

В. А. Петров, А. К. Сони́на

## КОЛЬЦО ЧЖОУ ОРОСФЕРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ЧИСЛОМ ПИКАРА ОДИН

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Сферические многообразия и их компактификации играют важную роль как для изучения действующей на них группы, так и в качестве интересного модельного примера многообразий с большими группами автоморфизмов. В настоящей работе мы рассматриваем случай компактификации оросферических пространств с числом Пикара один. Такие многообразия допускают полную классификацию, приведенную в работе [6]. Особый интерес представляют два многообразия размерностей 7 и 23 с действием исключительных групп типов  $G_2$  и  $F_4$  соответственно.

Мы даем рецепт вычисления таблицы умножения эквивариантных колец Чжоу таких пространств при помощи метода Горески–Котвица–Макферсона. А именно, эквивариантное кольцо когомологий допускает описание в виде набора расстановок многочлена на графе, вершины которого соответствуют точкам, неподвижным под действием тора, а ребра – инвариантным прямым. Мы строим так называемый flow-up базис, который позволяет быстро вычислять произведение двух образующих. В частном случае пространства с действием группы типа  $G_2$  мы явно задаем эквивариантное кольцо Чжоу образующими и соотношениями.

Вычисление по большей части чисто комбинаторное по своей природе. Однако для построения flow-up базиса используется тот геометрический факт, что раздутие рассматриваемого многообразия вдоль одного проективного однородного подмногообразия изоморфно проективизации некоторого расслоения над другим проективным однородным подмногообразием (доказанный, например, в [4]).

Отметим, что в работе [7] вычислено неэквивариантное кольцо Чжоу для этого же многообразия с рациональными коэффициентами

---

*Ключевые слова:* оросферические многообразия, ГКМ-многообразия, кольцо Чжоу.

Теорема 4 была получена при поддержке гранта РФФ 20-41-04401.

(см. также [4] для случая квантовых когомологий и для производной категории). Что же касается случая  $F_4$ , авторы упомянутой работы считают данное вычисление “unfeasible” (недостижимым). Мы имеем основания считать, что наш метод справится с этой работой, однако для этого случая потребуются компьютерные вычисления.

## §2. ОРОСФЕРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Базовое поле предполагается для простоты алгебраически замкнутым характеристики 0. Пусть  $G$  – редуктивная группа и  $B \leq G$  – борелевская подгруппа.  $G$ -многообразие  $X$  будем называть *сферическим*, если в  $X$  есть плотная  $B$ -орбита.

Пусть  $X$  –  $G$ -сферическое многообразие, и пусть  $H$  – стабилизатор точки из плотной  $G$ -орбиты в  $X$ . Тогда многообразие  $X$  – *оросферическое*, если  $H$  содержит подгруппу, сопряженную с  $U$ , где  $U$  – максимальная унипотентная подгруппа  $G$ , содержащаяся в борелевской подгруппе  $B$ .

Будем рассматривать гладкие проективные оросферические многообразия с группой Пикара ранга 1. В статье [6] получена следующая классификационная теорема.

**Теорема 1.** *Пусть  $X$  – гладкое проективное  $G$ -оросферическое многообразие с группой Пикара ранга 1 над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда либо*

(0)  $X$  – однородное,

либо  $X$  может быть однозначно построено из тройки (тип  $G, \omega_Y, \omega_Z$ ), находящейся в следующем списке:

- (1)  $(B_n, \omega_{n-1}, \omega_n)$  с  $n \geq 3$ ;
- (2)  $(B_3, \omega_1, \omega_3)$ ;
- (3)  $(C_n, \omega_m, \omega_{m-1})$ , с  $n \geq 2$  и  $2 \leq m \leq n$ ;
- (4)  $(F_4, \omega_2, \omega_3)$ ;
- (5)  $(G_2, \omega_1, \omega_2)$ ,

где  $\omega_Y, \omega_Z$  – фундаментальные веса.

В дальнейшем нас будут интересовать случаи (4) и (5) из этой классификации.

Остановимся более подробно на конструкции гладкого проективного неоднородного оросферического многообразия с группой Пикара ранга 1. Обозначим через  $V_Y = V(\omega_Y)$  и  $V_Z = V(\omega_Z)$  неприводимые представления  $G$  со старшими весами  $\omega_Y$  и  $\omega_Z$  соответственно. Пусть  $v_Y$  и

$v_Z$  – соответствующие старшие весовые вектора. Пусть  $P_Y$  – стабилизатор прямой  $[v_Y]$  в  $\mathbb{P}(V_Y)$  и  $P_Z$  – стабилизатор прямой  $[v_Z]$  в  $\mathbb{P}(V_Z)$ . Оба стабилизатора будут параболическими подгруппами  $G$ . Пусть  $Y$  –  $G$ -орбита  $[v_Y]$  в  $\mathbb{P}(V_Y)$ , а  $Z$  –  $G$ -орбита  $[v_Z]$  в  $\mathbb{P}(V_Z)$ , тогда  $Y \cong G/P_Y$  и  $Z \cong G/P_Z$ .

В дальнейшем нам потребуется действие тора, большего, чем максимальный тор группы  $G$ . Воспользуемся для этого следующей теоремой из статьи [6].

