Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

Р. А. Лубков

ОБРАТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ УНИПОТЕНТОВ В ПОЛИВЕКТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Введение

Пусть R – коммутативное кольцо с 1, n – натуральное число, большее 3, и R^n – свободный R-модуль со стандартным базисом e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Через $\bigwedge^m R^n$ обозначим m-ую внешнюю степень модуля R^n, порождённую базисными элементами вида $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Мы также определим базисные элементы $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ для любого набора $i_1, \dots, i_m$ следующим образом: $e_{\sigma(i_1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(i_m)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ для любой перестановки σ в симметрической группе S_m. Стандартное действие полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$ на базисных элементах $\bigwedge^m R^n$ определяется по следующему правилу:

$$g(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}) := (ge_{i_1}) \wedge \dots \wedge (ge_{i_m}).$$

Другими словами мы можем рассмотреть естественное преобразование “внешней степенью” схемы GL_n:

$$\textstyle\bigwedge^m : \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_{\binom{n}{m}},$$

которое продолжает действие группы $\mathrm{GL}_n(R)$ на модуль $\bigwedge^m R^n$. Таким образом мы определили внешнюю степень полной линейной группы как группу точек схемы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Отметим что $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ не совпадает с $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Первая группа это образ полной линейной группы под действием гомоморфизма Бине–Коши: $\bigwedge^m : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R)$, в то время как вторая – это группа R-точек образа групповой схемы GL_n под действием естественной трансформации. Мы отсылаем читателя к работе [3], где данный вопрос был раскрыт в полной мере.

Далее, элементарная группа $\mathrm{E}_n(R)$ это подгруппа $\mathrm{GL}_n(R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями $t_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{i,j}$, где e

Ключевые слова: полная линейная группа, элементарная группа, фундаментальное представление, разложение унипотентов, обратное разложение унипотентов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No. 19-31-90072.

обозначает единичную матрицу, а $e_{i,j}$ – стандартную матричную единицу, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Таким образом, внешняя степень элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ это корректно определённая подгруппа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Исключительным случаем для внешних степеней полной линейной группы является внешний квадрат. Во всех задачах, связанных с вычислением надгрупп, нормализаторов $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ в $\mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R)$, построением инвариантных форм, задающих группу $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, и многих других, внешний квадрат выгодно отличается от общего случая. Во-первых, он наглядно демонстрирует строение группы, так как многие рассуждения для произвольной степени являются его обобщением, а во-вторых, для внешнего квадрата верны некоторые результаты, которые невозможно получить даже для внешнего куба или других степеней. Так, в работе [11] для $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$ автором была построена трансвекция $T_{*,j}$, стабилизирующая произвольный столбец матрицы g в $\mathrm{GL}_{\binom{n}{2}}(R)$.

Теорема 1. *Пусть w – произвольный вектор в $R^{\binom{n}{2}}$, $n \geqslant 3$. Положим*

$$T_{*,j} := \prod_{s \neq j} \textstyle\bigwedge^2 t_{s,j}(\mathrm{sgn}(s,j) w_{sj}), \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

где $\mathrm{sgn}(s,j)$ – структурные константы для $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$. Тогда $T_{*,j} \cdot w = w$.

Построить аналогичную трансвекцию теми же способами для внешнего куба или других степеней невозможно. Причины данного факта мы обсудим в §3. Однако теорема 2 позволяет стабилизировать произвольной столбец матрицы g в группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, то есть с использованием уравнений Плюккера на элементы матрицы g. Обозначим через $\{\gamma_i\}_1^{m+1}$ – последние $m+1$ весов в весовой диаграмме системы корней (A_{n-1}, ϖ_m) в лексикографическом порядке, начиная с младшего веса, более точное определение смотри в §3.

Теорема 2. *Пусть w – столбец матрицы в группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 2m+1$. Положим*

$$T_1 := \textstyle\bigwedge^m t_{m,m+1}(w_{\gamma_1}) \bigwedge^m t_{m,m+2}(-w_{\gamma_2}) \dots \bigwedge^m t_{m,2m+1}((-1)^m w_{\gamma_{m+1}}).$$

Тогда трансвекция T_1 стабилизирует столбец w: $T_1 \cdot w = w$.

