2X_0 \times$	$11 \times 13 \times$
	$\mathcal{C}_8$	$d \times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^9 \times 3^2 \times 5^2 \times 11^2 \times 13^2 \times$	$Y_0^{-1}X_0Y_0$	$107 \times \mathbf{735307}$
			$37 \times 107^2 \times 397 \times 857^4$		
76519	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4 : \mathrm{S}_5$	$2^7 \times 3^{13} \times 5 \times 13^4 \times 109^4$		
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1} : 5$	$5 \times 11 \times 3116665068973984051$	$X_0Y_0(X_0Y_0^2)^4 \times$	$2 \times 3^4 \times 7 \times$
	$\mathcal{C}_8$	$d \times \mathrm{SO}_5(q)$	$29 \times 3^6 \times 5^2 \times 13^2 \times 29 \times 109^2 \times$	$X_0Y_0X_0$	$13 \times 109 \times$
			$\times 1913^2 \times 76519^4 \times 100950989$	$Y_0^2X_0Y_0$	$5953 \times \mathbf{6691}$
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3 \times 3 \times 5 \times 11$		
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{U}_4(2)$	$2^6 \times 3^4 \times 5$		

Таким образом, пара $X_0 \mod p$, $Y_0 \mod p$ является первым порождающим набором группы $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ для всех простых p. Далее, согласно замечанию 1, пара матриц $D_1X_0D_1^{-1} \mod p$, $D_1Y_0^{-1}D_1^{-1} \mod p$, где D_1 определена в (9), является вторым порождающим набором группы $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ для всех простых p.

§4. Второй случай

В этом случае пара матриц $-X, Y$ имеет вид

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (46)$$

Как и в первом случае, рассмотрим коммутатор этой пары

$$X_0Y_0X_0^{-1}Y_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Заметим, что для простых p, отличных от 2, 3 и 11, он сопряжён с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix}, \qquad (48)$$

а матрица перехода имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{121} & -\frac{89}{121} & -\frac{10}{121} \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{241}{1452} & \frac{89}{121} & \frac{10}{121} \\ \frac{1}{66} & -\frac{1}{66} & -\frac{1}{726} & -\frac{178}{121} & -\frac{20}{121} \\ -\frac{1}{22} & \frac{4}{33} & -\frac{75}{484} & \frac{435}{121} & \frac{49}{121} \\ -\frac{1}{132} & \frac{13}{264} & -\frac{359}{5808} & \frac{89}{121} & \frac{10}{121} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

то есть $C = G^{-1}X_0Y_0X_0^{-1}Y_0^{-1}G$.

Для всех простых p, отличных от 7 и 11, нижний блок матрицы C диагонализуем над $\bar{\mathbb{Z}}_p$, и его порядок не делится на p, поэтому некоторая степень $n(p)$ матрицы C имеет вид

$$C_1 := C^{n(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Заменим X_0, Y_0 на сопряжённые $X_1 = G^{-1}X_0G, Y_1 = G^{-1}Y_0G$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{577033}{1331} & \frac{549900}{1331} & -\frac{7036056}{14641} & \frac{127382910}{14641} & \frac{14336712}{14641} \\ \frac{1136040}{14641} & -\frac{1071283}{14641} & \frac{13565504}{161051} & -\frac{236158080}{161051} & -\frac{26577360}{161051} \\ -\frac{10080}{1331} & \frac{9376}{1331} & -\frac{117135}{14641} & \frac{1928040}{14641} & \frac{216960}{14641} \\ -\frac{7960}{14641} & \frac{7740}{14641} & -\frac{89280}{161051} & \frac{1900411}{161051} & \frac{195760}{161051} \\ \frac{70844}{14641} & -\frac{68886}{14641} & \frac{794592}{161051} & -\frac{15480304}{161051} & -\frac{1581213}{161051} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} & \frac{14}{11} & -\frac{587}{242} & \frac{3144}{121} & \frac{354}{121} \\ \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{45}{121} & \frac{3618}{121} & \frac{408}{121} \\ \frac{12}{11} & -\frac{12}{11} & \frac{120}{121} & -\frac{1068}{121} & -\frac{120}{121} \\ \frac{1}{132} & \frac{7}{264} & -\frac{257}{5808} & -\frac{30966}{121} & -\frac{3486}{121} \\ -\frac{3}{44} & -\frac{61}{264} & \frac{749}{1936} & \frac{274008}{121} & \frac{30846}{121} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

при этом $C_1 \in \langle X_1, Y_1 \rangle$.