**Теорема 2.** *В случаях, когда  $X$  – многообразие типа (1)–(5) из теоремы 1, его группа автоморфизмов является, соответственно,  $(SO(2m+1) \times \mathbb{C}^*) \times V(\omega_m)$ ,  $(SO(7) \times \mathbb{C}^*) \times V(\omega_3)$ ,  $(Sp(2m) \times \mathbb{C}^*)/\{\pm 1\} \times V(\omega_1)$ ,  $(F_4 \times \mathbb{C}^*) \times V(\omega_4)$  и  $(G_2 \times \mathbb{C}^*) \times V(\omega_1)$ .*

Значит, на  $X$  действует максимальный тор ранга на 1 больше, чем в соответствующей группе  $G$ . Образующую группы характеров дополнительного сомножителя мы будем обозначать через  $t$ .

В статье [6] также доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть  $X$  – одно из многообразий случаев (1)–(5) теоремы 1. Тогда*

$$X = \overline{G[v_Y + v_Z]} \subset \mathbb{P}(V_Y \oplus V_Z)$$

*является замыканием  $G$ -орбиты прямой  $[v_Y + v_Z]$  в  $\mathbb{P}(V_Y \oplus V_Z)$ .*

### §3. ГРАФЫ И БАЗИСЫ

**3.1. ГКМ-многообразия и графы.** Пусть  $X$  – гладкое проективное многообразие с действием тора  $T$ . Мы предполагаем, что выполнены следующие три условия:

- (1)  $T$  действует на  $X$  с конечным числом неподвижных точек;
- (2)  $T$  действует на  $X$  с конечным числом инвариантных  $\mathbb{P}^1$ ;
- (3) рассмотрим граф, вершины которого отвечают неподвижным точкам, а ребра – инвариантным прямыми (несложно видеть, что каждая инвариантная прямая содержит две неподвижные точки). На каждом ребре поставим в качестве метки характер тора такой, что прямая неподвижна относительно действия ядра этого характера. Мы требуем, чтобы все метки на ребрах, исходящих из фиксированной вершины, были попарно различны.

Описанный граф называется GKM-графом в честь Горески, Коттвица и Макферсона, впервые рассмотревших его в основополагающей статье [5]. Известно, что степень каждой вершины равна размерности многообразия, а произведение меток на ребрах, исходящих из одной вершины, равняется старшему классу Черна касательного пространства к многообразию в соответствующей точке.

По теореме Бяльницкого-Бирули эквивариантная группа Чжоу многообразия, удовлетворяющего условию 1 выше – свободный модуль над  $\mathrm{SH}_T^*(pt)$  ранга, равного количеству вершин в GKM-графе. Отметим, что  $\mathrm{SH}_T^*(pt)$  является симметрической алгеброй на группе характеров, т.е. может рассматриваться как кольцо многочленов.

Чтобы определить мультипликативную структуру, рассмотрим отображение локализации Ботта, которое элемент  $\xi \in \mathrm{SH}_T^*(X)$  отправляет в набор  $i_x^*(\xi) \in \mathrm{SH}_T^*(pt)$ , где  $i_x: pt \rightarrow X$  – вложение соответствующей точки. Образы не могут быть произвольными, а должны удовлетворять условиям делимости: если на ребре  $xy$  стоит метка  $l_{xy}$ , то  $l_{xy}$  делит  $i_x^*(\xi) - i_y^*(\xi)$  как многочлен, что легко видеть из рассмотрения пулбэка на соответствующую инвариантную  $\mathbb{P}^1$ .

По теореме Горески–Коттвица–Макферсона образ локализации Ботта, взятой с рациональными коэффициентами, как раз и описывается этими условиями делимости (см., например, [1, §3.3]). Целочисленно, вообще говоря, можно гарантировать лишь то, что локализация Ботта инъективна, а образ является целочисленной подрешеткой в подкольце элементов, удовлетворяющих условию делимости (мы будем их еще называть *правильными расстановками многочленов* на GKM-графе). Однако в случае оросферических многообразий с числом Пикара 1 образ будет совпадать с этим подкольцом, что следует из наличия flow-up базиса (см. ниже).

**3.2. Поведение при пулбэках и пушфорвардах.** Посмотрим, как отображение локализации Ботта ведет себя при композиции с пулбэками и пушфорвардами. А именно, пусть  $f: X \rightarrow Y$  –  $T$ -эквивариантное отображение между двумя гладкими многообразиями  $X$  и  $Y$ . Оно индуцирует отображение соответствующих GKM-графов, которое будет обозначаться той же буквой.

Очевидно, что  $i_x^*(f^*(\xi)) = i_{f(x)}^*(\xi)$ , т.е. при пулбэке многочлены из правильной расстановки просто копируются в соответствующие вершины.

Формула для пушфорварда следует из [2, теорема 1]:

$$i_y^*(f_*(\xi)) = \sum_{f(x)=y} i_x^*(\xi) \frac{c(y)}{c(x)},$$

где  $c(x)$  и  $c(y)$  – произведение меток на ребрах, исходящих из  $x$  и  $y$  соответственно.

**3.3. ГКМ-граф для оросферического многообразия.** ГКМ-граф проективного однородного многообразия  $G/P$  совпадает с графом порядка Брюа для смежных классов  $W(G)/W(P)$ , где  $W$  – группа Вейля, см., например, [8].

