Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

А. В. Семенов

BV-СТРУКТУРА НА КОГОМОЛОГИЯХ ХОХШИЛЬДА ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР КВАТЕРНИОННОГО ТИПА: СЛУЧАЙ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

§1. Введение

Когомологии Хохшильда являются хорошо известной и богатой структурой (см. [9]), их изучению посвящен целый ряд работ: см. [2, 5, 7, 8, 11, 18], включая работу [6], где приведен полный список статей, посвященных когомологиях Хохшильда. Трэдлер ввел и описал структуру BV-алгебры на когомологиях Хохшильда (см. [16]), которая позволяет определить скобку Герстенхабера (а значит, и структуру алгебры Ли) на $HH^*(R)$ (см., например, [4]). Проблемам задания и описания скобки Герстенхабера (и BV-структуры) посвящен ряд работ Меничи (см. [14, 15]), Янга (см. [19]), уже упоминавшиеся работы Трэдлера [16] и Иванова [12], а также работа Волкова о BV-структуре фробениусовых алгебр (см. [17]). Это быстро развивающаяся и богатая на приложения область современной гомологической алгебры.

Существенным минусом всех рассматриваемых структур является то, что они описаны в терминах бар-резольвенты алгебры, размерность членов которой возрастает экспоненциально, поэтому она непригодна для реальных приложений. Для того, чтобы обойти эту проблему, в этой статье используется метод сравнивающих гомоморфизмов для резольвент.

Данная работа является второй из цикла изучения BV-структуры на алгебрах когомологий Хохшильда кватернионного типа с параметрами $(k, 0, d)$ согласно классификации Эрдманн (см. [3]), описанной

Ключевые слова: гомологическая алгебра, когомологии Хохшильда, BV-структура, алгебра Ли, скобка Герстенхабера.

Автор благодарит за поддержку программу социальных инверстиций “Родные города” ПАО “Газпромнефть.” Автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит его спонсоров и жюри. Также автор поддержан соглашением между МОН и ПОМИ РАН No. 075-15-2019-1620.

в статье [6]. Рассматривается алгебра $R(2,0,d)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, важнейшим частным случаем которой является алгебра $R(2,0,0)$, BV-структура на которой была вычислена в основополагающей работе [10]. Случай четного $k>2$ для BV-структуры когомологий Хохшильда для $R(k,0,d)$ рассмотрен в первой статье цикла (см. [20]), а в данной статье рассматривается принципиально отличный от него случай $k=2$. Таким образом, полученный результат обобщает итоговую теорему статьи [10].

§2. Основные определения

2.1. (Ко)гомологии Хохшильда. Для (ассоциативной) алгебры A над полем K обозначим через $A^e = A\otimes A^{op}$ обертывающую алгебру для A. У алгебры A есть свободная бар-резольвента, имеющая вид

$$A \xleftarrow{\ \mu\ } A^{\otimes 2} \xleftarrow{\ d_1\ } A^{\otimes 3} \xleftarrow{\ d_2\ } \dots \xleftarrow{\ d_n\ } A^{\otimes n+2} \xleftarrow{\ d_{n+1}\ } A^{\otimes n+3}\dots$$

и заданная с помощью дифференциала

$$d_n(a_0\otimes \dots a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0\otimes\dots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\dots\otimes a_{n+1}.$$

Можно построить нормализованную бар-резольвенту, в которой n-ым элементом является $\overline{Bar}(A)_n = A\otimes \overline{A}^{\otimes n}\otimes A$, где $\overline{A} = A/\langle 1_A\rangle$, а дифференциал индуцируется бар-резольвентой.

Определение 1. Назовем n-ой *когомологией* Хохшильда пространство $HH^n(A) = \operatorname{Ext}^n_{A^e}(A,A)$ для $n\geqslant 0$.

Определение 2. Назовем n-ой *гомологией* Хохшильда $HH_n(A)$ n-ую гомологию комплекса $A\otimes_{A^e} Bar_\bullet(A)\simeq A^{\times(\bullet+1)}$, где дифференциал $\partial_n : A^{\otimes(n+1)} \longrightarrow A^{\otimes n}$ индуцирован стрелкой, которая отправляет $a_0\otimes \dots\otimes a_n$ в

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0\otimes\dots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\dots\otimes a_n + (-1)^n a_na_0\otimes\dots\otimes a_{n-1}.$$

На когомологиях Хохшильда определено кап-произведение: для классов $a\in HH^n(A)$ и $b\in HH^m(A)$ их кап-произведение $a\smile b\in HH^{n+m}(A)$ определено классом кап-произведения представителей $a\in$

$\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$ и $b \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$. Таким образом, с помощью линейного продолжения $\smile$: $HH^n(A) \times HH^m(A) \longrightarrow HH^{n+m}(A)$ пространство когомологий Хохшильда $HH^*(A) = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} HH^n(A)$ становится градуированно-коммутативной алгеброй (с единицей).

2.2. Скобка Герстенхабера. Для

$$f \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, A) \quad \text{и} \quad g \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$$

определим $f \circ_i g \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n+m-1}, A)$ следующим образом:

(1) если $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$, то $f \circ_i g(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+m-1})$ положим равным $f(a_1 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \ldots a_{i+m-1}) \otimes \ldots \otimes a_{n+m-1})$;

(2) если $n \geqslant 1$ и $m = 0$, то $f \circ_i g(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1})$ положим равным $f(a_1 \otimes \ldots a_{i-1} \otimes g \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_{n+m-1})$, так как в этом случае $g \in A$;

(3) если n, m не попадают в первые два случая, то доопределим $f \circ_i g$ нулем.

Определение 3. Определим *скобку Герстенхабера* элементов $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ и $g \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$ по формуле

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f,$$

где $a \circ b = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{(m-1)(i-1)} a \circ_i b$.

Этот элемент, очевидно, попадает в $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n+m-1}, A)$. Теперь для $a \in HH^n(A)$ и $b \in HH^m(A)$ определим $[a, b] \in HH^{n+m-1}(A)$ как класс соответствующей скобки представителей классов a и b. Эта скобка индуцирует корректно определенное отображение

$$[-, -] : HH^*(A) \times HH^*(A) \longrightarrow HH^*(A),$$

превращающее алгебру когомологий Хохшильда в градуированную алгебру Ли. Эта скобка называется *скобкой Герстенхабера*, а алгебра $(HH^*(A), \smile, [-, -])$ является алгеброй Герстенхабера (см. [4]).

2.3. BV-структура.

Определение 4. *Алгеброй Баталина-Вилковского* (или BV-алгеброй) называется алгебра Герстенхабера $(A^\bullet, \smile, [-, -])$ вместе с оператором $\Delta^\bullet$ степени -1, таким, что $\Delta \circ \Delta = 0$ и

$$[a, b] = -(-1)^{(|a|-1)|b|}(\Delta(a \smile b) - \Delta(a) \smile b - (-1)^{|a|} a \smile \Delta(b)$$

для однородных $a, b \in A^{\bullet}$.

Для $a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \in A^{\otimes(n+1)}$ зададим

$$\mathfrak{B}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{in} 1 \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} (-1)^{in} a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{B}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) \in A^{\otimes(n+2)} \simeq A \otimes_{A^e} A^{\otimes(n+3)}$, поэтому этот оператор поднимается до цепного отображения соответствующего комплекса, причем $\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} = 0$, а значит, корректно индуцирует отображение на гомологиях Хохшильда.

Определение 5. Оператор $\mathfrak{B} : HH_{\bullet}(A) \longrightarrow HH_{\bullet+1}(A)$ называется $\mathfrak{B}$-оператором Конна.

Определение 6. Алгебра A называется симметрической, если она изоморфна своей двойственной алгебре $DA = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ как A^e-модуль.

В случае симметрической алгебры существует невырожденная симметрическая билинейная форма $\langle -, - \rangle : A \times A \longrightarrow K$, и обратно – в случае существования такой формы алгебра является симметрической. Тогда для симметрической алгебры гомологии и когомологии Хохшильда двойственны друг другу:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(A \otimes_{A^e} Bar_{\bullet}(A), K) &\simeq \mathrm{Hom}_{A^e}(Bar_{\bullet}(A), \mathrm{Hom}_K(A, K)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{A^e}(Bar_{\bullet}(A), A), \end{aligned}$$

что позволяет задать оператор $\Delta : HH^n(A) \longrightarrow HH^{n-1}(A)$, двойственный оператору Конна.

Тогда когомологии Хохшильда симметрической алгебры A являются BV-алгеброй (см. [16]), причем, как уже было отмечено, оператор Конна на гомологиях соответствует оператору Δ на когомологиях. Справедлива следующая теорема Трэдлера.

Теорема 1 ([13, Теорема 1]). *Определенные выше кап-произведение, скобка Герстенхабера и оператор Δ превращают $HH^*(A)$ в BV-алгебру, причем для $f \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$ элемент $\Delta(f) \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes(n-1)}, A)$*

задан уравнением

$$\langle \Delta(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}), a_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} \langle f(a_i \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}), 1 \rangle$$

для $a_i \in A$.

Замечание 1. Все конструкции, определения и теоремы из этой части переносятся на нормализованную бар-резольвенту.

§3. Стягивающая гомотопия

3.1. Резольвента. Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $d \in K$. Рассмотрим алгебру $R(2,0,d) = K\langle X, Y\rangle / I$, где $I = \langle X^2 + YXY, Y^2 + XYX + d(XY)^2, X(YX)^2, Y(XY)^2 \rangle$ (заметим, что тогда $(XY)^2 + (YX)^2 \in I$). Пусть B – стандартный базис алгебры $R = R(2,0,d)$. Тогда, очевидно, множество $B_1 = \{u \otimes v \mid u, v \in B\}$ является базисом обертывающей алгебры $\Lambda = R \otimes R^{op}$.

Алгебры семейства $R(2,0,d)$ симметрические, что проверяется непосредственно, используя следующую невырожденную симметрическую билинейную форму

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad b_1 b_2 \in Soc(R), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, для того, чтобы описать структуру градуированной алгебры Ли, необходимо лишь задать структуру Δ (см. определение 4) на когомологиях Хохшильда.