Рассмотрим матрицу $F = C_1^{-11}Y_1^2C_1^2Y_1C_1Y_1^2C_1^2Y_1$,

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{577033}{1331} & \frac{549900}{1331} & -\frac{7036056}{14641} & \frac{127382910}{14641} & \frac{14336712}{14641} \\ \frac{1136040}{14641} & -\frac{1071283}{14641} & \frac{13565504}{161051} & -\frac{236158080}{161051} & -\frac{26577360}{161051} \\ -\frac{10080}{1331} & \frac{9376}{1331} & -\frac{117135}{14641} & \frac{1928040}{14641} & \frac{216960}{14641} \\ -\frac{7960}{14641} & \frac{7740}{14641} & -\frac{89280}{161051} & \frac{1900411}{161051} & \frac{195760}{161051} \\ \frac{70844}{14641} & -\frac{68886}{14641} & \frac{794592}{161051} & -\frac{15480304}{161051} & -\frac{1581213}{161051} \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Для почти всех p (исключения $p = 2$, $p = 3$, $p = 11$, $p = 89$, $p = 199$) она сопряжена с матрицей

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{686426}{1331} \end{pmatrix}, \tag{54}$$

а матрица перехода имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1331}{689088} & -\frac{1331}{689088} & -\frac{6691960725}{840744784} & -\frac{10777}{631664} \\ -\frac{979}{4586742} & \frac{14641}{9302688} & -\frac{11693166419}{6039528314112} & -\frac{7184672635}{420372392} & -\frac{10375}{315832} \\ \frac{979}{18346968} & -\frac{14641}{37210752} & \frac{45640638197}{96632453025792} & -\frac{71934975}{9553918} & -\frac{105}{7178} \\ \frac{2937}{254819} & 0 & \frac{19487171}{894744935424} & \frac{684318215}{1261117176} & \frac{995}{947496} \\ -\frac{2937}{28712} & 0 & 0 & -\frac{12180864227}{2522234352} & -\frac{17711}{1894992} \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Для простых p, отличных от 3, 37, 97, 199, 859, нижний блок матрицы F_1 диагонализуем над $\bar{\mathbb{Z}}_p$, и его порядок не делится на p, поэтому некоторая степень $m(p)$ матрицы F_1 имеет вид

$$t_{23}(1) = F_1^{m(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Заменим X_1, Y_1 на сопряжённые $X_2 = T^{-1}X_1T, Y_2 = T^{-1}Y_1T$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 & X_2^5 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} Y_2^1 & Y_2^2 & Y_2^3 & Y_2^4 & Y_2^5 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

где

$$X_2^1 = \left(\frac{18357737}{18346968}, \frac{891939399}{3730804979}, -\frac{3255264}{3730804979}, \frac{118459}{7302093264}, -\frac{108120137}{7302093264}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^2 = \left(-\frac{161051}{37210752}, -\frac{1445605}{1894992}, \frac{254}{39479}, -\frac{1771561}{14809879296}, \frac{1616942723}{14809879296}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^3 = \left(\frac{130513138928359}{96632453025792}, -\frac{314357429527}{4921097144832}, -\frac{406750613}{403633296}, \frac{25346582434085}{38459716304265216}, -\frac{15284053931131447}{38459716304265216}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^4 = \left(-\frac{71934975}{868538}, \frac{3752902978958700}{769334023909}, \frac{94719371241600}{769334023909}, \frac{888014157}{691356248}, -\frac{252088676203385}{920195166088}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$X_2^5 = \left(-\frac{1155}{7178}, \frac{5310102420}{578012039}, \frac{138257280}{578012039}, \frac{3047}{5713688}, -\frac{15284053931131447}{38459716304265216}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^1 = \left(-\frac{616739695}{2641963392}, \frac{1016515158515}{537235916976}, \frac{6354885690}{3730804979}, -\frac{52843483}{87625119168}, \frac{151165999019}{481938155424}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^2 = \left(\frac{3958062581}{476892997632}, \frac{656712557}{818636544}, \frac{10795}{315832}, -\frac{98372879}{177718551552}, \frac{23500739141}{88859275776}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^3 = \left(-\frac{606582634263221737}{1238441517978550272}, -\frac{3798718801311937}{2125913966567424}, -\frac{5207530313}{6458132736}, \frac{251327730605611}{461516595651182592}, -\frac{64446556667163385}{230758297825591296}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^4 = \left(\frac{9811203285511}{673436571984}, -\frac{47388998183278157}{16925348525998}, \frac{107947437215184}{8462674262999}, \frac{94471884701}{11407378092}, \frac{99575}{5713688}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2^5 = \left(\frac{123283}{7027262}, -\frac{26029030482}{6358132429}, \frac{348276672}{6358132429}, \frac{99575}{5713688}, -\frac{68779327167}{7604918728}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Положим $C_2 = T^{-1}C_1T \in \langle X_2, Y_2 \rangle$ и $M = XYXY^{-1}$, при этом $C_2 = M^{n(p)}$, то есть C_2 неявно выражается через M. Заметим, что используя (50) и (55), можно получить явный вид C_2. Таким образом,