Чтобы построить ГКМ-граф для оросферических многообразий, соответствующих группам  $G_2$  и  $F_4$ , сделаем следующую процедуру: возьмем графы  $G_2/P_1$  и  $G_2/P_2$  (соответственно,  $F_4/P_2$  и  $F_4/P_3$ ), соединим ребром с меткой  $\omega_2 - \omega_1 + t$  (соответственно,  $\omega_3 - \omega_2 + t$ ) вершины, соответствующие нейтральному элементу в каждой из долей. После этого подействуем всеми симметриями группы Вейля на это ребро, чтобы новый граф выдерживал действие группы Вейля.

Поймем, что этот процесс действительно дает ГКМ-граф оросферического многообразия. Действительно,  $X = \overline{G(v_Y + v_Z)} \subset \mathbb{P}(V_Y \oplus V_Z)$  по теореме 3. Если точка  $[x : y]$  неподвижна, то либо  $x = 0$ , либо  $y = 0$ , а поэтому все неподвижные точки лежат в  $Y \cup Z$  (см. §2 для обозначений). Поэтому вершины графа будут объединением вершин графов  $G/P_X$  и  $G/P_Y$ . Теперь прямая  $[\alpha e : \beta e]$  и все ее образы под действием группы Вейля тоже инвариантны, что дает нам все описанные выше ребра между двумя долями. Степень каждой вершины при этом равна размерности многообразия, поэтому других инвариантных прямых нет.

Для  $G_2$  получается граф на 12 вершинах регулярный степени 7 (см. рис. 1); для  $F_4$  получается граф на 192 вершинах регулярный степени 23. Назовем эти графы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

**3.4. Flow-up базисы.** Будем называть набор правильных расстановок многочленов  $F^{(x)}$ , параметризованный вершинами  $x$ , *flow-up базисом*, если существует частичный порядок на вершинах такой, что

- все  $F_y^{(x)}$  однородные одинаковой степени.
- для любой вершины  $F_x^{(x)}$  равняется произведению меток ребер вида  $xy$  с  $y < x$ , и если  $F_y^{(x)} \neq 0$ , то  $y \geq x$ .

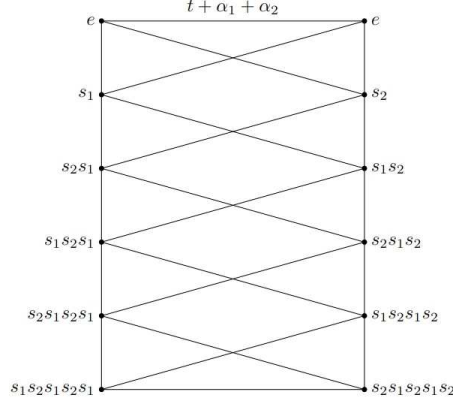


Рис. 1. GKM-граф для оросферического многообразия, соответствующего  $G_2$

Предположим, что существует набор элементов  $\xi^{(x)} \in \text{CH}_T(X)$  такой, что их образы  $F^{(x)}$  при локализации Ботта образуют flow-up базис. Тогда этот набор действительно образует базис  $\text{CH}_T(X)$  над  $\text{CH}_T(pt)$ , и GKM-описание эквивариантного кольца Чжоу выполняется целочисленно.

Действительно, достаточно показать, что любая правильная расстановка  $P$  раскладывается в линейную комбинацию образов  $F^{(x)}$ . Рассмотрим минимальную  $x$  такую, что  $P_x \neq 0$ ; доказательство будет вестись индукцией по  $x$ . По определению  $x$  имеем  $P_y = 0$  при  $y < x$ , и из свойства делимости следует, что  $P_x$  делится на  $F_x^{(x)}$ , скажем,  $P_x = cF_x^{(x)}$ . Теперь заменяем  $P$  на  $P' = P - cF^{(x)}$ ; тогда  $P'_x = 0$  и  $P'_y = 0$  при  $y < x$ ; по индукционному предположению  $P'$  представляется в виде линейной комбинации, но тогда представляется и  $P$ .

Это доказательство дает алгоритм, с помощью которого можно разложить любую правильную расстановку многочленов по flow-up базису.

Flow-up базисы для проективных однородных многообразий описаны в статье [8]: они получаются применением некоторых дифференциальных операторов к эквивариантному классу точки.

**3.5. Flow-up базисы для оросферических многообразий.** В статье [4] описан целочисленный базис для неэквивариантной группы Чжоу оросферического многообразия, и он состоит из двух частей. Одна получается пушфорвардом классов Шуберта при отображении  $G/P_Y$  в  $X$ .

Далее, показано, что исключительный дивизор раздутия  $X$  в  $Y$  может быть отождествлен с  $G/(P_Y \cap P_Z)$ ; при этом отображение в  $Y$  совпадает с естественной проекцией  $p_Y: G/(P_Y \cap P_Z) \rightarrow G/P_Y$ , которая, в свою очередь, может быть отождествлена с проективизацией некоторого векторного расслоения на  $G/P_Y$ . Аналогичное утверждение верно и с заменой  $Y$  на  $Z$  и наоборот. Теперь вторая половина базиса получается взятием образов при отображении  $p_Y$  прообразов классов Шуберта  $G/P_Z$  на  $G/(P_Y \cap P_Z)$ . Заметим, что образ при проективизации векторного расслоения ранга  $k+1$  на уровне групп Чжоу считается так: надо умножить элемент на  $k$ -ю степень первого класса Черна расслоения  $\mathcal{O}(1)$  и взять пушфорвард.