Умножение справа на элемент $\lambda \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм λ^* левого Λ-модуля Λ; в дальнейшем для простоты мы будем часто этот эндоморфизм обозначать также через λ. Иногда мы будем рассматривать эндоморфизм правого Λ-модуля Λ, индуцированный умножением слева на λ. Этот эндоморфизм будем обозначать через ${}^*\lambda$.

Для вычисления когомологий Хохшильда построим следующую 4-периодическую последовательность в категории Λ-модулей

$$P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} P_2 \xleftarrow{d_2} P_3 \xleftarrow{d_3} P_4 \xleftarrow{d_4} \ldots$$

где $P_0 = P_3 = \Lambda$, $P_1 = P_2 = \Lambda^2$, а дифференциалы описываются матрицами

$$d_0 = \begin{pmatrix} x \otimes 1 + 1 \otimes x & y \otimes 1 + 1 \otimes y \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} x\otimes 1+1\otimes x+y\otimes y, & 1\otimes yx+xy\otimes 1+d\otimes yxy+dxy\otimes y \\ 1\otimes xy+yx\otimes 1, & y\otimes 1+1\otimes y+x\otimes x+dx\otimes xy+dxyx\otimes 1 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} x\otimes 1+1\otimes x \\ y\otimes 1+1\otimes y+dy\otimes y+1\otimes dxyx+d^2y\otimes xyx \end{pmatrix}, \quad d_3=\lambda^*,$$

где $\lambda = \sum\limits_0^2 (xy)^i \otimes (xy)^{2-i} + yx\otimes yx + \sum\limits_0^1 y(xy)^i\otimes x(yx)^{1-i} + \sum\limits_0^1 x(yx)^i \otimes y(xy)^{1-i} + dxyx\otimes xyx$.

Рассмотрим также отображение $\mu : \Lambda \longrightarrow R$ такое, что $\mu(a\otimes b) = ab$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2 ([6, Предложение 3.1])**.** *Последовательность $P_\bullet$ вместе с пополняющим отображением μ представляет минимальную Λ-проективную резольвенту модуля R.*

Теперь, следуя [10], перепишем резольвенту и ее дифференциалы следующим образом – используя алгебру путей колчана данной алгебры, рассмотрим модули KQ_1, KQ_1^*, порожденные двумя элементами: $KQ_1 = \langle x, y\rangle$, и $KQ_1^* = \langle r_x, r_y\rangle$, где $r_x = x^2+yxy$, $r_y = y^2+xyx+d(xy)^2$. Используя отождествления вида

$$R\otimes KQ_1\otimes R = R\otimes\langle x\rangle\otimes R\oplus R\otimes\langle y\rangle\otimes R \simeq R\otimes R^{op}\oplus R\otimes R^{op} = \Lambda\oplus\Lambda,$$

имеем следующую проективную резольвенту $\{P_n\}_{n=0}^{+\infty}$ бимодулей:

$$R \xleftarrow{\mu} R\otimes R \xleftarrow{d_0} R\otimes KQ_1\otimes R \xleftarrow{d_1} R\otimes KQ_1^*\otimes R \xleftarrow{d_2} R\otimes R \xleftarrow{d_3} \ldots$$

где $P_{n+4} = P_n$ для $n\in\mathbb{N}$. Дифференциалы этой последовательности описываются следующим образом:

- $d_0(1\otimes x\otimes 1) = x\otimes 1+1\otimes x$, $d_0(1\otimes y\otimes 1) = y\otimes 1+1\otimes y$;
- $d_1(1\otimes r_x\otimes 1) = 1\otimes x\otimes x+x\otimes x\otimes 1+y\otimes x\otimes y+1\otimes y\otimes xy+yx\otimes y\otimes 1$, $d_1(1\otimes r_y\otimes 1) = 1\otimes y\otimes y+y\otimes y\otimes 1+x\otimes y\otimes x+dx\otimes y\otimes xy+dxyx\otimes y\otimes 1+1\otimes x\otimes yx+xy\otimes x\otimes 1+dxy\otimes x\otimes y+d\otimes x\otimes yxy$;
- $d_2(1\otimes 1) = x\otimes r_x\otimes 1+1\otimes r_x\otimes x+y\otimes r_y\otimes 1+1\otimes r_y\otimes y+dy\otimes r_y\otimes y+d\otimes r_y\otimes xyx+d^2y\otimes r_y\otimes xyx$;
- $d_3 = \rho\mu$, где $\rho(1) = \sum\limits_{b\in B} b^*\otimes b + dxyx\otimes xyx$, а $\mu : R\otimes R\longrightarrow R$ – гомоморфизм умножения.

3.2. Конструкция.

Определение 7. Стягивающей готомопией для комплекса

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{d_0} Q_0 \xleftarrow{d_1} Q_1 \xleftarrow{d_2} Q_2 \dots$$

является семейство K-гомоморфизмов $t_{n+1} : Q_n \longrightarrow Q_{n+1}$ вместе со стрелкой $t_0 : N \longrightarrow Q_0$ и такое, что $t_n d_n + d_{n+1} t_{n+1} = id_{Q_n}$ для всех $n \geqslant 0$ и $d_0 t_0 = id_N$.

Теперь построим стягивающую гомотопию $\{t_i : P_i \longrightarrow P_{i+1}\}_{i \geqslant -1}$ для рассматриваемой проективной резольвенты, следуя [1]. Для этого рассмотрим дифференцирование $C : KQ \longrightarrow KQ \otimes KQ_1 \otimes KQ$, переводящее путь $\alpha_1 ... \alpha_n$ в сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_1 ... \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} ... \alpha_n$, и рассмотрим его сужение $C : R \longrightarrow R \otimes KQ_1 \otimes R$. Тогда первые два члена стягивающей гомотопии допускают следующее описание: $t_{-1}(1) = 1 \otimes 1$, $t_0(b \otimes 1) = C(b)$ для $b \in B$. Зададим теперь $t_1 : P_1 \longrightarrow P_2$ по следующим правилам: для $b \in B$

$$t_1(b \otimes x \otimes 1)$$
$$= \begin{cases} 0, & bx \in B \setminus \{yxy\}, \\ 1 \otimes r_x \otimes 1, & b = x, \\ 1 \otimes r_x \otimes x^2 + x \otimes r_x \otimes x + x^2 \otimes r_x \otimes 1 + yx \otimes r_y \otimes xy, & b = (xy)^2, \\ T\Big(y \otimes r_x \otimes 1 + xy \otimes r_x \otimes y + 1 \otimes r_y \otimes xy + dx \otimes r_x \otimes xy + dyxy \otimes r_x \otimes y\Big), & b = Tyx, \\ y \otimes r_y \otimes 1 + 1 \otimes r_y \otimes y + dy \otimes r_y \otimes y + d \otimes r_y \otimes xyx + d^2 y \otimes r_y \otimes xyx, & b = yxy, \end{cases}$$

$$t_1(b \otimes y \otimes 1)$$
$$= \begin{cases} 0, & by \in B, \\ 1 \otimes r_y \otimes 1, & b = y, \\ T\Big(x \otimes r_y \otimes 1 + yx \otimes r_y \otimes x + 1 \otimes r_x \otimes yx + d \otimes r_x \otimes yxy & \\ + dyx \otimes r_y \otimes xy + dy \otimes r_x \otimes (xy)^2\Big), & b = Txy. \end{cases}$$

Для того, чтобы задать $t_2 : P_2 \longrightarrow P_3$, используем следующие правила:

- $t_2(x \otimes r_x \otimes 1) = 1 \otimes 1$,
- $t_2(y \otimes r_x \otimes 1) = dyxy \otimes y^2 + dyx \otimes (xy)^2$,
- $t_2(xy \otimes r_x \otimes 1) = dyxy \otimes y + dyx \otimes y^2$,
- $t_2(yx \otimes r_x \otimes 1) = y \otimes 1 + dxyx \otimes 1 + dxy \otimes x + dx \otimes yx$,
- $t_2(yxy \otimes r_x \otimes 1) = 1 \otimes x$,
- $t_2(xyx \otimes r_x \otimes 1) = xy \otimes 1 + x \otimes y + dyxy \otimes yx$,
- $t_2((xy)^2 \otimes r_x \otimes 1) = 1 \otimes yxy + yx \otimes y + y \otimes xy + yxy \otimes 1 + dxyx \otimes xy$,

и

- $t_2(b \otimes r_y \otimes 1) = 0$ для $b \in \{x, y, xyx\}$,

- $t_2(xy \otimes r_y \otimes 1) = x \otimes 1 + dx \otimes y$,
- $t_2(yx \otimes r_y \otimes 1) = dy^2 \otimes yxy + d(xy)^2 \otimes xy$,
- $t_2(yxy \otimes r_y \otimes 1) = yx \otimes 1 + y \otimes x + dyx \otimes y + dy \otimes xy + d^2xyx \otimes xy + dxyx \otimes x + dxy \otimes yxy$,
- $t_2((xy)^2 \otimes r_y \otimes 1) = xy \otimes x + x \otimes yx + xyx \otimes 1 + dx \otimes yxy + dxyx \otimes y + dxy \otimes xy$.

Наконец, определим $t_3 : R \otimes R \longrightarrow R \otimes R$ следующим образом: зададим $t_3((xy)^2 \otimes 1) = 1 \otimes 1$ и пусть во всех остальных случаях $t_3(b \otimes 1) = 0$. Осталось лишь положить $t_{n+4} = t_n$ для каждого $n \geqslant 4$.

