Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

А. И. Мадунц

ПОСТРОЕНИЕ КОЛЕЦ СХОДИМОСТИ МНОГОМЕРНОГО ПОЛНОГО ПОЛЯ

§1. Многомерные полные поля: классификация и топология

Данная работа продолжает исследования автора, связанные со сходимостью в многомерных локальных и полных полях (см. [6–8], [4], [5]).

Назовем конечное поле 0-мерным локальным, а совершенное 0-мерным полным. Тогда полное дискретно нормированное поле $K = K_n (n \geqslant 1)$ будет n-мерным локальным (соответственно, полным), если его поле вычетов K_{n-1} является $(n-1)$-мерным локальным (полным) полем.

Таким образом, многомерные поля (локальные или полные) обобщают соответствующие классические понятия.

Ниже приведем основные определения и обозначения (подробнее см. [2]).

Пусть t_n – униформизующая поля K_n относительно нормирования v_n, а t_{n-1} – единица в K_n, класс вычетов которой $\overline{t}_{n-1}$ является униформизующей в K_{n-1}, и так далее до t_1 – единицы в K_n, класс вычетов которой в K_1 становится униформизующей. Набор $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ называется системой локальных параметров поля K и определяет на нем нормирование $\vec{v} = (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})$, заданное формулами

$$v^{(i)}(a) = v_{K_i}\left(\overline{a t_n^{-v^{(n)}(a)} \ldots t_{i+1}^{-v^{(i+1)}(a)}}\right)$$

при $a \neq 0$ и $\vec{v}(0) = +\infty$.

Всюду далее

$$\vec{r}_i = (r_{i+1}, \ldots, r_n)(0 \leqslant i \leqslant n-1), \vec{r}_0 = \vec{r},\ \vec{t}_i^{\,\vec{r}_i} = t_{i+1}^{r_{i+1}} \ldots t_n^{r_n}.$$

Кроме того, на $\mathbb{Z}^n$ введено лексикографическое упорядочивание:

$$\vec{r}^{\,(1)} < \vec{r}^{\,(2)},$$

если при некотором $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $\vec{r}_i^{\,(1)} = \vec{r}_i^{\,(2)}, r_i^{(1)} < r_i^{(2)}$.

Ключевые слова: многомерные локальные поля, топология, кольца сходимости.

Тогда $\mathcal{O} = \{a \in K : \vec{v}(a) \geqslant 0\}$ образует не зависящее от выбора локальных параметров кольцо нормирования, единственным максимальным идеалом которого является $\wp = \{\, a \in \mathcal{O} : \vec{v}(a) > 0 \,\}$. Под U будем подразумевать группу единиц $\mathcal{O}$.

Введем следующее удобное обозначение (см. [6]).

1.1. Определение. Число $s = s(K)$ такое, что $\operatorname{char} K^{(s)} \neq \operatorname{char} K^{(s-1)}$, назовем инерционным числом поля K.

Если же $\operatorname{char} K = \operatorname{char} K_0$, то положим $s(K) = 0$.

Итак, инерционное число $s(K)$ (нумерация полей вычетов идет от n до нуля) – номер последнего из полей, сохраняющего характеристику исходного поля $K = K_n$.

А. Н. Паршиным сформулирована и частично доказана, а И. Б. Жуковым полностью доказана следующая структурная теорема (см. [9], [1]).

1.2. Теорема. *Пусть $K = K^{(n)}$ – n-мерное полное поле.*

При $s(K) > 0$ пусть $F_0 = \operatorname{Frac}(W(K_0))$ – поле частных кольца векторов Витта над последним полем вычетов (при данном условии $\operatorname{char} K_0 = p > 0$).

1. *Если $s(K) = 0$, то $K \approx K_0((t_1)) \dots ((t_n))$.*
2. *Если $s(K) = 1$, то $K \approx k((t_2)) \dots ((t_n))$, где $k = K^{(1)}$ – конечное вполне разветвленное расширение поля F_0.*
3. *Если $2 \leqslant s(K) \leqslant n$, то K является конечным вполне разветвленным расширением поля*

$$F\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{s-1}\}\}((t_{s+1})) \dots ((t_n)),$$

где F – конечное вполне разветвленное расширение F_0 и $s = s(K)$.

Кроме того, в этом случае K имеет конечное расширение вида

$$L\{\{T_1\}\} \dots \{\{T_{s-1}\}\}((T_{s+1})) \dots ((T_n)),$$

полученное добавлением элемента, алгебраического над F_0, где L – конечное расширение F_0.

Для поля F, полного относительно дискретного нормирования w, под $F\{\{t\}\}$ подразумевается поле

$$F\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i : c_i \in F, w(c_i) \geqslant c > -\infty, \lim_{i \to -\infty} w(c_i) = +\infty \right\}$$

с нормированием $v\left(\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i\right) = \min_i w(c_i)$. Это полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $\overline{F}((\bar{t}))$.