Это дает следующий рецепт построения flow-up базиса для оросферических многообразий. Первую половину flow-up базиса мы получим пушфорвардом flow-up базиса из  $G/P_Y$  в  $X$ . В случае  $G_2$  это будут расстановки  $b_j$ , где  $2 \leq j \leq 7$ , индекс расстановки указывает на степень данной расстановки. Для  $F_4$  эти расстановки будут иметь степень от 3 до 23 (всего их будет 96).

Рассмотрим множество  $U(P_Y \cap P_Z) \setminus U(P_Z) = U(P_Y) \setminus U(P_Z)$ , где  $U(P)$  – унипотентный радикал. Тогда  $k = \text{card}(U(P_Y) \setminus U(P_Z))$ . Обозначим через  $\zeta$  первый эквивариантный класс Черна соответствующего расслоения  $\mathcal{O}(1)$ ; это линейный многочлен от характеров тора.

Пусть  $\{\xi^{(v)}\}$  – flow-up базис для  $G/P_Y$ . Тогда  $(p_Z)_*((p_Y)^*(\xi^{(v)}\zeta^k))$  образует правильную расстановку на ГКМ-графе, соответствующем многообразию  $X$ .

Выпишем подробнее, как выглядит эта расстановка. По формулам для пушфорвада и пуллбэка получается, что в вершине  $w$  стоит

$$\sum_{u \in W(P_Y)/W(P_Y \cap P_Z)} \frac{(\xi^{(v)})_{[wu]} wu(\zeta^k)}{wu(\prod_{\alpha \in U(P_Y) \setminus U(P_Z)} \alpha)},$$

где  $[wu]$  – класс элемента  $wu$  в  $W(G)/W(P_Z)$ .

Будем обозначать эти элементы  $f_j$  ( $j \geq 2$ ) для расстановок степени хотя бы 2. Для степени 1 получаем образующую группы Пикара, которую обозначаем через  $h$ . В степени 0 будет постоянная расстановка, состоящая из всех единиц.

**Пример.** Напишем формулу выше в частном случае, когда  $G = G_2$ . В этом случае  $k = 1$  (поскольку  $U(P_Y) \setminus U(P_Z) = \{\alpha_2\}$ ). Имеем  $W(P_Y) = \{e, s_2\}$  и  $W(P_Z) = \{e, s_1\}$ , и тогда  $W(P_Y \cap P_Z) = \{e\}$ . В этом случае  $\zeta$  равен  $-\alpha_1 - t$ . Тогда формула переписывается в следующем виде:

$$\frac{(\xi^{(v)})_{[w]}w(-\alpha_1 - t) - (\xi^{(v)})_{[ws_2]}w(-\alpha_1 - \alpha_2 - t)}{w(\alpha_2)}.$$

**Пример.** Второй частный случай формулы получается, когда  $G = F_4$ . В этом случае  $k = 2$  (поскольку  $U(P_Y) \setminus U(P_Z) = \{\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4\}$ ). Сейчас

$$W(P_Y) = \{e, s_1, s_3, s_4, s_1s_3, s_1s_4, s_3s_4, s_4s_3, s_3s_4s_3\}$$

и

$$W(P_Z) = \{e, s_1, s_2, s_4, s_1s_2, s_1s_4, s_2s_4, s_2s_1, s_2s_1s_2\},$$

а  $W(P_Y \cap P_Z) = \{e, s_1, s_4, s_1s_4\}$ . А поэтому  $W(P_Y)/W(P_Y \cap P_Z) = \{e, s_3, s_4s_3\}$ . В этом случае  $\zeta = -\alpha_2 - t$ . Таким образом, наша формула состоит из 3 слагаемых и имеет вид:

$$\frac{(\xi^{(v)})_{[w]}w(\zeta^2)}{w(\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4))} - \frac{(\xi^{(v)})_{[ws_3]}ws_3(\zeta^2)}{w(\alpha_3\alpha_4)} + \frac{(\xi^{(v)})_{[ws_4s_3]}ws_4s_3(\zeta^2)}{w((\alpha_3 + \alpha_4)\alpha_4)}.$$

#### §4. ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ $CH_T^*(X)$

**4.1. Образующие эквивариантного кольца Чжоу.** Рассмотрим  $X = (G_2, \omega_1, \omega_2)$ . Как описано выше, существует flow-up базис, состоящий из  $\{b_j\}$  с  $2 \leq j \leq 7$ ,  $\{f_j\}$  для  $2 \leq j \leq 5$ ,  $h$  – образующей группы Пикара, и постоянной расстановки степени 0 из всех единиц. Как конкретно выглядят эти расстановки, можно посмотреть в приложении. Теперь, пользуясь описанным выше алгоритмом, легко разложить попарные произведения опять по этому же базису. Отсюда получаем, что над  $CH_T^*(pt) \simeq \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2, t]$  кольцо  $CH_T^*(X)$  порождено  $h, f_2, f_3$ , поскольку