$$t_{23}(1) = (C_2^{-2}Y_2^2C_2^{13}Y_2C_2^{-2}Y_2^2C_2Y_2)^{m(p)}.$$

Напомним, что $C_2, t_{23}(1) \in \langle X_2, Y_2 \rangle$. Чтобы найти трансвекции по второй строке, перебираем слова в образующих $X_2, Y_2, C_2, t_{23}(1)$ и ищем слово h, удовлетворяющее условию

$$he_2 = e_2. \tag{59}$$

Тогда $h^{-1}t_{23}(1)h = h^{-1}(I + e_2 \cdot e_3^{\mathrm{T}})h = I + e_2 \cdot e_3^{\mathrm{T}}h$, то есть получаем трансвекции по второй строке.

Получены следующие матрицы, удовлетворяющие (59):

$$h_1 = Y_2X_2Y_2^2X_2C_2, \tag{60}$$

$$h_2 = (t_{23}(1)^2C_2Y_2X_2Y_2^2X_2)^2, \tag{61}$$

$$h_3 = X_2C_2Y_2X_2Y_2^2, \tag{62}$$

$$h_4 = (C_2Y_2C_2X_2(C_2Y_2)^2)^2. \tag{63}$$

Соответствующие им трансвекции:

$$h_1^{-1}t_{23}(1)h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{267631529760}{41038854769} & 1 & -\frac{4528967}{509638} & \frac{3266365805655120}{8462674262999} & \frac{4749302160}{6358132429} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$h_2^{-1}t_{23}(1)h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2408683767840}{41038854769} & 1 & \frac{80502911}{1019276} & -\frac{22864560639585840}{8462674262999} & -\frac{33245115120}{6358132429} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{65}$$

$$h_3^{-1}t_{23}(1)h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{267631529760}{41038854769} & 1 & -\frac{114769}{1019276} & \frac{3266365805655120}{8462674262999} & \frac{4749302160}{6358132429} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$h_4^{-1}t_{23}(1)h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{15029553888}{451427402459} & 1 & \frac{127459229}{123332396} & \frac{137843281376841168}{1023983585822879} & \frac{112965250320}{769334023909} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Напомним, что в знаменателях элементов матриц (64)–(67) присутствуют только те простые, которые входят в знаменатели элементов матрицы T, то есть которые включены в список исключительных простых. Составим матрицу размера 5×5, строками которой являются векторы e_3^{T}, $e_3^{\mathrm{T}}h_1$, $e_3^{\mathrm{T}}h_2$, $e_3^{\mathrm{T}}h_3$, $e_3^{\mathrm{T}}h_4$. Посчитаем миноры четвёртого порядка и найдём наибольший общий делитель их числителей. Он равен $2^{20}\times 3^{17}\times 5^2\times 7\times 29^2\times 89\times 127^3\times 199\times 487$, поэтому для всех простых, кроме рассмотренных выше и $p = 5, 7, 29, 127, 487$, найдены 4 линейно независимых вектора, которые порождают подпространство $\mathbb{Z}_p^5$, ортогональное e_2^{T}. Согласно (7) можно получить элементарные трансвекции по второй строке $t_{21}(1)$, $t_{24}(1)$, $t_{25}(1)$.