Теорема 3. *Определенное выше семейство гомоморфизмов*

$$\{t_i : P_i \longrightarrow P_{i+1}\}_{i \geqslant 0}$$

вместе с $t_{-1} : R \longrightarrow P_0$ *задает стягивающую гомотопию данной проективной резольвенты.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ нужно проверить коммутативность нужного квадрата, что следует напрямую из определений для $n \leqslant 4$ и из периодичности для $n \geqslant 5$. □

§4. Связывающие гомоморфизмы

Рассмотрим теперь нормализованную бар-резольвенту $\overline{Bar}_\bullet(R) = R \otimes \overline{R}^{\otimes \bullet} \otimes R$, где $\overline{R} = R/(k \cdot 1_R)$. Наша задача сейчас состоит в описании связывающих гомоморфизмов

$$\Phi : P_\bullet \longrightarrow \overline{Bar}_\bullet(R)$$

и

$$\Psi : \overline{Bar}_\bullet(R) \longrightarrow P_\bullet.$$

Заметим, что у $\overline{Bar}_\bullet(R)$ есть стягивающая гомотопия $s_n(a_0 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1) = 1 \otimes a_0 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1$, а тогда $\Phi_n = s_{n-1}\Phi_{n-1}d^P_{n-1}$ и $\Phi_0 = id_{R \otimes R}$.

Лемма 1. *Если* $\Psi : \overline{Bar}_\bullet(R) \longrightarrow P_\bullet$ *– цепное отображение, определенное с помощью* $t_\bullet$, *то для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *и каждых* $a_i \in R$ *справедлива формула*

$$\Psi_n(1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1) = t_{n-1}(a_1 \Psi_{n-1}(1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1)).$$

Доказательство. Это в точности лемма 2.5 из статьи [10]. □

Чтобы описать BV-структуру на когомологиях Хохшильда, необходимо вычислить соответствующее дифференцирование $\Delta : HH^n(R) \longrightarrow HH^{n-1}(R)$. В силу соотношения Пуассона

$$[a \smile b, c] = [a, c] \smile b + (-1)^{|a|(|c|-1)}(a \smile [b, c]),$$

с учетом того, что $\mathrm{char}K = 2$, имеем

$$\Delta(abc) = \Delta(ab)c + \Delta(ac)b + \Delta(bc)a + \Delta(a)bc + \Delta(b)ac + \Delta(c)ab.$$

Таким образом, необходимо вычислить его только на элементах, порождающих кольцо когомологий Хохшильда, и на кап-произведении таких элементов. Далее, для каждого $\alpha \in HH^n(R)$ существует коцикл $f \in \mathrm{Hom}_K(P_n, R)$ такой, что $\Delta(\alpha) = \Delta(f\Psi_n)\Phi_{n-1}$, и, таким образом,

$$\begin{aligned}&\Delta(\alpha)(a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1})\\ &= \sum_{b \in B \setminus \{1\}} \sum_{i=1}^{n} \langle(-1)^{i(n-1)}\alpha(a_i \otimes ... \otimes a_{n-1} \otimes b \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{i-1}), 1\rangle b^*,\end{aligned}$$

где симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle b, c\rangle$ была определена выше.

§5. BV-структура

Для алгебраически замкнутого поля K характеристики 2 рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, w_1, w_2, w_3, e\},$$

где степени этих элементов заданы следующим образом:

$$|p_1|=|p_2|=|p_3|= |p_4|=0,\ |q_1|=|q_2|=1,\ |w_1|=|w_2|=|w_3| = 2,\ |e|=4,$$

и рассмотрим идеал $\mathcal{I}$ в $K[\mathcal{X}]$, порожденный следующими соотношениями

- Степени 0: p_ip_j для всех $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- Степени 1: $p_3q_1 + p_2q_2$, $p_1q_1 + dp_3q_1 + p_3q_2$, $p_1q_2 + p_2q_1$;
- Степени 2: p_2w_1, p_4w_1, p_3w_2, p_4w_2, p_4w_3, $p_1w_1 + p_2w_2$, $p_1w_1 + p_3w_3$, $p_1w_1 + p_4q_1^2$, $p_3w_1 + p_1w_2$, $p_3w_1 + p_2w_3$, $p_3w_1 + p_4q_2^2$, q_1q_2, $p_1w_3 + dp_2w_2$;
- Степени 3: $q_1w_1 + q_2w_2$, $q_1^3 + q_2^3$, $q_1w_1 + q_2w_1 + q_1w_3 + p_1q_1w_1$, $q_1w_1 + q_1w_2 + q_2w_3 + p_1q_1w_1$;
- Степени 4: w_iw_j для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Теорема 4 ([6, теорема 2.1])**.** *Существует изоморфизм градуированных K-алгебр $HH^*(R) \simeq \mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/\mathcal{I}$.*

Для будущих приложений полезно будет иметь более простое описание элементов когомологий Хохшильда. Пусть P – член минимальной проективной резольвенты R. Если $P = R\otimes R$, обозначим через f гомоморфизм $\mathrm{Hom}_{R^e}(P, R)$, переводящий $1 \otimes 1$ в f. Если $P = R \otimes KQ \otimes R$ (или $P = R\otimes KQ_1\otimes R$), то через (f, g) обозначим гомоморфизм, переводящий $1\otimes x\otimes 1$ (соответственно, $1\otimes r_x\otimes 1$) в f и $1\otimes y\otimes 1$ (соответственно, $1 \otimes r_y \otimes 1$) в g. Тогда из работы [6] следует, что

$$\begin{cases} \text{Элементы степени 0:} & p_1 = xy + yx,\ p_2 = xyx,\ p_3 = yxy,\ p_4 = (xy)^2, \\ \text{Элементы степени 1:} & q_1 = q_1 = (y,\ 1 + dy + xy),\ q_2 = (1 + yx,\ dxy + x), \\ \text{Элементы степени 2:} & w_1 = (x,\ 0),\ w_2 = (0,\ y),\ w_3 = (y,\ x + dxy), \\ \text{Элементы степени 4:} & e = 1. \end{cases}$$

Замечание 2. Очевидно, что Δ на любой комбинации элементов степени 0 равна нулю, так как это гомоморфизм степени -1.

5.1. Технические леммы.

Лемма 2 (Степень 1)**.** *Справедливы следующие соотношения:* $\Delta(q_1) = dp_1$, $\Delta(q_2) = 0$, $\Delta(p_1q_1) = p_2 + dp_1$, $\Delta(p_1q_2) = dp_2 + p_3$, $\Delta(p_2q_1) = p_3 + dp_2$, $\Delta(p_3q_2) = p_2$, $\Delta(p_3q_1) = \Delta(p_2q_2) = p_1$, $\Delta(p_4q_1) = p_2$, $\Delta(p_4q_2) = p_3$.

Доказательство. Посчитаем значения $\langle aC(b), 1\rangle$ для каждого элемента степени 1. Нетрудно убедиться, что

$$\langle aC(b), 1\rangle = \begin{cases} 1, & a \in \{p_1q_1, p_3q_2, p_4q_1\}, b = y \text{ или} \\ & a \in \{p_1q_2, p_2q_1, p_4q_2\}, b = x \text{ или } a \in \{p_3q_1, p_2q_2\}, b \in \{xy, yx\}, \\ d, & a \in \{q_1, p_1q_1\}, b \in \{xy, yx\} \text{ или } a \in \{p_1q_2, p_2q_1\}, b = y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее остается применить формулу $\Delta(a) = \sum\limits_{b\in B} \langle aC(b), 1\rangle b^*$, чтобы получить требуемое. □

Лемма 3 (Степень 2)**.** $\Delta(a) = 0$ *для любой комбинации образующих элементов* $a \in HH^2(R)$.

Доказательство. Легко заметить, что для любого элемента a такого, что $\deg a = 2$, справедливы формулы

$$\Delta(a)(1 \otimes x \otimes 1) = \Delta(a\Psi_2)\Phi_1(1 \otimes x \otimes 1) = \sum_{b\neq 1} \langle at_1(b \otimes x \otimes 1 + xC(b)), 1\rangle b^*,$$

$$\Delta(a)(1\otimes y\otimes 1)=\Delta(a\Psi_2)\Phi_1(1\otimes y\otimes 1)=\sum_{b\neq 1}\langle at_1(b\otimes y\otimes 1+yC(b)),1\rangle b^*.$$

Вычислим все возможные $t_1(b\otimes x\otimes 1+xC(b))$, обозначив эту формулу за $\Psi_2(b,x)$:

(1) $\Psi_2(xy,x)=1\otimes r_x\otimes y+yx\otimes r_y\otimes 1+y\otimes r_x\otimes yx+dy\otimes r_x\otimes yxy+dy^2\otimes r_x\otimes (xy)^2$,
(2) $\Psi_2(yx,x)=y\otimes r_x\otimes 1+xy\otimes r_x\otimes y+1\otimes r_y\otimes xy+dx\otimes r_x\otimes xy+dyxy\otimes r_x\otimes y$,
(3) $\Psi_2(xyx,x)=xy\otimes r_x\otimes 1+x\otimes r_y\otimes xy+dx^2\otimes r_x\otimes xy+d(xy)^2\otimes r_x\otimes y+1\otimes r_x\otimes yx+yx\otimes r_y\otimes x+dy\otimes r_x\otimes (xy)^2$,
(4) $\Psi_2(yxy,x)=y\otimes r_y\otimes 1+1\otimes r_y\otimes y+dy\otimes r_y\otimes y+d\otimes r_y\otimes xyx+d^2y\otimes r_y\otimes xyx$,
(5) для $b\in\{x,y,(xy)^2\}$ искомое выражение равняется нулю.