- $f_4 = -f_3 \cdot (\alpha_2 + \alpha_1) - f_2^2 + hf_3 + hf_2 \cdot \alpha_1$ ;
- $f_5 = f_3 \cdot (\alpha_2 + \alpha_1)(3\alpha_2 + 6\alpha_1) - f_2f_3 + f_2^2 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1) - hf_3 \cdot (5\alpha_2 + 7\alpha_1) - hf_2 \cdot \alpha_1(4\alpha_2 + 6\alpha_1) - 2hf_2^2 + 2h^2f_3 + 2h^2f_2 \cdot \alpha_1$ ;



- $b_2 = -3f_2 - h \cdot \alpha_2 + h^2$ ;
- $b_3 = -2f_3 - f_2 \cdot (\alpha_2 + 3\alpha_1) + hf_2$ ;
- $b_4 = 3f_2^2 - 2hf_3 - 3hf_2 \cdot \alpha_1$ ;
- $b_5 = f_2f_3 - f_2^2 \cdot \alpha_2 + hf_3 \cdot \alpha_2 + hf_2 \cdot \alpha_1\alpha_2 + hf_2^2 - h^2f_3 - h^2f_2 \cdot \alpha_1$ ;
- $b_6 = -f_3 \cdot (\alpha_2 + \alpha_1)(3\alpha_2 + 6\alpha_1)(4\alpha_2 + 6\alpha_1) + f_2f_3 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1) - f_2^2 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1)(4\alpha_2 + 6\alpha_1) + hf_3 \cdot (23\alpha_2^2 + 67\alpha_1\alpha_2 + 48\alpha_1^2) + hf_2 \cdot \alpha_1(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(4\alpha_2 + 6\alpha_1) - hf_2f_3 + 3hf_2^2 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1) - h^2f_3 \cdot (13\alpha_2 + 19\alpha_1) - 3h^2f_2 \cdot \alpha_1(4\alpha_2 + 6\alpha_1) - 2h^2f_2^2 + 2h^3f_3 + 2h^3f_2 \cdot \alpha_1$ ;
- $b_7 = -f_3 \cdot (\alpha_2 + \alpha_1)(3\alpha_2 + 6\alpha_1)(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(t - 3\alpha_2 - 4\alpha_1) + f_2f_3 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1)(t - 3\alpha_2 - 4\alpha_1) - f_2^2 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1)(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(t - 3\alpha_2 - 4\alpha_1) + hf_3 \cdot (23\alpha_2^2t - 81\alpha_2^3 + 67\alpha_1\alpha_2t - 347\alpha_1\alpha_2^2 + 48\alpha_1^2t - 490\alpha_1^2\alpha_2 - 228\alpha_1^3) + hf_2 \cdot \alpha_1(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(t - 3\alpha_2 - 4\alpha_1) - hf_2f_3 \cdot (t - 7\alpha_2 - 10\alpha_1) - hf_2^2 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1)(-3t + 13\alpha_2 + 18\alpha_1) + h^2f_3 \cdot (-13\alpha_2t + 62\alpha_2^2 - 19\alpha_1t + 176\alpha_1\alpha_2 + 124\alpha_1^2) - h^2f_2 \cdot \alpha_1(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(3t - 13\alpha_2 - 18\alpha_1) - h^2f_2f_3 + h^2f_2^2 \cdot (-2t + 18\alpha_2 + 26\alpha_1) + h^3f_3 \cdot (2t - 19\alpha_2 - 27\alpha_1) + h^3f_2 \cdot \alpha_1(2t - 18\alpha_2 - 26\alpha_1) - 2h^3f_2^2 + 2h^4f_3 + 2h^4f_2 \cdot \alpha_1$ .

Также отметим, что кольцо  $CH_T^*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  можно породить уже образующими  $f_2$  и  $h$ , поскольку элемент  $2f_3$  будет выражаться через  $h$  и  $f_2$  (соотношение  $R_1$  из приложения).

#### 4.2. Соотношения в эквивариантном кольце Чжоу.

**Теорема 4.**  $CH_T^*((G_2, \omega_1, \omega_2)) = CH_T^*(pt)[h, f_2, f_3] / \langle R_i \rangle_{i \in I}$ , где  $h$  – образующая степени 1,  $f_2$  – образующая степени 2,  $f_3$  – образующая степени 3, а  $R_i$  – соотношения, указанные в Приложении.

**Доказательство.** Перейдем к неэквивариантным соотношениям (т.е. приравняем к нулю переменные  $\alpha_1, \alpha_2, t$ ). Рассмотрим соотношения

$$\begin{aligned} R'_1 &: 2f_3 - 4hf_2 + h^3 = 0; \\ R'_2 &: -3f_2^2 + h^2f_2 = 0; \\ R'_3 &: +f_3^2 + 2hf_2f_3 + 4h^2f_2^2 - 4h^3f_3 = 0; \\ R'_4 &: -f_2^3 + 2hf_2f_3 + 2h^2f_2^2 - 2h^3f_3 = 0. \end{aligned}$$

Ранги группы Чжоу в каждой коразмерности известны (количество базисных элементов данной степени в flow-up базисе – это ранг соответствующей группы Чжоу). Таким образом,  $\text{rk}(CH^k(X)) = 1$ , если  $k = 0, 1, 6, 7$ ,  $\text{rk}(CH^k(X)) = 2$ , если  $k = 2, 3, 4, 5$  и  $\text{rk}(CH^k(X)) = 0$  во всех остальных случаях.