На многомерных полях топология дискретного нормирования не всегда удобна: в ней ряды, определяющие элементы многомерного поля, могут расходиться. А. Н. Паршиным введена особая топология, в которой все эти ряды сходятся (см. [11]). Она определяется рекурсивно с помощью топологий полей вычетов (подробности можно посмотреть в [3] и [2]).

В последней работе также доказано, что в случае конечного расширения многомерных полных полей топология Паршина подполя совпадает с топологией, индуцированной надполем, а топология подполя единственным образом продолжается на надполе. Следовательно, структурная теорема позволяет ограничиться рассмотрением сходимости в стандартных полях вида $F\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{s-1}\}\}((t_{s+1}))\ldots((t_n))$ (мы включаем сюда также вырожденные случаи $s(K) = 0$ и $s(K) = 1$).

В целом вопрос сходимости в многомерных полях гораздо сложнее классического случая: например, в топологии Паршина степенные ряды с коэффициентами из кольца целых при подстановке вместо переменной элемента максимального идеала могут расходиться.

§2. Сходимость в многомерных локальных и полных полях

Приведем некоторые полезные определения и результаты (см. [2, 5–7]).

2.1. Определение. Множество мультииндексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым набором, если для любого $\vec{l_i} \in \mathbb{Z}^{n-i} (1 \leqslant i \leqslant n)$ существует $I(\vec{l_i}) \in \mathbb{Z}$ такое, что для всех $\vec{r} \in \Omega$ из условия $\vec{r_i} = \vec{l_i}$ следует $r_i \geqslant I(\vec{l_i})$.

Величины $\omega_i(\vec{l_i}) = \sup I(\vec{l_i})$ назовем характеристическими индексами допустимого набора.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\vec{0} = (0,\ldots,0), \vec{e}^{\,(i)} = (0,\ldots,1,\ldots,0)$$

(здесь единица стоит на месте i).

Пусть B – полная система представителей ненулевых элементов K_0 в K, а $\vec{t}$ – система локальных параметров. Тогда любое $a \in K, a \neq 0$, представляется в виде ряда $a = \sum\limits_{\vec{r}\in\Omega^a} a_{\vec{r}}\vec{t}^{\,\vec{r}}, a_{\vec{r}} \in B$, где Ω^a – допустимый набор, причем B можно выбрать так, что данное представление будет единственно.

То же равенство записывается так:

$$a = \sum_{\vec{r}_i\in\Omega_i} a_{\vec{r}_i}\vec{t}_i^{\,\vec{r}_i}, 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

где $\Omega_i \subset \mathbb{Z}^{n-i}$ – допустимый набор.

Будем называть Ω^a допустимым набором элемента a, а соответствующие характеристические индексы $\omega_i^a(\vec{r}_i)$ – характеристическими индексами элемента.

Заметим, что $a_{\omega_i(\vec{r}_i)\vec{r}_i} \neq 0$, причем индекс $r_i = \omega_i^a(\vec{r}_i)$ – наименьший из обладающих данным свойством, и $\omega_i^a(\vec{r}_i) = +\infty$ тогда и только тогда, когда коэффициент при $\vec{t}_i^{\,\vec{r}_i}$ нулевой.

Кольцо целых, максимальный идеал и группа единиц поля имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \{a \in K : \omega_i^a(\vec{0}_i) \geqslant 0, i = \overline{n;1}\},\\
\wp &= \{a \in K : \omega_i^a(\vec{0}_i) \geqslant 0, i = \overline{n;2},\, \omega_1^a(\vec{0}_1) \geqslant 1\},\\
U &= \{a \in K : \omega_i^a(\vec{0}_i) = 0, i = \overline{n;1}\}.
\end{aligned}$$

В случае стандартного поля с инерционным числом $s = s(K)$ для любых $a, b \in K$ выполнены соотношения: при $i \geqslant s$ имеем

$$\omega_i^{a+b}(\vec{r}_i) \geqslant \inf(\omega_i^a(\vec{r}_i), \omega_i^b(\vec{r}_i)),\ \ \omega_i^{ab}(\vec{r}_i) \geqslant \inf_{\vec{l}_i+\vec{m}_i=\vec{r}_i}(\omega_i^a(\vec{l}_i) + \omega_i^b(\vec{m}_i)),$$

а при $i < s$ верно

$$\begin{aligned}
&\omega_i^{a+b}(r_{i+1}, \dots, r_s, \dots, r_n)\\
&\geqslant \inf_{l_s\leqslant r_s}(\omega_i^a(r_{i+1}, \dots, l_s, \dots, r_n), \omega_i^b(r_{i+1}, \dots, l_s, \dots, r_n)),\\
&\omega_i^{ab}(\vec{r}_i) \geqslant \inf_{\substack{l_i+m_i=r_i, i\neq s\\ l_s+m_s\leqslant r_s}}(\omega_i^a(\vec{l}_i) + \omega_i^b(\vec{m}_i)).
\end{aligned}$$

2.2. Определение. Множество $A \subset K$ назовем множеством сходимости, если любой степенной ряд $c(X) = \sum\limits_{m\geqslant 1} c^{(m)}X^m \in A[[X]]$ сходится при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\wp$.