Теперь необходимо знать все $t_1(b\otimes y\otimes 1+yC(b))$. Обозначим эту формулу за $\Psi_2(b,y)$. Тогда

(1) $\Psi_2(xy,y)=x\otimes r_y\otimes 1+yx\otimes r_y\otimes x+1\otimes r_x\otimes yx+d\otimes r_x\otimes yxy+dyx\otimes r_y\otimes xy+dy\otimes r_x\otimes (xy)^2$,
(2) $\Psi_2(yx,y)=1\otimes r_y\otimes x+xy\otimes r_x\otimes 1+x\otimes r_y\otimes xy+dx^2\otimes r_x\otimes xy+d(xy)^2\otimes r_x\otimes y+d\otimes r_x\otimes x^2+dx\otimes r_x\otimes x+dx^2\otimes r_x\otimes 1+dyx\otimes r_y\otimes xy$,
(3) $\Psi_2(xyx,y)=y\otimes r_y\otimes 1+1\otimes r_y\otimes y+dy\otimes r_y\otimes y+d\otimes r_y\otimes xyx+d^2y\otimes r_y\otimes xyx$,
(4) $\Psi_2(yxy,y)=yx\otimes r_y\otimes 1+y\otimes r_x\otimes yx+dy\otimes r_x\otimes yxy+dy^2\otimes r_x\otimes (xy)^2+1\otimes r_y\otimes xy+xy\otimes r_x\otimes y+d(xy)^2\otimes r_x\otimes y^2+dxyx\otimes r_x\otimes y$,
(5) $\Psi_2((xy)^2,y)=y\otimes r_y\otimes y+1\otimes r_y\otimes xyx+dy\otimes r_y\otimes xyx$,
(6) для $b\in\{x,y\}$ искомое выражение равняется нулю.

Остается заметить, что

$$q_1q_2{=}(0,\ 0),\ q_1^2{=}(x,\ 1),\ q_2^2{=}(1,\ y),\ p_4q_1^2{=}(0,\ (xy)^2),\ p_4q_2^2{=}((xy)^2,\ 0),$$

откуда легко следует утверждение леммы. □

Лемма 4 (Степень 3)**.** *Справедливы следующие соотношения*:

$$\Delta(q_1w_1)=\Delta(q_2w_2)=w_3,\ \Delta(q_2w_1)=q_2^2+w_2,$$
$$\Delta(q_1w_2)=\Delta(q_2w_3)=q_1^2+w_1+d(p_1+1)w_2,\ \Delta(q_1w_3)=q_2^2+w_2+dw_3.$$

Доказательство. Заметим, что, пользуясь отождествлениями $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 = 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes 1$, можно для каждого $a \in HH^3(R)$ записать

$$\begin{aligned}
&\Delta(a)(1 \otimes r_x \otimes 1) = \Delta(a\Psi_3)\Phi_2(1 \otimes r_x \otimes 1)\\
&= \sum_{b \neq 1} \langle a\Psi_3(b \otimes x \otimes x + x \otimes x \otimes b + x \otimes b \otimes x), 1\rangle b^*\\
&+ \sum_{b \neq 1} \langle a\Psi_3(b \otimes y \otimes x + x \otimes b \otimes y + y \otimes x \otimes b), 1\rangle b^* y\\
&+ \sum_{b \neq 1} \langle a\Psi_3(b \otimes yx \otimes y + yx \otimes y \otimes b + y \otimes b \otimes yx), 1\rangle b^*.
\end{aligned}$$

Далее, $\Psi_3(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = t_2(a_1 t_1(a_2 C(a_3)))$, из чего легко составить нужные формулы.

Выражение $\Psi_3(b \otimes x \otimes x + x \otimes x \otimes b + x \otimes b \otimes x)$ раскрывается как $t_2(bt_1(x \otimes x \otimes 1) + xt_1(b \otimes x \otimes 1) + xt_1(xC(b)))$. Обозначим его через $\Psi_3(b, x)$. Несложно убедиться в том, что

(1) $\Psi_3(x, x) = 1 \otimes 1$,
(2) $\Psi_3(y, x) = dyxy \otimes y^2 + dyx \otimes (xy)^2$,
(3) $\Psi_3(xy, x) = dyxy \otimes y + dyx \otimes y^2 + 1 \otimes y$,
(4) $\Psi_3(yx, x) = y \otimes 1 + dxyx \otimes 1 + dxy \otimes x + dx \otimes yx$,
(5) $\Psi_3(xyx, x) = xy \otimes 1 + 1 \otimes yx + x \otimes y + dyxy \otimes yx + yx \otimes xy + dyxy \otimes xy$,
(6) $\Psi_3(yxy, x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$,
(7) $\Psi_3((xy)^2, x) = 1 \otimes yxy$.

Формула $\Psi_3(b \otimes y \otimes x + y \otimes x \otimes b + x \otimes b \otimes y)$ имеет вид $t_2(xt_1(b \otimes y \otimes 1) + yt_1(xC(b)))$. Обозначим ее через $\Psi_3(b, x, 2)$. Тогда

(1) $\Psi_3(x, x, 2) = dyxy \otimes y^2 + dyx \otimes (xy)^2$,
(2) $\Psi_3(xy, x, 2) = yx \otimes 1 + y \otimes x + dyx \otimes y + dy \otimes xy + d^2xyx \otimes xy + dxyx \otimes x + dxy \otimes yxy + 1 \otimes yx + d \otimes yxy + xy \otimes yx + dxy \otimes x^2 + dyxy \otimes (xy)^2 + dyxy \otimes yx + d^2yxy \otimes yxy$,
(3) $\Psi_3(xyx, x, 2) = dxy \otimes (xy)^2 + d^2yxy \otimes (xy)^2$,
(4) во всех остальных случаях $\Psi_3(b, x, 2)$ равняется нулю.

Наконец, $\Psi_3(b \otimes yx \otimes y + yx \otimes y \otimes b + y \otimes b \otimes yx) = t_2(yxt_1(yC(b)) + yt_1(b \otimes y \otimes x + by \otimes x \otimes 1))$. Обозначим это выражение через $\Psi_3(b, x, 3)$. Прямые вычисления показывают, что

(1) $\Psi_3(x, x, 3) = 0$,
(2) $\Psi_3(y, x, 3) = d^2xyx \otimes x + d^2xy \otimes x^2 + dy^2 \otimes yxy + d(xy)^2 \otimes xy + 1 \otimes x + d(xy)^2 \otimes (xy)^2 + dy \otimes x$,

(3) $\Psi_3(xy,x,3)=dy^2\otimes(xy)^2+d(xy)^2\otimes xyx$,
(4) $\Psi_3(yx,x,3)=dy^2\otimes(xy)^2+d(xy)^2\otimes xyx+dy\otimes yxy+dxyx\otimes xy+dxy\otimes x+dx\otimes yx+dxyx\otimes 1$,
(5) $\Psi_3(xyx,x,3)=yx\otimes 1$,
(6) $\Psi_3(yxy,x,3)=d(xy)^2\otimes(xy)^2+dxy\otimes(xy)^2+d^2yxy\otimes(xy)^2$,
(7) $\Psi_3((xy)^2,x,3)=xy\otimes x^2+xyx\otimes x+dx\otimes(xy)^2+dxyx\otimes yx+dxy\otimes xyx$.

Заметим далее, что

$$\begin{aligned}\Delta(a)(1\otimes r_y\otimes 1)&=\Delta(a\Psi_3)\Phi_2(1\otimes r_x\otimes 1)\\ &=\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_3(b\otimes y\otimes y+y\otimes y\otimes b+y\otimes b\otimes y),1\rangle b^*\\ &+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_3(b\otimes x\otimes y+y\otimes b\otimes x+x\otimes y\otimes b),1\rangle b^*(x+dxy)\\ &+d\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_3(b\otimes xyx\otimes y+xyx\otimes y\otimes b+y\otimes b\otimes xyx),1\rangle b^*\\ &+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_3(b\otimes xy\otimes x+xy\otimes x\otimes b+x\otimes b\otimes xy),1\rangle b^*(1+dy).\end{aligned}$$

Обозначим формулу $\Psi_3(b\otimes y\otimes y+y\otimes y\otimes b+y\otimes b\otimes y)=t_2(yt_1(b\otimes y\otimes 1)+yt_1(yC(b))+b\otimes r_y\otimes 1)$ через $\Psi_3(b,y)$. Тогда

(1) $\Psi_3(b,y)=0$ для $b\in\{x,y\}$,
(2) $\Psi_3(xy,y)=x\otimes 1+dx\otimes y+dy^2\otimes yxy+d(xy)^2\otimes xy+d^2yxy\otimes(xy)^2+dxy\otimes(xy)^2$,
(3) $\Psi_3(yx,y)=1\otimes x+d(xy)^2\otimes(xy)^2+dy\otimes x+d^2xyx\otimes x+d^2xy\otimes x^2+dy^2\otimes yxy+d(xy)^2\otimes xy$,
(4) $\Psi_3(xyx,y)=dxy\otimes x+dx\otimes yx+dxyx\otimes 1$,
(5) $\Psi_3(yxy,y)=1\otimes xy+yx\otimes 1+y\otimes x+xy\otimes yx+dyxy\otimes yx+dxy\otimes x^2+d^2yxy\otimes yxy+dyx\otimes y+dxyx\otimes x+dxy\otimes yxy$,
(6) $\Psi_3((xy)^2,y)=xy\otimes x+x\otimes yx+xyx\otimes 1$.

Выражение $\Psi_3(x\otimes y\otimes b+y\otimes b\otimes x+b\otimes x\otimes y)$ раскрывается как $t_2(xt_1(yC(b))+yt_1(b\otimes x\otimes 1))$. Обозначим его через $\Psi_3(b,y,2)$. Легко видеть, что

(1) $\Psi_3(x,y,2)=dyxy\otimes y^2+dyx\otimes(xy)^2$,
(2) $\Psi_3(yx,y,2)=yx\otimes xy+dyxy\otimes xy+xy\otimes 1+x\otimes y+dyxy\otimes yx+1\otimes xy+d^2xyx\otimes xy+dy\otimes xy$,
(3) $\Psi_3(xyx,y,2)=x\otimes 1+1\otimes x+d(xy)^2\otimes(xy)^2$,

(4) $\Psi_3(yxy, y, 2) = dyx \otimes y^2 + dyxy \otimes y + dxy \otimes x + dx \otimes yx + dxyx \otimes 1$,
(5) $\Psi_3((xy)^2, y, 2) = x \otimes y + y \otimes x + dxyx \otimes x + dxy \otimes x^2$,
(6) $\Psi_3(b, y, 2) = 0$ для $b \in \{y, xy\}$.