Чтобы доказать теорему 2, достаточно теперь получить элементарные трансвекции по второму столбцу. Обозначим $t_{21}(s)$ – параметризованную трансвекцию, $s\in\mathbb{Q}$. Пусть h – слово в образующих X_2, Y_2, C_2, вновь рассматриваемых над $\mathbb{Q}$, и положим $g = t_{21}(s)h$. Выберем s так, чтобы $e_2^{\mathrm{T}}g \in \left\langle e_2^{\mathrm{T}}\right\rangle^{\perp}$, при этом $s \mod p$ корректно определено для почти всех p и $t_{21}(s \mod p)\in\langle t_{21}(1)\rangle$. Поскольку в $\langle X_2, Y_2\rangle$ существует матрица $I+e_2\cdot u^{\mathrm{T}}$, где $u^{\mathrm{T}} = e_2^{\mathrm{T}}g$, то $g(I+e_2\cdot u^{\mathrm{T}})g^{-1} = I+ge_2\cdot u^{\mathrm{T}}g^{-1} = I+ge_2\cdot e_2^{\mathrm{T}}$. Далее, найдём достаточное количество матриц g, чтобы с их помощью можно было породить все элементарные трансвекции по второму столбцу согласно (7). Получены следующие матрицы g:

$$g_1 = t_{21}\left(-\frac{4975574628456}{43538688391}\right)C_2Y_2, \tag{68}$$

$$g_2 = t_{21}\left(-\frac{412223256}{1771561}\right)C_2X_2, \tag{69}$$

$$g_3 = t_{21}\left(\frac{1440179769240}{54032156629}\right)(Y_2X_2)^2, \tag{70}$$

$$g_4 = t_{21}\left(\frac{44922903678792}{584589376481}\right)Y_2^2X_2. \tag{71}$$

Отметим, что простые, входящие в знаменатели дробей формул (68)–(71), уже присутствуют в списке исключительных. Трансвекции, соответствующие матрицам (68)–(71):

$$I + g_1 e_2 \cdot e_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3958062581}{476892997632} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10795}{315832} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{251254201}{177718551552} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{66829265239}{88859275776} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$I + g_2 e_2 \cdot e_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{14641}{3100896} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3048}{434269} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{512435}{205692768} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{275415811}{205692768} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

$$I + g_3 e_2 \cdot e_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{446546749}{39741083136} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{96647}{868538} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{74244511}{39493011456} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{102939172523}{118479034368} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{74}$$

$$I + g_4 e_2 \cdot e_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4831317161}{238446498816} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{54991}{1737076} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{69735083}{355437103104} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{13721998345}{355437103104} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

В знаменателях элементов матриц (72)–(75) присутствуют только те простые, которые входят в знаменатели элементов матрицы T, то есть которые включены в список исключительных простых. Составим матрицу размера 4×5, столбцами которой являются векторы $g_1 e_2$, $g_2 e_2$, $g_3 e_2$, $g_4 e_2$ и найдём минор, не содержащий второй (нулевой) столбец. Значения p, для которых его числитель равен 0, являются исключительными. Числитель минора равен $-5^3 \times 11^9 \times 29 \times 71 \times 127$, поэтому для всех простых, кроме рассмотренных выше и $p = 71$, найдены 4 линейно независимых вектора, которые порождают подпространство $\mathbb{Z}_p^5$, ортогональное e_2. Согласно (7) можно получить элементарные трансвекции по второму столбцу для почти всех p.

Соотношение (8) теперь позволяет утверждать наличие всех элементарных трансвекций в группе $\langle X_2, Y_2\rangle$ для почти всех p. Значит, $\langle X_2, Y_2\rangle = \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ для почти всех p. Исключительные случаи получаются для $p = 2, 3, 5, 7, 11, 29, 37, 71, 89, 97, 127, 199, 487, 859$. Используя классификацию максимальных подгрупп $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$, приведённую в [5], докажем, что в этих случаях $\langle X_2 \mod p, Y_2 \mod p\rangle = \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$.