Докажем, что однородные компоненты кольца, заданного соотношениями  $R'_1 - R'_4$ , порождаются элементами в таком же количестве, как и указанные выше ранги. Отсюда будет следовать, что неэквивариантное кольцо Чжоу задается данными соотношениями. Рассмотрим сначала степени  $\leq 5$ .

- Степень 1: порождается элементом  $h$ ;
- Степень 2: порождается элементами  $f_2$  и  $h^2$ ;
- Степень 3: порождается элементами  $h^3$ ,  $hf_2$  и  $f_3$ , но из соотношения  $R'_1$  выражается  $h^3$  ( $h^3 = 4hf_2 - 2f_3$ ), поэтому достаточно взять две образующие;
- Степень 4: порождается  $h^2f_2$ ,  $hf_3$  и  $f_2^2$ . Образующую  $h^2f_2$  можно выразить через  $R'_2$  как  $h^2f_2 = 3f_2^2$ , поэтому тоже достаточно взять две образующие;
- Степень 5: порождается  $h^2f_3$ ,  $hf_2^2$  и  $f_2f_3$ . Рассмотрим соотношение  $hR'_2 - f_2R'_1$ ; при приведении подобных слагаемых получится соотношение  $hf_2^2 - 2f_2f_3 = 0$ , поэтому тоже достаточно двух образующих. Отдельно обозначим соотношение  $hf_2^2 - 2f_2f_3 = 0$  за  $S_1$  для дальнейших вычислений.

Однородная компонента степени 6 порождается образующими  $hf_2f_3$ ,  $f_2^3$ ,  $f_3^2$ . Явное выражение каждой из них через соотношения  $R'_1 - R'_4$  получится слишком громоздким, поэтому будем доказывать по-другому.

Выразим в соотношениях  $R'_3$  и  $R'_4$  выражения  $h^3f_3$ ,  $h^2f_2^2$  через соотношения  $f_3R'_1$ ,  $f_2R'_2$  соответственно. Получим, что

$$\begin{aligned} X_1 : R'_3 - 4f_2R'_2 + 4f_3R'_1 &= -14hf_2f_3 + 12f_2^3 + 9f_3^2 = 0; \\ X_2 : R'_4 - 2f_2R'_2 + 2f_3R'_1 &= -6hf_2f_3 + 5f_2^3 + 4f_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Теперь разность  $3X_1 - 7X_2$  дает нам соотношение  $f_2^3 - f_3^2 = 0$ , а из разности  $2X_2 - X_1$ , пользуясь только что доказанным равенством, получается, что  $2hf_2f_3 - 3f_2^3 = 0$ , обозначим эти соотношения за  $S_2$  и  $S_3$  соответственно.

Выберем за единственную образующую в степени 6 выражение  $a = hf_2f_3 - f_2^3$  и докажем, что все остальные выражаются через нее.

- $f_2^3 = 3f_2^3 - 2f_2^3 = 2hf_2f_3 - 2f_2^3 = 2a$  из соотношения  $S_3$ ;
- $f_3^2 = f_2^3 = 2a$  из соотношения  $S_2$ ;
- $h^2f_2^2 = 3f_2^3 = 6a$  из соотношения  $f_2R'_2$ .

Компонента степени 7 порождается образующими  $hf_2^3, hf_3^2, f_2^2f_3$ . Заметим, что все, кроме последней, являются элементами коразмерности 6, умноженными на  $h$ , поэтому они будут выражаться через  $h^2f_2f_3 - hf_2^3$ . Осталось доказать, что оба слагаемых выражаются через  $f_2^2f_3$ . Элемент  $h^2f_2f_3$  можно выразить из соотношения  $f_3R'_2$  как  $h^2f_2f_3 = 3f_2^2f_3$ , а элемент  $hf_2^3$  – из соотношения  $f_2S_1$  как  $hf_2^3 = 2f_2^2f_3$ , поэтому компонента степени 7 порождается одной образующей.

Компонента степени 8 порождается образующими  $f_2^4, f_2f_3^2$  и образующими степени 7, умноженными  $h$ , поэтому все последние будут выражаться через  $hf_2^2f_3$ . Заметим, что первые две равны, исходя из соотношения  $f_2S_2$ , а  $hf_2^2f_3 = 2f_2f_3^2$ , исходя из соотношения  $f_3S_1$ . Таким образом, все элементы степени 8 выражаются через образующую  $f_2^4$ , однако оказывается, что она равна 0. Заметим, что  $3f_2^4 = 2hf_2^2f_3$  ввиду соотношения  $f_2S_3$ , но мы уже доказали, что  $2hf_2^2f_3 = 4f_2f_3^2 = 4f_2^4$ , что приводит нас к равенству  $3f_2^4 = 4f_2^4$ , значит,  $f_2^4 = 0$ .