Формула $\Psi_3(xyx \otimes y \otimes b + y \otimes b \otimes xyx + b \otimes xyx \otimes y)$ раскрывается как $t_2(xyxt_1(yC(b)) + yt_1(b \otimes x \otimes yx + bx \otimes y \otimes x + bxy \otimes x \otimes 1))$. Обозначим ее через $\Psi_3(b, y, 3)$. Прямые вычисления показывают, что

(1) $\Psi_3(x, y, 3) = dxy \otimes (xy)^2 + d^2yxy \otimes (xy)^2$,
(2) $\Psi_3(y, y, 3) = dxy \otimes x + dx \otimes yx + dxyx \otimes 1$,
(3) $\Psi_3(xy, y, 3) = y \otimes x + dxyx \otimes x + dxy \otimes x^2$,
(4) $\Psi_3(yx, y, 3) = dxy \otimes yxy + xy \otimes yx + dyxy \otimes (xy)^2 + dyxy \otimes yx$,
(5) $\Psi_3(xyx, y, 3) = xy \otimes x + x \otimes yx + xyx \otimes 1 + 1 \otimes xyx$,
(6) $\Psi_3(yxy, y, 3) = xy \otimes x^2 + xyx \otimes x$,
(7) $\Psi_3((xy)^2, y, 3) = xy \otimes xy + x \otimes yxy + xyx \otimes y + dxyx \otimes xyx + y \otimes xyx$.

Наконец, обозначим формулу $\Psi_3(xy \otimes x \otimes b + x \otimes b \otimes xy + b \otimes xy \otimes x) = t_2(xyt_1(xC(b)) + xt_1(b \otimes x \otimes y + bx \otimes y \otimes 1))$ через $\Psi_3(b, y, 4)$. Тогда

(1) $\Psi_3(x, y, 4) = 1 \otimes y + dyxy \otimes y + dyx \otimes y^2$,
(2) $\Psi_3(xy, y, 4) = dyxy \otimes y^2 + dyx \otimes (xy)^2$,
(3) $\Psi_3(yxy, y, 4) = x \otimes y$,
(4) $\Psi_3((xy)^2, y, 4) = yx \otimes y^2 + yxy \otimes y$,
(5) $\Psi_3(b, y, 4) = 0$ для $b \in \{y, yx, xyx\}$.

Осталось заметить, что

$$q_1w_1 = xy,\ q_1w_2 = y = q_2w_3,\ q_2w_1 = x,\ q_2w_2 = yx,\ q_1w_3 = x + dyx + d(xy)^2.$$

Теперь лемма следует из приведенных выше вычислений после соответствующих подстановок. □

Лемма 5 (Степень 4)**.** $\Delta(e) = \Delta(p_4e) = d^3p_1q_1w_1$, $\Delta(p_1e) = \Delta(p_2e) = \Delta(p_3e) = 0$.

Доказательство. Введем обозначение: через $\circ(a_1 \otimes ... \otimes a_n)$ условимся записывать сумму $\sum a_{i_1} \otimes ... \otimes a_{i_n}$ по всем индексам, дающим подстановку $(1, 2, .., n)^{-1}$. Тогда для $a \in HH^4(R)$ имеем

$$\Delta(a)(1\otimes 1)=\Delta(a\Psi_4)\Phi_3(1\otimes 1)=\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes x\otimes x\otimes x)),1\rangle b^*$$
$$+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes x\otimes y\otimes x)),1\rangle b^*y+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes x\otimes yx\otimes y)),1\rangle b^*$$
$$+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes y\otimes y\otimes y)),1\rangle b^*(1+dy+d^2xyx)$$
$$+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes y\otimes x\otimes y)),1\rangle b^*x$$
$$+\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes y\otimes xy\otimes x)),1\rangle b^*$$
$$+d\sum_{b\neq 1}\langle a\Psi_4(\circ(b\otimes y\otimes xyx\otimes y)),1\rangle b^*(1+dy+d^2xyx).$$

Для каждой из семи сумм обозначим через $\Psi_4(b,i)$ значение b-го слагаемого в i-ой сумме. Тогда несложно убедиться в том, что

$$\Psi_4(b,1)=\begin{cases} d\otimes y^2, & \text{если } b=y,\\ d\otimes y, & \text{если } b=xy,\\ d\otimes yx+d\otimes xy, & \text{если } b=xyx,\\ 1\otimes 1, & \text{если } b=(xy)^2,\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

и

$$\Psi_4(b,2)=\begin{cases} d\otimes y^2, & \text{если } b=x,\\ d\otimes (xy)^2+d\otimes yx+d^2\otimes yxy, & \text{если } b=xy,\\ d^2\otimes (xy)^2, & \text{если } b=xyx,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$\Psi_4(b,3)=\begin{cases} d\otimes (xy)^2, & \text{если } b=x,\\ d\otimes y, & \text{если } b=yx,\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

и

$$\Psi_4(b,4)+\Psi_4(b,7)=\begin{cases} d^2\otimes 1, & \text{если } b=y,\\ d\otimes x^2, & \text{если } b\in\{xy,yx\},\\ d\otimes 1, & \text{если } b=xyx,\\ 1\otimes 1, & \text{если } b=(xy)^2,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$\Psi_4(b,5)=\begin{cases} d^2\otimes (xy)^2, & \text{если } b=xy,\\ d\otimes yx+d^2\otimes yxy, & \text{если } b=yxy,\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

и

$$\Psi_4(b,6)=\begin{cases} d\otimes yxy, & \text{если } b=xy,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Теперь утверждение леммы напрямую следует из определений и приведенных вычислений. □

Замечание 3. На будущее будет полезно знать точный вид Φ_4. А именно,

$$\Phi_4(1\otimes 1)=\sum_b 1\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes b^*+\sum_b 1\otimes b\otimes x\otimes y\otimes x\otimes yb^*$$
$$+\sum_b 1\otimes b\otimes x\otimes yx\otimes y\otimes b^*+\sum_b 1\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y\otimes (1+dy+d^2xyx)b^*$$
$$+\sum_b 1\otimes b\otimes y\otimes x\otimes y\otimes xb^*+\sum_b 1\otimes b\otimes y\otimes xy\otimes x\otimes b^*$$
$$+\sum_b 1\otimes b\otimes y\otimes xyx\otimes y\otimes (d+d^2y+d^3xyx)b^*+d\otimes xyx\otimes x\otimes x\otimes x\otimes xyx$$
$$+d\otimes xyx\otimes x\otimes y\otimes x\otimes (xy)^2+d\otimes xyx\otimes x\otimes yx\otimes y\otimes xyx$$
$$+d\otimes xyx\otimes y\otimes y\otimes y\otimes y^2+d\otimes xyx\otimes y\otimes xy\otimes x\otimes xyx+d^2\otimes xyx\otimes y\otimes xyx\otimes y\otimes y^2.$$

Каждое слагаемое здесь мы будем обозначать Φ_4^i, где $1\leqslant i\leqslant 13$ в том порядке, который указан в этой сумме.

5.2. Скобки Герстенхабера.

Лемма 6. *$[q_1,e]=0$ и $[q_2,e]=dp_2e$.*

Доказательство. Заметим, что для $a \in HH^1(R), e \in HH^4(R)$ скобка Герстенхабера раскрывается по формуле

$$[a, e](1 \otimes 1) = (a\Psi_1 \circ e\Psi_4)\Phi_4(1 \otimes 1) + (e\Psi_4 \circ a\Psi_1)\Phi_4(1 \otimes 1).$$

Далее, $\Phi_4(1 \otimes 1) = \sum\limits_{b \in B} 1 \otimes b\Phi_3(1 \otimes 1)b^* + d \otimes xyx\Phi_3(1 \otimes 1)xyx$. При применении к $1 \otimes b\Phi_3(1 \otimes 1)b^*$ дифференциала d_3^{Bar} и затем $t_3\Psi_3$ выживает только слагаемое $b\Phi_3(1 \otimes 1)b^*$ в силу того, что $t_3(1 \cdot \Psi_3(s)) = t_3 t_2(s) = 0$ для всех s из области определения Ψ_3. Таким образом,

$$\Psi_4\Phi_4 = t_3\Psi_3 d_3^{Bar}\Phi_4 = \sum_b t_3(b\Psi_3\Phi_3)b^* + dt_3(xyx\Psi_3\Phi_3)xyx,$$

и в то же время

$$\begin{aligned}\Psi_3\Phi_3(1 \otimes 1) &= t_2(xt_1(x \otimes x \otimes 1)) + t_2(yt_1(y \otimes y \otimes 1)) \cdot (1 + dy + d^2xyx)\\ &= t_2(x \otimes r_x \otimes 1) = 1 \otimes 1,\end{aligned}$$

откуда

$$(a\Psi_1 \circ e\Psi_4)\Phi_4(1 \otimes 1) = (a\Psi_1)(e\Psi_4\Phi_4(1 \otimes 1)) = (a\Psi_1)(1) = 0.$$

Осталось разобраться со вторым слагаемым из определения $[a, e](1 \otimes 1)$. По определению функции $e\Psi_4 \circ a\Psi_1$ оно распадается на сумму четырех функций F_i^a для каждых $a \in HH^1(R)$ и $1 \leqslant i \leqslant 4$, для каждой из которых необходимо знать $a\Psi_1(b)$ для $b \in B$. Прямыми вычислениями проверяется, что

$$q_1\Psi_1(b) = \begin{cases} y, & \text{если } b = x,\\ 1 + xy + dy, & \text{если } b = y,\\ x + dxy + y^2, & \text{если } b = xy,\\ x + dyx + d(xy)^2, & \text{если } b = yx,\\ yxy + dxyx, & \text{если } b = xyx,\\ xy + yx, & \text{если } b = yxy,\\ xyx, & \text{если } b = (xy)^2,\end{cases}$$

$$q_2\Psi_1(b) = \begin{cases} 1+yx, & \text{если } b = x,\\ dxy+x, & \text{если } b = y,\\ y, & \text{если } b = xy,\\ y+x^2+dxyx, & \text{если } b = yx,\\ xy+yx, & \text{если } b = xy,\\ xyx, & \text{если } b = yxy,\\ yxy, & \text{если } b = (xy)^2. \end{cases}$$

Несложно видеть, что все слагаемые $\Phi_4(1\otimes 1)$ имеют форму $1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_5\otimes a_6$, и если $a_4a_5\in B$, то такое слагаемое дает нуль после применения к нему F_1^a или F_2^a.