При рассмотрении исключительных случаев для удобства будем работать с исходной парой матриц X_0, Y_0. Так же, как и в первом случае, докажем, что $\langle X_0, Y_0\rangle$ не является максимальной геометрической подгруппой класса $\mathcal{C}_1$. Для этого достаточно доказать, что $\langle X_0, Y_0\rangle$ является абсолютно неприводимой, то есть не существует собственного подпространства $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$, инвариантного относительно $\langle X_0, Y_0\rangle$. Предположим, что существует собственное $\langle X_0, Y_0\rangle$-инвариантное подпространство (а значит, и $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle$-инвариантное подпространство). Поскольку 1 – собственное число Y_0 кратности 1, то либо собственный вектор Y_0, отвечающий собственному числу 1, лежит в $\langle X_0, Y_0\rangle$-инвариантном подпространстве, либо собственный вектор Y_0^{T}, отвечающий собственному числу 1, лежит в $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle$-инвариантном подпространстве.

Обозначим u, v – собственные векторы матриц Y_0 и Y_0^{T}, соответствующие собственному числу 1,

$$u = (-1, 2, 0, 6, 3)^{\mathrm{T}}, \tag{76}$$

$$v = (0, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}. \tag{77}$$

Покажем, что на самом деле $\langle X_0, Y_0\rangle$-инвариантное и $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle$-инвариантное подпространства совпадают с $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$. Для этого достаточно указать векторы из множеств $\langle X_0, Y_0\rangle\, u$ и $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle v$, порождающие $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$.

Рассмотрим следующие векторы:

$$\begin{aligned} u &= (-1, 2, 0, 6, 3)^{\mathrm{T}}, \\ X_0 u &= (-1, 2, 0, -5, -3)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0 X_0 u &= (5, -4, 1, -7, -3)^{\mathrm{T}}, \\ Y_0^2 X_0 u &= (-1, -4, -1, -6, -3)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

$$X_0Y_0^2X_0u = (-1,-4,-1,7,4)^{\mathrm{T}},$$
$$Y_0X_0Y_0^2X_0u = (-8,9,-1,10,4)^{\mathrm{T}}$$

и составим из них матрицу, рассматривая её элементы как целые числа. Посчитаем миноры пятого порядка и найдём наибольший общий делитель входящих в них чисел. Он равен 1, поэтому $\langle X_0, Y_0\rangle u$ порождает $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$. Значит, $\langle X_0, Y_0\rangle$-инвариантное подпространство совпадает со всем пространством и, следовательно, не является собственным.

Рассмотрим следующие векторы:

$$\begin{aligned}
v &= (0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\\
X_0^{\mathrm{T}}v &= (0,0,-1,0,-1)^{\mathrm{T}},\\
Y_0^{\mathrm{T}}X_0^{\mathrm{T}}v &= (0,0,0,-1,1)^{\mathrm{T}},\\
(Y_0^{\mathrm{T}})^2X_0^{\mathrm{T}}v &= (0,0,1,1,-3)^{\mathrm{T}},\\
X_0^{\mathrm{T}}(Y_0^{\mathrm{T}})^2X_0v &= (-1,0,4,-1,3)^{\mathrm{T}},\\
Y_0^{\mathrm{T}}X_0^{\mathrm{T}}(Y_0^{\mathrm{T}})^2X_0^{\mathrm{T}}v &= (0,-1,1,5,-8)^{\mathrm{T}},\\
((Y_0^{\mathrm{T}})^2X_0^{\mathrm{T}})^2v &= (1,1,-5,-4,9)
\end{aligned}$$

и составим из них матрицу, рассматривая её элементы как целые числа. Посчитаем миноры пятого порядка и найдём наибольший общий делитель входящих в них чисел. Он равен 1, поэтому $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle u$ порождает $\bar{\mathbb{Z}}_p^5$. Значит, $\left\langle X_0^{\mathrm{T}}, Y_0^{\mathrm{T}}\right\rangle$-инвариантное подпространство совпадает со всем пространством и, следовательно, не является собственным.

Таким образом, группа $\langle X_0, Y_0\rangle$ неприводима и не может быть максимальной геометрической подгруппой класса $\mathcal{C}_1$.

Аналогично первому случаю разберём оставшиеся классы, учитывая, что класс $\mathcal{C}_5$ и одна из максимальных подгрупп класса $\mathcal{C}_8$ не реализуются.