Для упомянутых выше задач, в том числе для обратного разложения унипотентов, необходимо уметь проверять, принадлежит ли индивидуальная матрица к $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Для этого мы строим различные серии уравнений, задающих схему $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Теоремы 5 и 6, которые являются аналогом [4, теорема 5], используют задание группы через инвариантные формы, в то время как теорема 4, которая является обобщением [7, теорема 3], использует только стабилизацию идеала Плюккера.

Статья организована следующим образом. В §1 мы напоминаем основные обозначения, связанные с элементарными группами и их внешними степенями. Задание внешней степени полной линейной группы через соотношения Плюккера рассматривается в §2. В §3 мы доказываем теорему стабилизации столбца, а в §4 мы строим несколько серий уравнений, задающих схему $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. В заключительном §5 мы обсуждаем все детали, связанные с обратным разложением унипотентов.

§1. Основные обозначения

Пусть вначале G – произвольная абстрактная группа. Элементы группы будем обозначать малыми латинскими буквами. Под $[x, y]$ мы всегда будем понимать *левонормированный* коммутатор элементов x и y, то есть $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, где $x, y \in G$. Выражение xyx^{-1} кратко будем записывать ${}^x y$ и называть *левым сопряжённым* к y при помощи x. Аналогично, выражение $x^{-1}yx$ будем называть *правым сопряжённым* к y при помощи x и обозначать y^x. Правой сопряжённой к y при помощи x или x^{-1} будем обозначать $y^{\pm x}$.

Пусть $X \subseteq G$ – подмножество группы G, тогда под $\langle X\rangle$ будем понимать подгруппу G, порождённую X. Выражение $H \leqslant G$ понимается, как H – подгруппа G. Если H – нормальная подгруппа в G, тогда будем писать $H \trianglelefteq G$. Под $[F, H]$ для двух подгрупп $F, H \leqslant G$, мы понимаем их взаимный коммутант: $[F, H] = \langle [f, g],\ \text{где } f \in F, h \in H\rangle$.

Также нам пригодятся некоторые элементарные обозначения из теории колец. Предположим, что R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Под идеалом I кольца R мы всегда будем понимать *двусторонний* идеал и обозначать это $I \trianglelefteq R$. Как обычно, R^* означает мультипликативную группу кольца R, состоящую из всех *двусторонне обратимых* элементов $x \in R$, для которых существует элемент $y \in R$, такой, что $xy = 1 = yx$. Мультипликативная группа матриц размера $n \times n$ над кольцом R называется полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}_n(R) = \mathrm{M}_n(R)^*$. Для любой матрицы $a \in \mathrm{GL}_n(R)$ элемент, стоящий на месте (i, j), обозначается $a_{i,j}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Для записи элементов обратной матрицы a^{-1} мы будем пользоваться стандартным обозначением $a'_{i,j} := (a^{-1})_{i,j}$, а для j-ого столбца или i-ой строки матрицы a будем писать $a_{*,j}$ и $a_{i,*}$.

Напомним, что e обозначает единичную матрицу, а $e_{i,j}$ – стандартную матричную единицу, то есть матрицу, у которой все элементы равны нулю, за исключением одного на месте (i,j), который равен 1. Элементарной трансвекцией $t_{i,j}(\xi)$ называется матрица вида $t_{i,j}(\xi) = e+\xi e_{i,j}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in R$. Элементарные трансвекции обладают следующими хорошо известными свойствами, см. [18]:

(1) трансвекции аддитивны по аргументу:

$$t_{i,j}(\xi)t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi+\zeta);$$

(2) они удовлетворяют коммутационной формуле Шевалле:

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = \begin{cases} e, & \text{если } j \neq h, i \neq k, \\ t_{i,k}(\xi\zeta), & \text{если } j = h, i \neq k, \\ t_{h,j}(-\zeta\xi), & \text{если } j \neq h, i = k. \end{cases}$$

Через R^n обозначим свободный R-модуль. Он состоит из столбцов с координатами из кольца R. Стандартный базис модуля R^n обозначим $e_1, \ldots, e_n$. Пусть P_m – параболическая подгруппа координатного подпространства $\langle e_1, \ldots, e_m\rangle$. Она равна стабилизатору $\mathrm{Stab}(\langle e_1, \ldots, e_m\rangle)$. Далее, пусть U_m – подгруппа P_m, порождённая элементарными трансвекциями $t_{i,j}(\xi)$, где $1 \leqslant i \leqslant m, m+1 \leqslant j \leqslant n, \xi \in R$. Она называется унипотентным радикалом подгруппы P_m. Очевидно, что U_m нормальна и абелева.