1) Обозначим за $f_i^a(b)$ значение выражения $(e\Psi_4\circ_1 q_a\Psi_1)(1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4)$, где $1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4$ является составной частью Φ_4^i (здесь a является индексом соответствующего порождающего элемента q_a). Отсюда

$$f_1^1(b) = \begin{cases} dxy, & \text{если } b = xy,\\ dyx, & \text{если } b = yx\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \qquad \text{и} \qquad f_1^2(b) = 0,$$

Также заметим, что

$$f_8^2(xyx) = d\cdot et_3(a\Psi_1(xyx)\otimes 1)xyx = 0 \text{ и } f_8^1(xyx) = 0,$$

откуда

$$F_1^{q_1} = d(xy+yx) \text{ и } F_1^{q_2} = 0.$$

2) Обозначим за $g_i^a(b)$ значение выражения $(e\Psi_4\circ_2 q_a\Psi_1)(1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4)$, где $1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4$ является составной частью Φ_4^i. Прямыми вычислениями проверяется, что

$$g_1^1(b) = 0,\quad g_1^2(b) = \begin{cases} y, & \text{если } b = xyx,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases} \qquad g_4^1(b) = \begin{cases} x, & \text{если } b = yxy,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

и также $g_8^2(xyx) = dxyx$, $g_8^1(xyx) = 0$, в то время как $\sum_b g_4^2(b) = d\sum_b g_4^1(b) + \sum_b et_3(bt_2(x\otimes r_y\otimes 1))(1+dy+d^2xyx)b^*$. Легко убедиться в том, что вторая сумма дает нуль на всех $b\in B$. Наконец, $g_{11}^a(xyx) = 0$ для любого $a\in HH^1(R)$. Отсюда

$$F_2^{q_1} = x \text{ и } F_2^{q_2} = y + dx + dxyx.$$

3) Обозначим через $h_i^a(b)$ значение выражения $(e\Psi_4 \circ_3 q_a\Psi_1)(1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4)$, где $1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4$ является составной частью Φ_4^i. Тогда $h_1^2(b)=0$ и $h_1^1(b)=0$ для любого $b\in B$. Отсюда $h_8^1(xyx)=h_8^2(xyx)=0$. Далее,

$$h_2^a(b)=\begin{cases} y, & \text{если } b=(xy)^2 \text{ и } a=q_2,\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\text{и}\quad h_3^a(b)=0 \text{ для любого } a\in HH^4(R),$$

откуда $h_3^a(b)=h_{13}^a(b)=0$ для любого a. Несложно убедиться в том, что $h_4^1(b)=0$ и $h_4^2(b)=0$ для всех b в силу того, что $t_1(x\otimes y\otimes 1)=0$, и аналогично $h_{11}^a(b)=0$ для всех a. Более того, $t_2(yt_1(a\Psi_1(x)\otimes y\otimes 1))=0$, откуда $h_5^a(b)=0$. Далее,

$$h_7^1(b)=\begin{cases} dxy, & \text{если } b=xyx,\\ x, & \text{если } b=(xy)^2\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \quad \text{и } h_7^2(b)=0,$$

Более того, $h_{12}^a(xyx)=0$ и $h_7^a(b)=0$ для всех $b\in B$ и образующих элементов $a\in HH^1(R)$, откуда также $h_{13}^a(xyx)=0$. Отсюда

$$F_3^{q_1}=x+dxy \text{ и } F_3^{q_2}=y.$$

4) Обозначим через $k_i^a(b)$ значение выражения $(e\Psi_4 \circ_4 q_a\Psi_1)(1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4)$, где $1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4$ является составной частью Φ_4^i. Для вычисления F_4^a нам понадобятся значения

$$C(a\Psi_1(x))=\begin{cases} 1\otimes y\otimes 1, & \text{если } a=q_1,\\ y\otimes x\otimes 1+1\otimes y\otimes x, & \text{если } a=q_2,\end{cases}$$

$$C(a\Psi_1(y))=\begin{cases} 1\otimes x\otimes y+x\otimes y\otimes 1+d\otimes y\otimes 1, & \text{если } a=q_1,\\ d\otimes x\otimes y+dx\otimes y\otimes 1+1\otimes x\otimes 1, & \text{если } a=q_2.\end{cases}$$

Прямыми вычислениями из определения t_i и Φ_4 проверяется, что

$$k_7^1((xy)^2)=dxy \quad \text{и} \quad k_7^2((xy)^2)=dx,$$

в то время как $k_i^j(b)=0$ для всех $(i,b)\neq(7,(xy)^2)$ и всех $j\in\{1,2\}$. Отсюда

$$F_4^{q_1}=dxy \text{ и } F_4^{q_2}=\sum_{b,i}k_i^2(b)=dx.$$

Теперь осталось только посчитать скобки Герстенхабера:

$$\begin{aligned}[q_1, e] &= (q_1\Psi_1 \circ e\Psi_4)\Phi_4(1 \otimes 1) + (e\Psi_4 \circ q_1\Psi_1)\Phi_4(1 \otimes 1)\\ &= \sum_{i=1}^{4} F_i^{q_1} = dxy + dyx \equiv 0,\\ [q_2, e] &= (q_2\Psi_1 \circ e\Psi_4)\Phi_4(1 \otimes 1) + (e\Psi_4 \circ q_2\Psi_1)\Phi_4(1 \otimes 1)\\ &= \sum_{i=1}^{4} F_i^{q_2} = dxyx. \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 7. $[v, e] = 0$ *для всех* $v \in \{w_1, w_2, w_3\}$.

Доказательство. Для $v \in HH^2(R)$ и $e \in HH^4(R)$

$$[v, e](1\otimes a\otimes 1) = \big((v\Psi_2)\circ(e\Psi_4)\big)\Phi_5(1\otimes a\otimes 1)+\big((e\Psi_4)\circ(v\Psi_2)\big)\Phi_5(1\otimes a\otimes 1).$$

Вначале необходимо понять, чему равняется выражение $\big((v\Psi_2) \circ (e\Psi_4)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$:

$$\big((v\Psi_2) \circ (e\Psi_4)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1) = \sum_{i=1}^{2} \big((v\Psi_2) \circ_i (e\Psi_4)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1).$$

Обозначим соответствующие слагаемые этой суммы через S_1^v и S_2^v соответственно. Несложно убедиться в том, что $S_2^v = 0$ для всех $v \in \{w_1, w_2, w_3\}$. Действительно,

$$S_2(1 \otimes a_1 \otimes .. \otimes a_5 \otimes a_6) = vt_1(a_1C(et_3(a_2t_2(a_3t_1(a_4C(a_5)))))) \cdot a_6,$$

что дает нуль на всех слагаемых вида $1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_5 \otimes a_6$ из определения $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$, так как $C(1) = 0$ и $et_3(b \otimes 1) = 1$ для $b = (xy)^2$ и нулю иначе. Далее, покажем, что S_1 дает нулевой вклад на всех слагаемых суммы $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$, кроме первого, четвертого, седьмого и одиннадцатого:

$$S_1^v(a \otimes xyx \otimes x \otimes x \otimes x \otimes y) = \begin{cases} dyxy, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_1,\\ d(xy)^2, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_3,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

$$S_1^v\big(a \otimes (xy)^2 \otimes y \otimes y \otimes y \otimes (1 + dy + d^2xyx)\big) \\ = \begin{cases} dy + dxyx, & \text{если } a = y \text{ и } v = w_2, \\ dx, & \text{если } a = y \text{ и } v = w_3, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$S_1^v\big(a \otimes (xy)^2 \otimes y \otimes xyx \otimes y \otimes (d + d^2y + d^3xyx)\big) = \begin{cases} dy + dxyx, & \text{если } a = y \text{ и } v = w_2, \\ dx, & \text{если } a = y \text{ и } v = w_3, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и S_1^v дает нуль на всех других комбинациях коэффициентов a_i. Таким образом,

$$\big((v\Psi_2) \circ (e\Psi_4)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1) = \begin{cases} dyxy, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_1, \\ d(xy)^2, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Теперь необходимо вычислить значения выражения

$$\big((e\Psi_4) \circ (v\Psi_2)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1) = \sum_{i=1}^{4} \big((e\Psi_4) \circ_i (v\Psi_2)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1).$$

Мы обозначим слагаемые этой суммы через F_i^v для $1 \leqslant i \leqslant 4$. Несложно убедиться в том, что F_1^v и F_2^v могут быть *не* равны нулю только для комбинаций коэффициентов из первого, четвертого, восьмого и одиннадцатого слагаемых из определения $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$, так как любое другое слагаемое имеет вид $1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_5 \otimes a_6$, где $t_1(a_4C(a_5)) = 0$.