Простое	Класс, максимальная подгруппа и её порядок			Слово	Порядок слова
2	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	5×31	Y_0	**3**
3	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1}:5$	5×11^2	$Y_0(X_0Y_0^2)^2\times(X_0Y_0)^2X_0$	$2\times\mathbf{13}$
	$\mathcal{C}_8$	$d\times\mathrm{SO}_5(q)$	$2^7\times 3^4\times 5$		
	$\mathscr{S}$	$d\times\mathrm{L}_2(11)$	$2^3\times 3\times 5\times 11$		
	$\mathscr{S}$	M_{11}	$2^4\times 3^2\times 5\times 11$		

5	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^{11}\times 3\times 5$ $5\times 11\times 71$ $2^7\times 3^2\times 5^4\times 13$ $2^3\times 3\times 5\times 11$	$Y_0^2X_0$	$2^2\times \mathbf{31}$
7	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^7\times 3^5\times 5$ 5×2801 $2^9\times 3^2\times 5^2\times 7^4$ $2^6\times 3^4\times 5$	$X_0Y_0X_0Y_0^2\times$ $(Y_0X_0)^4Y_0^2\times$ $(Y_0X_0)^{12}Y_0^2$	$2\times 3^2\times \mathbf{19}$
11	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^7\times 3\times 5^5$ $5^2\times 3221$ $2^3\times 3\times 5^4\times 11$ $2^7\times 3^4\times 5$	X_0Y_0	$2\times 5\times 7\times$ $11\times \mathbf{19}$
29	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$	$2^{11}\times 3\times 5\times 7^4$ 5×732541 $27\times 3^2\times 5^2\times 7^2\times$ $29^4\times 421$	$X_0Y_0^2(X_0Y_0)^2\times$ $(X_0Y_0^2)^2$	$2\times 5\times 7\times$ $13\times \mathbf{67}$
37	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$ $d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^{11}\times 3^9\times 5$ $5\times 11\times 41\times 4271$ $2^7\times 3^4\times 5\times 19^2\times$ $37^4\times 137$ $2^3\times 3\times 5\times 11$ $2^6\times 3^4\times 5$	$(Y_0^2X_0)^2Y_0X_0$	$2^2\times 3\times$ $19\times \mathbf{67}$
71	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_6$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $5_+^{1+2}:\mathrm{Sp}_2(5)$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^7\times 3\times 5^5\times 7^4$ $5^2\times 11\times 211\times 2221$ $2^4\times 3^2\times 5^4\times 7\times 71$ $2^9\times 3^4\times 5^3\times 7^2\times$ $71^4\times 2521$ $2^3\times 3\times 5\times 11$	X_0Y_0	$2\times 5\times$ $7\times \mathbf{5113}$
89	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$	$2^{15}\times 3\times 5\times 114$ $5\times 131\times 691\times 701$ $29\times 3^4\times 5^2\times 11^2\times$ $17\times 894\times 233$ $2^3\times 3\times 5\times 11$	X_0Y_0	$2^4\times 3^2\times 5\times$ $11\times \mathbf{8011}$
97	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$ $d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^{23}\times 3^5\times 5$ $5\times 11\times 31\times 262321$ $213\times 3^2\times 5\times 7^4\times$ $97^4\times 941$ $2^3\times 3\times 5\times 11$ $2^6\times 3^4\times 5$	$(X_0Y_0(X_0Y_0^2)^2)^2\times$ X_0Y_0	$2^5\times 3^2\times \mathbf{3169}$
127	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^7\times 3^9\times 5\times 7^4$ $5\times 11\times 31\times 262321$ $217\times 3^4\times 5\times 7^2\times$ $127^4\times 1613$ $2^6\times 3^4\times 5$	$(X_0Y_0^2)^2X_0Y_0$	$3^3\times 7\times \mathbf{5419}$
199	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$ $\mathcal{C}_8$ $\mathscr{S}$ $\mathscr{S}$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$ $d\times \mathrm{SO}_5(q)$ $d\times \mathrm{L}_2(11)$ $d\times \mathrm{U}_4(2)$	$2^7\times 3^9\times 5\times 114$ $5\times 71\times 22199431$ $29\times 3^4\times 5^4\times 11^2\times$ $199^4\times 19801$ $2^3\times 3\times 5\times 11$ $2^6\times 3^4\times 5$	$Y_0X_0(Y_0^2X_0)^2$	$2\times 3^3\times$ $11\times \mathbf{13267}$
487	$\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$	$(q-1)^4:\mathrm{S}_5$ $\frac{q^5-1}{q-1}:5$	$2^7\times 3^{21}\times 5$ $5\times 11^2\times 181\times 2573621$	X_0Y_0	$2^4\times 3^6\times 7\times$