§3. Кольца и множества сходимости

Сформулируем доказанный в [6] критерий множества сходимости.

3.1. Теорема. $A \subset K$ *является множеством сходимости тогда и только тогда, когда для* $i = \overline{n;1}$ *при всех* $\vec{r}_i$ *выполнено условие*

$$\omega_i^A(\vec{r}_i) = \inf_{a\in A} \omega_i^a(\vec{r}_i) > -\infty.$$

Другими словами, объединение мультииндексов всех элементов множества сходимости A является допустимым набором. Будем называть его допустимым набором множества A и обозначать $\Omega(A)$. Величины $\omega_i^A(\vec{r}_i)$ назовем характеристическими индексами множества сходимости A.

Итак, каждому множеству сходимости A соответствует его допустимый набор $\Omega(A)$.

Пусть теперь Ω – произвольный допустимый набор. Сопоставим ему множество

$$C^\Omega = \left\{ \sum_{\vec{r}\in\Omega} a_{\vec{r}} \vec{t}^{\,\vec{r}}, a_{\vec{r}} \in B \cup \{0\} \right\}$$

(здесь B – полная система представителей ненулевых элементов K_0 в K). Назовем его множеством сходимости данного набора.

Ясно, что это действительно множество сходимости и $A \subset C^{\Omega(A)}$.

Действия с рядами из $R[[X]]$ удобно производить, когда R является кольцом с единицей, а хотя в C^Ω входят всевозможные элементы, использующие мультииндексы данного набора, в произвольном случае кольцом оно не является.

Рассмотрим стандартное поле K с инерционным числом $s(K) = s$. Каким свойствам должно удовлетворять Ω, чтобы C^Ω оказалось кольцом с единицей?

Потребовав, чтобы C^Ω содержало $1 = \vec{t}^{\,\vec{0}}$, мы получаем условие $\vec{0} \in \Omega$.

Поскольку сумма одночленов вида $a_{\vec{r}}\vec{t}^{\,\vec{r}}$, вообще говоря, имеет в разложении слагаемые степени $\vec{r} + \vec{e}^{\,(s)}$, а произведение $a_{\vec{l}}\vec{t}^{\,\vec{l}}$ и $a_{\vec{m}}\vec{t}^{\,\vec{m}}$ может содержать слагаемые степени $\vec{l} + \vec{m} + \vec{e}^{\,(s)}$, возникают условия

$$\vec{r} \in \Omega \Rightarrow \vec{r} + \vec{e}^{\,(s)} \in \Omega$$

и

$$\vec{l}, \vec{m} \in \Omega \Rightarrow \vec{l} + \vec{m} + \vec{e}^{\,(s)} \in \Omega.$$

Учитывая требование $\vec{0} \in \Omega$, их можно заменить на более простые: $\vec{e}^{\,(s)} \in \Omega$ и $\vec{l}, \vec{m} \in \Omega \Rightarrow \vec{l} + \vec{m} \in \Omega$.

Итак, если к произвольному допустимому набору Ω добавить $\vec{e}^{\,(s)}$ и построить порожденный получившимся множеством моноид $M(\Omega)$ (то есть, замкнуть относительно суммы и присоединить нейтральный элемент), то $C^{M(\Omega)}$ будет кольцом. Является ли оно кольцом сходимости – другими словами, будет ли $M(\Omega)$ допустимым набором?

Если существует $\vec{r} \in \Omega, \vec{r} < \vec{0}$, то хотя бы одна компонента $\vec{r}$ отрицательна. Поэтому аддитивное замыкание такого Ω допустимым набором не будет.

Далее возьмем допустимый набор, у которого при всех $\vec{r} \in \Omega$ выполнено неравенство $\vec{r} \geqslant \vec{0}$. Рассмотрим

$$\vec{R} = \vec{r}^{(1)} + \cdots + \vec{r}^{(k)}, \vec{r}^{(i)} \in \Omega, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Из условия, что все $\vec{r}^{(i)} \geqslant \vec{0}$, следует, что $R_n = r_n^{(1)} + \cdots + r_n^{(k)} \geqslant 0$.