1) Рассмотрим F_1^v. Очевидно, что $t_2\big(yt_1(y \otimes y \otimes 1)\big) = 0$, а значит, F_1^v обнуляется на четвертом и одиннадцатом слагаемых. Осталось убедиться в том, что

$$et_3\Big(vt_1\big(aC(b)\big)t_2\big(xt_1(x \otimes x \otimes 1)\big)\Big)b^* = et_3\big(vt_1(aC(b)) \otimes 1\big)b^*$$

и для первого слагаемого

$$F_1^v(a \otimes b \otimes x \otimes x \otimes x \otimes b^*) = et_3\big(vt_1(aC(b)) \otimes 1\big)b^* =$$

$$= \begin{cases} xy, & \text{если } a = x,\ b = xy \text{ и } v = w_1, \\ dxy, & \text{если } a = x,\ b = xy \text{ и } v = w_3, \\ dyx, & \text{если } a = y,\ b = yx \text{ и } v = w_1, \\ yx, & \text{если } a = y,\ b = yx \text{ и } v = w_2, \\ y, & \text{если } a = x,\ b = xyx \text{ и } v = w_2, \\ x, & \text{если } a = y,\ b = yxy \text{ и } v = w_1, \\ 1, & \text{если } b = (xy)^2 \text{ и } (a,v) = (x,w_1) \text{ или } (a,v) = (y,w_2), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, для восьмого слагаемого

$$dF_1^v(a \otimes xyx \otimes x \otimes x \otimes x \otimes xyx) = \begin{cases} dxyx, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также несложно видеть, что любые другие комбинации коэффициентов $1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_6$ из $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$ дают нулевой вклад для всех $a \in \{x, y\}$. Таким образом,

$$F_1^{w_1} = \begin{cases} 1 + xy, & \text{если } a = x, \\ x + dyx, & \text{если } a = y, \end{cases} \quad F_1^{w_2} = \begin{cases} y + dxyx, & \text{если } a = x, \\ 1 + yx, & \text{если } a = y, \end{cases}$$

$$F_1^{w_3} = \begin{cases} dxy, & \text{если } a = x, \\ 0, & \text{если } a = y. \end{cases}$$

2) Для случая F_2^v необходимо рассматривать только первое, четвертое, восьмое и одиннадцатое слагаемые из определения $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$. Для первого слагаемого

$$F_2^v(1 \otimes a \otimes b \otimes x \otimes x \otimes x \otimes b^*)$$
$$= \begin{cases} et_3\big(at_2(yx \otimes r_x \otimes 1 + (xy)^2 \otimes r_x \otimes 1)\big)yx, & \text{если } b = yx \text{ и } v = w_1, \\ et_3\big(at_2(y^2 \otimes r_x \otimes 1)\big)yx, & \text{если } b = yx \text{ и } v = w_3, \\ et_3\big(at_2(xyx \otimes r_x \otimes 1)\big)y, & \text{если } b = xyx \text{ и } v = w_1, \\ et_3\big(at_2((xy)^2 \otimes r_x \otimes 1)\big)y, & \text{если } b = xyx \text{ и } v = w_2, \\ et_3\Big(at_2\big((yx + xy + 2dyxy) \otimes r_x \otimes 1\big)\Big)x, & \text{если } b = yxy \text{ и } v = w_3, \\ et_3\big(at_2((xy)^2 \otimes r_x \otimes 1)\big), & \text{если } b = (xy)^2 \text{ и } v = w_1, \\ et_3\big(at_2(xyx \otimes r_x \otimes 1)\big), & \text{если } b = (xy)^2 \text{ и } v = w_3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} yx, & \text{если} a = x,\ b = yx \text{ и } v = w_1, \\ d(xy)^2 + dyx, & \text{если } a = x,\ b = yx \text{ и } v = w_3, \\ dyxy, & \text{если } a = x,\ b = xyx \text{ и } v = w_1, \\ y, & \text{если } a = x,\ b = xyx \text{ и } v = w_2, \\ dyx, & \text{если } a = x,\ b = yxy \text{ и } v = w_3, \\ 1, & \text{если } a = x,\ b = (xy)^2 \text{ и } v = w_1, \\ dyx, & \text{если } a = x,\ b = (xy)^2 \text{ и } v = w_3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, для восьмого слагаемого

$$dF_2^v(1 \otimes a \otimes xyx \otimes x \otimes x \otimes x \otimes xyx) = \begin{cases} dxyx, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Осталось высчитать значения F_2^v для четвертого и одиннадцатого слагаемого. Несложно видеть, что

$$F_2^v\big(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes (1 + dy + d^2xyx)b^*\big) \\ = et_3\Big(at_2\big(vt_1(b \otimes y \otimes 1) \otimes r_y \otimes 1\big)\Big)(1 + dy + d^2xyx)b^*,$$

а значит,

$$F_2^v\big(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big)$$

$$= \begin{cases} et_3\big(at_2(xyx \otimes r_y \otimes 1 + d(xy)^2 \otimes r_y \otimes 1)\big), & \text{если } b = xy \text{ и } v = w_1, \\ et_3\big(at_2(xy \otimes r_y \otimes 1 + (xy)^2 \otimes r_y \otimes 1)\big), & \text{если } b = xy \text{ и } v = w_2, \\ et_3\big(at_2((xy)^2 \otimes r_y \otimes 1)\big), & \text{если } (b, v) = (yxy, w_1), \\ & \text{или } (b, v) = ((xy)^2, w_2), \end{cases}$$

а также F_2^v дает нулевой вклад на всех других наборах коэффициентов после домножения справа на $(1 + dy + d^2xyx)b^*$. Осталось проверить, что

$$F_2^v\big(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes (1 + dy + d^2xyx)b^*\big) \\ = \begin{cases} dxy, & \text{если } a = y,\ b = xy \text{ и } v = w_1, \\ xy, & \text{если } a = y,\ b = xy \text{ и } v = w_2, \\ x, & \text{если } a = y,\ b = yxy \text{ и } v = w_1, \\ 1, & \text{если } a = y,\ b = (xy)^2 \text{ и } v = w_2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а значит, F_2^v дает нулевой вклад на одиннадцатом слагаемом, и

$$F_2^{w_1} = \begin{cases} 1 + yx + dyxy, & \text{если } a = x, \\ x + dxy, & \text{если } a = y, \end{cases} \qquad F_2^{w_2} = \begin{cases} y + dxyx, & \text{если } a = x, \\ 1 + xy, & \text{если } a = y, \end{cases}$$

$$F_2^{w_3} = \begin{cases} dyx + d(xy)^2, & \text{если } a = x, \\ 0, & \text{если } a = y. \end{cases}$$

3) В случае F_3^v, если $t_1\big(a_3C(a_4)\big) = 0$ для $1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_5 \otimes a_6$, то все суммы вида $\sum 1 \otimes a_1 \otimes .. \otimes a_5 \otimes a_6$ из определения $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$ дают нулевой вклад. Также, если $(a_3, a_4, a_5) = (x, x, x)$, то

$$t_1\big(vt_1(x \otimes x \otimes 1) \otimes x \otimes 1\big) = \begin{cases} 1 \otimes r_x \otimes 1, & \text{если } v = w_1, \\ 0, & \text{если } v \neq w_1, \end{cases}$$

и, таким образом,

$$F_3^v(1 \otimes a \otimes b \otimes x \otimes x \otimes x \otimes 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = x,\ b = (xy)^2 \text{ и } v = w_1, \\ dyxy, & \text{если } a = x,\ b \in \{xy, xyx\} \text{ и } v = w_1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теперь, $t_1(vt_1(y \otimes y \otimes 1) \otimes y \otimes 1) = t_1(v(1 \otimes r_y \otimes 1) \otimes y \otimes 1)$, а значит, для четвертого слагаемого $F_3^{w_1} = 0$, и

$$F_3^{w_2}(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1) = \begin{cases} dyxy, & \text{если } a = y \text{ и } b = yx, \\ 1 + dy, & \text{если } a = y \text{ и } b = (xy)^2, \end{cases}$$

и $F_2^{w_2} = 1$ на четвертом слагаемом для $a = y$, в любом другом случае оно дает нулевой вклад. Также

- $F_3^{w_3}\big(a \otimes x \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(dx^2 \otimes r_y \otimes 1 + dxyx \otimes r_y \otimes x + dx \otimes r_x \otimes yx + d^2x \otimes r_x \otimes yxy + d^2xyx \otimes r_y \otimes xy + d^2xy \otimes r_x \otimes (xy)^2)\big)$,
- $F_3^{w_3}\big(a \otimes y \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(dyx \otimes r_y \otimes 1 + dy \otimes r_x \otimes yx + d^2y \otimes r_x \otimes yxy + d^2y^2 \otimes r_x \otimes (xy)^2)\big)$,
- $F_3^{w_3}\big(a \otimes xy \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(dxyx \otimes r_y \otimes 1 + dxy \otimes r_x \otimes yx + d^2xy \otimes r_x \otimes yxy)\big)$,
- $F_3^{w_3}\big(a \otimes yx \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(at_2(d(xy)^2 \otimes r_y \otimes x + dyx \otimes r_x \otimes yx + d^2yx \otimes r_x \otimes yxy + d^2(yx)^2 \otimes r_y \otimes xy + d^2yxy \otimes r_x \otimes (xy)^2)\big)$,
- $F_3^{w_3}\big(a \otimes xyx \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(at_2(dxyx \otimes r_x \otimes yx + d^2xyx \otimes r_x \otimes yxy + d^2(xy)^2 \otimes r_x \otimes (xy)^2)\big)$,

- $F_3^{w_3}\big(a \otimes yxy \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(at_2(d(xy)^2 \otimes r_y \otimes 1 + dyxy \otimes r_x \otimes yx + d^2yxy \otimes r_x \otimes yxy)\big)$,
- $F_3^{w_3}\big(a \otimes (xy)^2 \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1\big) = et_3\big(at_2(d(xy)^2 \otimes r_x \otimes yx + d^2(xy)^2 \otimes r_x \otimes yxy)\big)$,

и теперь несложно доказать, что $F_3^{w_3}$ дает нулевой вклад для $b \in \{x, y, xy, xyx\}$ после домножения справа на $(1 + dy + d^2xyx)b^*$. Таким образом,

$$F_3^{w_3}\big(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes (1 + dy + d^2xyx)b^*\big) = \begin{cases} dxyx + d^2(xy)^2, & \text{если } a = y \text{ и } b = yx, \\ dx, & \text{если } a = y \text{ и } b = yxy, \\ dyx, & \text{если } a = x \text{ и } b = (xy)^2. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим седьмое слагаемое из определения $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} &F_3^v(a \otimes b \otimes y \otimes xyx \otimes y \otimes 1) \\ &= et_3\Big(at_2\Big(bt_1\big(v(y \otimes r_y \otimes 1 + 1 \otimes r_y \otimes y + dy \otimes r_y \otimes y + d \otimes r_y \otimes xyx \\ &\qquad + d^2y \otimes r_y \otimes xyx) \otimes y \otimes 1\big)\Big)\Big), \end{aligned}$$