Компонента степени 9 порождается образующими  $f_2^3f_3, f_3^3$  и образующими степени 8, умноженными на  $h$ , поэтому все последние равны 0. Заметим, что первые две равны, и докажем, что они равны 0. Имеем  $f_2^3f_3 = 3f_2^3f_3 - 2f_2^3f_3 = h(hf_2^2f_3) - h(4f_2^4 - h^2f_2^3)$ , исходя из соотношения  $f_2f_3R'_2$  для первого слагаемого и соотношения  $f_2^3R'_1$  – для второго. Но выражения, написанные в скобках – элементы восьмой степени, а значит, они равны 0.

В степени  $\geq 11$  образующие получаются умножением на  $h, f_2$  или  $f_3$  элементов степени  $\leq 8$ , значит, они равны 0.

Осталось разобрать степень 10. Там единственная нетривиальная образующая получается из образующей степени 7 умножением на  $f_3$ , т.е.  $f_2^2f_3^2$ . Но это равно  $f_2^5$ , а мы уже показали, что  $f_2^4 = 0$ .

Теперь, чтобы получить соотношения для  $CH_T^*(X)$ , необходимо поднять соотношения  $R'_1 - R'_4$  таким образом, чтобы полученные соотношения действительно выполнялись в эквивариантном кольце Чжоу. Для этого достаточно разложить каждое неэквивариантное соотношение по flow-up базису. Полученные соотношения  $R_1 - R_4$  описаны в приложении.  $\square$

**Следствие.**  $CH^*(X) = CH_T^*(X) \otimes_{CH_T^*(pt)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[h, f_2, f_3] / \langle R'_i \rangle_{i \in I}$ , где  $R'_i$  указаны выше.

## §5. ПРИЛОЖЕНИЕ

**5.1. Flow-up базис для оросферического многообразия**  $X = (G_2, \omega_1, \omega_2)$ . Вершины упорядочены от первой вершины доли  $G_2/P_Y$  до последней, а далее от первой вершины  $G_2/P_Z$  до последней.

$b_7$  :

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + 2\alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(\alpha_1 + t) \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{aligned}$$

$b_6$  :

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(\alpha_1 + t) \\ & (\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)\alpha_2(\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 + t) \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{aligned}$$

$b_5$  :

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 + 3\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(\alpha_1 + t) \\ & (\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 + t) \\ & (\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + 3\alpha_1)\alpha_1(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\ & 0 \\ & 0 \end{aligned}$$

0  
0  
0  
0  
0  
0  
0

$f_5 :$

$(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 3\alpha_1)(-t - \alpha_1)$   
 $(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)\alpha_2(-t + \alpha_1)$   
 0  
 0  
 0  
 0  
 $\alpha_2(3\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + 2\alpha_2)$   
 0  
 0  
 0  
 0  
 0

$b_4 :$

$(2\alpha_2 + 4\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(\alpha_1 + t)$   
 $(2\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 + t)$   
 $(\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 - \alpha_2 + t)$   
 $\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-2\alpha_1 - \alpha_2 + t)$   
 0  
 0  
 0  
 0  
 0  
 0  
 0  
 0  
 0

$f_4 :$

$(\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(-t)$

$$\begin{aligned}
& (\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1)(-t + \alpha_1) \\
& \alpha_1(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + 3\alpha_1)(-t + \alpha_2 + \alpha_1) \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& (2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
& (\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)\alpha_1(2\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0
\end{aligned}$$

$b_3 :$

$$\begin{aligned}
& (2\alpha_2 + 4\alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(\alpha_1 + t) \\
& (2\alpha_2 + 3\alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 + t) \\
& (\alpha_2 + 3\alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
& (\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-2\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
& \alpha_1(\alpha_1 + t)(-2\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0 \\
& 0
\end{aligned}$$

$f_3 :$

$$\begin{aligned}
& (2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(-2t + \alpha_2 + \alpha_1) \\
& (2\alpha_2 + 3\alpha_1)(-2\alpha_2 t + \alpha_2^2 - 2\alpha_1 t + 3\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_1^2) \\
& (\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(-t + \alpha_2 + \alpha_1) \\
& \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_1)(-t + \alpha_2 + 2\alpha_1) \\
& 0 \\
& 0 \\
& (3\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
& (2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
& (2\alpha_2 + 3\alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)\alpha_2 \\
& 0 \\
& 0
\end{aligned}$$

0

 $b_2 :$ 

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(\alpha_1 + t) \\
&(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 + t) \\
&(2\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
&(\alpha_1 + \alpha_2 + t)(-2\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
&(\alpha_1 + t)(-2\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
&(-\alpha_1 + t)(-\alpha_1 - \alpha_2 + t) \\
&0 \\
&0 \\
&0 \\
&0 \\
&0 \\
&0
\end{aligned}$$
 $f_2 :$ 

$$\begin{aligned}
&(\alpha_2 + 2\alpha_1)(-2t + 2\alpha_2 + 4\alpha_1) \\
&(-2\alpha_2 t + 2\alpha_2^2 - 3\alpha_1 t + 7\alpha_1 \alpha_2 + 6\alpha_1^2) \\
&(\alpha_2 + 3\alpha_1)(-t + \alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&(\alpha_2 + \alpha_1)(-t + \alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&\alpha_1(-t + \alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&0 \\
&(4\alpha_2 + 6\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&(2\alpha_2 + 6\alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&(\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
&\alpha_1(\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
&0 \\
&0
\end{aligned}$$
 $h :$ 