Обозначим через k_1 количество положительных $\vec{r}_n^{\,(i)}$ (для удобства занумеруем их первыми, оставшиеся будут равны нулю). Тогда $k_1 \leqslant R_n$ и $\vec{r}_n^{\,(i)} \leqslant R_n, 1 \leqslant i \leqslant k_1$. При этом если $\vec{r}_n^{\,(i)} = 0$, то $\vec{r}_{n-1}^{\,(i)} \geqslant 0$.

Таким образом,

$$R_{n-1} = (r_{n-1}^{(1)} + \cdots + r_{n-1}^{(k_1)}) + (r_{n-1}^{(k_1+1)} + \cdots + r_{n-1}^{(k_1+k_2)}),$$

где $r_{n-1}^{(k_1+1)}, \ldots, r_{n-1}^{(k_1+k_2)} \geqslant 1, r_{n-1}^{(i)} = 0, k_1 + k_2 < i \leqslant k$.

Следовательно,

$$R_{n-1} \geqslant R_n \inf(0, \omega_{n-1}(1), \ldots, \omega_{n-1}(R_n)) + k_2.$$

Итак, $R_n \geqslant I_{n-1}(R_n)$, где $I_{n-1}(R_n) = R_n \inf(0, \omega_{n-1}(1), \ldots, \omega_{n-1}(R_n))$, причем оценка не зависит от числа слагаемых.

Кроме того, $k_2 \leqslant R_{n-1} - I_{n-1}(R_n)$.

Поскольку $r_{n-2}^{(k_1+k_2+1)} \geqslant 0, \ldots, r_{n-2}^{(k)} \geqslant 0$, имеем

$$\begin{aligned} R_{n-2} \geqslant{}& (R_n + R_{n-1} - I_{n-1}(R_n)) \\ &\times \inf(0, \omega_{n-1}(1), \ldots, \omega_{n-1}(R_n + R_{n-1} - I_{n-1}(R_n))). \end{aligned}$$

Обозначив правую часть неравенства $I_{n-2}(R_1, R_2)$, получаем для компоненты $n-2$ оценку снизу, не зависящую от числа слагаемых.

Продолжая процесс, убеждаемся, что моноид является допустимым набором.

Итак, мы получили следующий результат.

3.2. Теорема. *Моноид C^{Ω} допустимого набора Ω является допустимым набором тогда и только тогда, когда для любого $\vec{r} \in \Omega$ выполнено условие $\vec{r} \geqslant \vec{0}$.*

Кроме того, имеется алгоритм построения кольца сходимости, содержащего данное множество сходимости. Он состоит в следующем.

Пусть A – множество сходимости. Если оно не лежит в кольце целых, то не содержится ни в одном кольце сходимости. Если же $A \subset \mathcal{O}$, то его допустимый набор $\Omega(A)$ удовлетворяет условию теоремы. Строим моноид $M(\Omega(A))$ – аддитивное замыкание набора

$$\Omega(A) \cup \{(0, \ldots, 0), (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\}$$

(единица на месте $s(K)$). Этот моноид порождает кольцо сходимости $C^{M(\Omega(A))}$ такое, что $A \subset C^{M(\Omega(A))} \subset \mathcal{O}$.

Список литературы

1. И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей.* — Тр. С.-П. мат. общ. **3** (1994), 215–234.
2. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* — Тр. С.-П. мат. общ. **3** (1994), 4–46.
3. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 186–196.
4. А. И. Мадунц, *Классификация обобщенных формальных групп Любина-Тейта над многомерными локальными полями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **405**, No. 31 (2017), 91–97.
5. А. И. Мадунц, *Кольца, порожденные множествами сходимости многомерного полного поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **500** (2021), 149–157.
6. А. И. Мадунц, *Множества сходимости многомерного полного поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **492** (2020), 125–133.
7. А. И. Мадунц, *Сходимость последовательностей и рядов в многомерных полных полях.* — Автореферат дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук, С.-Петербург (1995), 1–14.
8. А. И. Мадунц, С. В. Востоков, Р. П. Востокова, *Формальные группы над подкольцами кольца целых многомерного локального поля.* — Вестник С.-П. ун-та, Математика. Механика. Астрономия **6**, No. 1 (2019), 88–97.
9. А. Н. Паршин, *Абелевы накрытия арифметических схем.* — Докл. АН СССР. Сер. мат. **243** (1978), 855–858.
10. А. Н. Паршин, *К арифметике двумерных схем.* 1. *Распределения и вычеты.* — Изв. АН СССР. Сер. мат., **40** (1976), 736–773.
11. А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов.* — Тр. МИАН **165** (1984), 143–170.

Madunts A. I. Construction of convergence rings of a multidimensional complete field.

A criterion for the admissibility of a minimal monoid containing a given allowable set of multiindices is proved. In addition, an algorithm for constructing a convergence ring of a multidimensional complete field containing a given convergence set is proposed.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9,
199034, С.Петербург, Россия
E-mail: `madunts@mail.ru`

Поступило 1 июля 2022 г.