и эта формула не равняется нулю только для $v = w_3$. В этом случае $dF_3^v(a \otimes b \otimes y \otimes xyx \otimes y \otimes 1) = F_3^v(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1)$, а значит,

$$\begin{aligned} &F_3^{w_3}\big(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes (d + d^2y + d^3xyx)b^*\big) \\ &\qquad = F_3^{w_3}\big(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes (1 + dy + d^2xyx)b^*\big) \end{aligned}$$

и, согласно приведенным выше вычислениям, можно вывести, что $F_3^v = 0$ на восьмом и одиннадцатом слагаемых, а значит,

$$F_3^{w_1} = \begin{cases} 1, & \text{если } a = x, \\ 0, & \text{если } a = y, \end{cases} \quad F_3^{w_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = x, \\ 1, & \text{если } a = y, \end{cases} \text{ и } F_3^{w_3} = 0.$$

4) Наконец, необходимо вычислить значение F_4^v на первом, четвертом, восьмом и одиннадцатом слагаемых из суммы Φ_5, так как если $t_1(a_5C(a_6)) = 0$ для $1 \otimes a_1 \otimes \ldots a_5 \otimes a_6$, то $F_4^v(1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_6) = 0$ по определению. Очевидно, что, так как $vt_1(x \otimes x \otimes 1) = v(1 \otimes r_x \otimes 1) \neq 0$

только для $v = w_1$, то $F_4^v = 0$ на первом слагаемом для $v \in \{w_2, w_3\}$, а в случае $v = w_1$ выполняется соотношение

$$\sum_{b\in B^*} F_4^{w_1}(a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes b^*){=}et_3\Big(at_2\big(bt_1(x\otimes x\otimes 1)\big)\Big) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = x, \\ 0, & \text{если } a = y, \end{cases}$$

что было показано в случаях, рассмотренных выше. Теперь очевидно, что восьмое слагаемое не дает ненулевого вклада в вычисление F_4^v, и

$$\sum_{b\in B^*} F_4^v\big(a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y\otimes (1+dy+d^2xyx)b^*\big)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } v = w_1, \\ \sum\limits_{b\in B^*} et_3\Big(at_2\big(bt_1(y\otimes y\otimes 1)\big)\Big)(1+dy+d^2xyx)b^*, & \text{если } v = w_2, \\ \sum\limits_{b\in B^*} et_3\Big(at_2\big(bt_1(y{\otimes}x{\otimes}1{+}dy{\otimes}x{\otimes}y{+}dyx{\otimes}y{\otimes}1)\big)\Big)(1{+}dy{+}d^2xyx)b^*, & \text{если } v{=}w_3, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } v = w_2 \text{ и } a = y, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

а значит, F_4^v дает нуль на одиннадцатом слагаемом, и, таким образом,

$$F_3^{w_1} = \begin{cases} 1, & \text{если } a = x, \\ 0, & \text{если } a = y, \end{cases} \quad F_3^{w_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = x, \\ 1, & \text{если } a = y, \end{cases} \text{ и } F_3^{w_3} = 0.$$

Осталось только сложить все воедино:

$$\sum_{i=1}^{4} F_i^v = \begin{cases} dyxy, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_1, \\ d(xy)^2, & \text{если } a = x \text{ и } v = w_3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Наконец, для доказательства леммы осталось сложить полученные суммы для всех $v \in \{w_1, w_2, w_3\}$:

$$[v, e] = \sum_{i=1}^{2} S_i^v + \sum_{i=1}^{4} F_i^v = 0. \qquad \square$$

Следствие 5. *Справедливы следующие соотношения:*

(1) $\Delta(q_1 e) = dp_1 e$ *и* $\Delta(q_2 e) = dp_2 e$,
(2) $\Delta(ve) = 0$ *для всех* $v \in \{w_1, w_2, w_3\}$.

Доказательство. Заметим, что $\Delta(q_1) = dp_1$, $\Delta(q_2) = \Delta(v) = 0$ для всех $v \in \{w_1, w_2, w_3\}$ и $\Delta(e) = d^3 p_1 q_1 w_1$ согласно леммам 2, 3 и 5. Тогда в силу соотношения Трэдлера $\Delta(ab) = \Delta(a)b + a\Delta(b) + [a, b]$ и только что доказанных результатов про скобку Герстенхабера имеем:

$$\begin{aligned}
&\Delta(q_1 e) = dp_1 e + d^3 p_1 q_1^2 w_1 + 0 = dp_1 e + d^3 q_1 q_2 w_2 = dp_1 e,\\
&\Delta(q_2 e) = 0 + d^3 p_1 q_1 q_2 w_1 + dp_2 e = dp_2 e,\\
&\Delta(ve) = 0 \cdot e + d^3 p_1 q_1 v w_1 + 0 = 0
\end{aligned}$$

для всех $v \in \{w_1, w_2, w_3\}$. $\square$

§6. Основной результат

Фиксируем алгебраически замкнутое поле K характеристики 2, скаляр $d \in K$ и алгебру $R(2, 0, d)$, описанную в пункте 3.1. Тогда BV-структура на алгебре когомологий Хохшильда $HH^*(R)$, задающая структуру алгебры Ли, описывается оператором

$$\Delta : HH^*(R) \longrightarrow HH^*(R)$$

степени -1.

Теорема 6. *В предыдущих обозначениях оператор Δ полностью задается следующими соотношениями:*

- *Степени 1:* $\begin{cases} \Delta(q_1){=}dp_1, \Delta(p_1q_1){=}p_2{+}dp_1, \Delta(p_1q_2){=}dp_2 + p_3,\\ \Delta(p_2q_1){=}p_3{+}dp_2, \Delta(p_3q_2){=}p_2, \Delta(p_4q_1){=}p_2,\\ \Delta(p_3q_1) = \Delta(p_2q_2) = p_1,\ \Delta(p_4q_2) = p_3, \end{cases}$
- *Степени 3:* $\begin{cases} \Delta(q_1w_1) = \Delta(q_2w_2) = w_3,\ \Delta(q_2w_1) = q_2^2 + w_2,\\ \Delta(q_1w_2) = \Delta(q_2w_3) = q_1^2 + w_1 + d(p_1+1)w_2,\\ \Delta(q_1w_3) = q_2^2 + w_2 + dw_3, \end{cases}$
- *Степени 4:* $\Delta(e) = \Delta(p_4 e) = d^3 p_1 q_1 w_1$,
- *Степени 5:* $\Delta(q_1 e) = dp_1 e$, $\Delta(q_2 e) = dp_2 e$,
- $\Delta(ab) = 0$ *для всех других комбинаций порождающих элементов* $a, b \in \mathcal{X} \cup \{1\}$.

Доказательство. Для описанного выше оператора Δ соотношения степеней 1, 2, 3 и 4 вычислены в леммах 2, 3, 4 и 5 соответственно, а соотношения более высоких степеней приведены в следствии 5. Комбинируя все полученные вычисления вместе, получаем необходимый результат. $\square$

Список литературы

1. N. Bian, G. Zhang, P. Zhang, *Setwise homotopy category.* — Appl. Categ. Struct. **17**, No. 6 (2009), 561–565.
2. C. Cibils, A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of abelian groups.* — Arch. Math. **68** (1997), 17–21.
3. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lect. Notes Math. **1428**, Berlin, Heidelberg, 1990.
4. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. **78**, No. 2 (1963), 267–288.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
6. А. И. Генералов, А. В. Семенов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* IV*: Алгебра когомологий для исключительных локальных алгебр.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **478** (2019), 32–77.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I. *Обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, No. 1 (2006), 55–107.
8. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
9. G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra.* — Ann. Math. **46**, No. 2 (1945), 58–67.
10. A. A. Ivanov, S. O. Ivanov, Yu. Volkov, G. Zhou, *BV structure on Hochschild cohomology of the group ring of the quaternion group of order eight in characteristics two.* — J. Algebra **435** (2015), 174–203.
11. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа. Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 152–178.
12. А. А. Иванов, *BV-структура на когомологиях Хохшильда локальных алгебр кватернионного типа в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 136–185.
13. S. MacLane, *Homology.* Grund. Math. Wiss. **114**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1963.
14. L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras.* — K-Theory **32**, No. 3 (2004), 231–251.
15. L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology.* — Bulletin de la Société Mathematique de France **137**, No. 2 (2009) 277–295.
16. T. Tradler, *The Batalin-Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products.* — Ann. Inst. Fourier **58**, No. 7 (2008), 2351–2379.
17. Y. Volkov, *BV-differential on Hochschild cohomology of Frobenius algebras.* — J. Pure Appl. Algebra **220**, No. 10 (2016), 3384–3402.
18. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Алгебра и анализ **23** (2011), 99–139.
19. T. Yang, *A Batalin-Vilkovisky algebra structure on the Hochschild cohomology of truncated polynomials*, `arxiv:0707.4213, 2007`.

20. A. V. Semenov, A. Generalov, *BV-structure on Hochschild cohomology for exceptional local algebras of quaternion type. Case of even parameter*, preprint, https://arxiv.org/abs/2109.01814.

Semenov A. V. BV-structure on Hochschild cohomology for exceptional local algebras of quaternion type. The case of small parameter.

This is the second paper in the cycle of papers about the BV-structure on the Hocshild cohomology of exceptional algebras of quaternion type. The full description of the BV-structure is given for the case of algebras $R(k, 0, d)$ of quaternion type, defined by parameter $k = 2$ according to the Erdmann classification.

Лаборатория им. П. Л. Чебышёва
С.-Петербургский
Гос. Университет, 14 линия ВО, 29Б
С.-Петербург, 199178 Россия
E-mail: asemenov.spb.56@gmail.com

Поступило 18 января 2022 г.