$$\begin{aligned}
&(-t + 3\alpha_2 + 5\alpha_1) \\
&(-t + 3\alpha_2 + 4\alpha_1) \\
&(-t + 2\alpha_2 + 4\alpha_1) \\
&(-t + 2\alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&(-t + \alpha_2 + 2\alpha_1) \\
&(-t + \alpha_2 + \alpha_1) \\
&(4\alpha_2 + 6\alpha_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(3\alpha_2 + 6\alpha_1) \\
&(3\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
&(\alpha_2 + 3\alpha_1) \\
&\alpha_2 \\
&0
\end{aligned}$$

1: Постоянная расстановка из всех единиц.

**5.2. Соотношения для кольца Чжоу оросферического многообразия**  $X = (G_2, \omega_Y, \omega_Z)$ .  $R_1 : 2f_3 + f_2 \cdot (-3t + 4\alpha_2 + 6\alpha_1) - h \cdot \alpha_2(t - \alpha_2 - \alpha_1) - 4hf_2 + h^2 \cdot (t - 2\alpha_2 - \alpha_1) + h^3 = 0$

$$R_2 : -2f_3 \cdot (t - \alpha_2 - 2\alpha_1) - f_2 \cdot (\alpha_2 + 3\alpha_1)(t - \alpha_2 - 2\alpha_1) - 3f_2^2 + hf_2 \cdot (t - 2\alpha_2 - 2\alpha_1) + h^2f_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_3 : &f_3 \cdot (\alpha_2 + \alpha_1)(3\alpha_2 + 6\alpha_1)(6\alpha_2 + 9\alpha_1) + f_3^2 - 2f_2f_3 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1) + f_2^2 \cdot \\
&(25\alpha_2^2 + 75\alpha_1\alpha_2 + 54\alpha_1^2) - hf_3 \cdot (36\alpha_2^2 + 104\alpha_1\alpha_2 + 72\alpha_1^2) - hf_2 \cdot \alpha_1(25\alpha_2^2 + \\
&75\alpha_1\alpha_2 + 54\alpha_1^2) + 2hf_2f_3 - 5hf_2^2 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1) + h^2f_3 \cdot (22\alpha_2 + 32\alpha_1) + \\
&5h^2f_2 \cdot \alpha_1(4\alpha_2 + 6\alpha_1) + 4h^2f_2^2 - 4h^3f_3 - 4h^3f_2 \cdot \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 : &f_3 \cdot (\alpha_2 + \alpha_1)(8\alpha_2^2 + 28\alpha_1\alpha_2 + 24\alpha_1^2) - f_2f_3 \cdot (4\alpha_2 + 6\alpha_1) + f_2^2 \cdot (11\alpha_2^2 + \\
&33\alpha_1\alpha_2 + 24\alpha_1^2) - f_2^3 - hf_3 \cdot (16\alpha_2^2 + 46\alpha_1\alpha_2 + 32\alpha_1^2) - hf_2 \cdot \alpha_1(11\alpha_2^2 + \\
&33\alpha_1\alpha_2 + 24\alpha_1^2) + 2hf_2f_3 - hf_2^2 \cdot (9\alpha_2 + 12\alpha_1) + h^2f_3 \cdot (10\alpha_2 + 14\alpha_1) + \\
&h^2f_2 \cdot \alpha_1(9\alpha_2 + 13\alpha_1) + 2h^2f_2^2 - 2h^3f_3 - 2h^3f_2 \cdot \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Brion, *Equivariant Chow groups for torus actions*. — Transformation Groups **2**, No. 3 (1997), 225–267.
2. D. Edidin and W. Graham, *Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula*. — Amer. J. Math. **120** (1998), 619–636.
3. W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
4. R. Gonzales, C. Pech, N. Perrin, and A. Samokhin, *Geometry of horospherical varieties of Picard rank one*, IMRN (2021).
5. M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*. — Invent. math. **131** (1998), 25–83.
6. B. Pasquier, *On some smooth projective two-orbit varieties with Picard number 1*. — Math. Ann. **344** (2009), 963–987.
7. B. Pasquier, L. Manivel, *Horospherical two-orbit varieties as zero loci*, Hal-Id: hal-03048217 (2020).



8. Julianna S. Tymoczko, *Divided difference operators for partial flag varieties*, arXiv:math/0912.2545v1, 2009.

Petrov V. A. Sonina A. K. Chow ring of horospherical varieties of Picard number one.

An algorithm based on Goresky–Kottwitz–MacPherson method is provided to compute the equivariant Chow ring of a horospherical variety of Picard number one. In the case of  $G_2$ -variety, an explicit presentation of this ring is given.

С.-Петербургский государственный  
университет,  
С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В.А.Стеклова РАН,  
С.-Петербург, Россия  
*E-mail:* victorapetrov@googlemail.com

Поступило 30 мая 2022 г.

С.-Петербургский государственный  
университет, (лаборатория Чебышева)  
С.-Петербург, Россия  
*E-mail:* sasha-sonina@mail.ru