	$\mathcal{C}_8$	$d \times \mathrm{SO}_5(q)$	$29 \times 3^{10} \times 5 \times 37 \times$ $612 \times 4874 \times 641$		$61 \times \mathbf{11317}$
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3 \times 3 \times 5 \times 11$		
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{U}_4(2)$	$2^6 \times 3^4 \times 5$		
859	$\mathcal{C}_2$	$(q-1)^4 : \mathrm{S}_5$	$2^7 \times 3^5 \times 5 \times 114 \times 134$	$X_0 Y_0^2$	$2 \times 3^2 \times 11 \times$ $13 \times \mathbf{246247}$
	$\mathcal{C}_3$	$\frac{q^5-1}{q-1} : 5$	$5 \times 181 \times 631 \times 4772771$		
	$\mathcal{C}_8$	$d \times \mathrm{SO}_5(q)$	$27 \times 3^2 \times 5^2 \times 11^2 \times 13^2 \times$ $43^2 \times 137 \times 8594 \times 2693$		
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{L}_2(11)$	$2^3 \times 3 \times 5 \times 11$		
	$\mathscr{S}$	$d \times \mathrm{U}_4(2)$	$2^6 \times 3^4 \times 5$		

Таким образом, пара $X_0 \mod p$, $Y_0 \mod p$ является третьим порождающим набором группы $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$. Далее, согласно замечанию 1, пара матриц $D_2 X_0 D_2^{-1} \mod p$, $D_2 Y_0^{-1} D_2^{-1} \mod p$, где D_2 определена в (9), является четвёртым порождающим набором группы $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ для всех простых p. Это завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. М. А. Всемирнов, *О* (2,3)*-порождении матричных групп над кольцом целых чисел*, I. — Алгебра и анализ **19**, No. 6 (2007), 22–58.
2. М. А. Всемирнов, *О* (2,3)*-порождении матричных групп над кольцом целых чисел*, II. — (в печати).
3. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* — Springer Science & Business Media, **291** (2013).
4. А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Некоторые факты из жизни* $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 153–162.
5. J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal, *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* — London Math. Soc. Lect. Note Ser., Cambridge university press, **407**, 2013.
6. L. Di Martino, N. Vavilov, $(2,3)$*-generation of* $\mathrm{SL}(n,q)$. I. *Cases* $n = 5, 6, 7$. — Comm. Algebra **22**, No. 4 (1994), 1321–1347.
7. L. Di Martino, N. Vavilov, $(2,3)$*-generation of* $\mathrm{SL}(n,q)$. II. *Cases* $n \geqslant 8$. — Comm. in Algebra **22**, No. 4 (1996), 487–515.
8. M. C. Tamburini, J. S. Wilson, *On the* $(2,3)$*-generation of some classical groups*, II. — J. Algebra **176**, No. 2 (1995), 667.
9. M. C. Tamburini, P. Zucca, *On a question of M. Conder.* — Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni **11**, No. 1 (2000), 5–7.
10. M. C. Tamburini, *The* (2,3)*-generation of matrix groups over the integers.* — Proceedings of the Conference Ischia Group Theory 2008, Ischia 1–4 April 2008. World Scientific, (2009), 258–264.
11. P. Sanchini, M. C. Tamburini, *Constructive* (2,3)*-generation: a permutational approach.* — Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano **64**, No. 1 (1994), 141.
12. M. Vsemirnov, *The group* $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ *is* (2,3)*-generated.* — J. Group Theory **10**, No. 4 (2007), 425–430.

13. М. А. Всемирнов, *Является ли группа* $\mathrm{SL}(6,\mathbb{Z})$ (2,3)*-порождённой?* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 101–130.
14. Я. Н. Нужин, *Об одном вопросе М. Кондера.* — Мат. заметки **70**, No. 1 (2001), 79–87.

Shkolnik D. I. On $(2,3)$-generation of $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$.

It is proved that the group $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}_p)$ is $(2,3)$-generated for all primes p.

E-mail: danshkolnik@yandex.ru

Поступило 4 октября 2022 г.