Через $[n]$ мы будем обозначать множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, а через $\bigwedge^m[n]$ внешнюю степень множества $[n]$, элементы которого есть упорядоченные подмножества $I \subseteq [n]$ мощности m без повторений:

$$\textstyle\bigwedge^m[n] = \{(i_1, i_2, \ldots, i_m) \mid i_j \in [n]\}.$$

Мы используем лексикографический порядок на $\Lambda^m[n]$:

$$12\ldots(m-1)m < 12\ldots(m-1)(m+1).$$

Обычно мы будем писать индекс $I = \{i_j\}_{j=1}^m$ в возрастающем порядке, $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Однако иногда будут встречаться индексы без упорядочивания. В этом случае обозначим через $\mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m)$ знак соответствующей перестановки, равный $(-1)^{\mathrm{inv}(i_1,\ldots,i_m)}$, где $\mathrm{inv}(i_1, \ldots, i_m)$ –

число инверсий в последовательности $i_1, \ldots, i_m$. Мы расширим определение знака до мультимножеств, полагая $\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_m) = 0$, если среди набора $i_1, \ldots, i_m$ есть одинаковые числа.

Пусть I, J – два элемента $\bigwedge^m[n]$. Мы определим *высоту* пары (I, J) как мощность пересечения $I \cap J$: $\operatorname{ht}(I, J) := |I \cap J|$. Эта комбинаторная характеристика играет такую же роль, как функция расстояния $d(\lambda, \mu)$ для корней λ и μ на весовой диаграмме систем корней.

Подгруппа $\mathrm{E}_n(R) \leqslant \mathrm{GL}_n(R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется (*абсолютной*) *элементарной подгруппой полной линейной группы*:

$$\mathrm{E}_n(R) = \big\langle t_{i,j}(\xi),\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\, \xi \in R \big\rangle.$$

Для идеала $I \trianglelefteq R$ введём подгруппу $\mathrm{E}_n(R, I)$ в $\mathrm{E}_n(R)$, порождённую всеми элементарными трансвекциями уровня I, другими словами, $\mathrm{E}_n(R, I)$ является нормальным замыканием группы $\mathrm{E}_n(I)$ в $\mathrm{E}_n(R)$. Такая группа называется (*относительной*) *элементарной группой уровня* I:

$$\mathrm{E}_n(R, I) = \big\langle t_{i,j}(\xi),\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\, \xi \in I \big\rangle^{\mathrm{E}(n,R)}.$$

Пусть R – коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$ и N – биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $t_{I,J}(\xi)$ для элементарной трансвекции в группе $\mathrm{E}_N(R)$. Индексы I, J будем писать без скобок в возрастающем порядке, например, $t_{12,13}(\xi)$ – трансвекция со значением ξ на месте пересечения первой строки и второго столбца. Пусть $x \in \mathrm{E}_n(R)$. Тогда внешняя степень x может быть представлена как произведение элементарных трансвекций в $\mathrm{E}_N(R)$, см. [12, предложение 3].

Утверждение 1. *Пусть $t_{i,j}(\xi)$ – элементарная трансвекция в группе $\mathrm{E}_n(R)$. Тогда для $n \geqslant 3$*

$$\textstyle\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \prod\limits_{L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]} t_{L\cup i, L\cup j}(\operatorname{sgn}(L \cup i, L \cup j)\xi)$$

для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

В качестве примера рассмотрим

$$\textstyle\bigwedge^3 t_{1,3}(\xi) = t_{124,234}(-\xi)t_{125,235}(-\xi)t_{145,345}(\xi) \in \bigwedge^3 \mathrm{E}_5(R).$$

§2. Весовые диаграммы и соотношения Плюккера

В настоящем параграфе мы кратко напомним, как внешняя степень полной линейной группы задаётся через соотношения Плюккера. Мы отсылаем читателя к работе [3], где авторы раскрыли все детали по данному вопросу. Мы также вспомним, в каких случаях $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ можно интерпретировать как стабилизатор инвариантных форм.

Многочлены Плюккера представляют собой однородные квадратичные полиномы $f_{I,J} \in R[x_H]_{H \in \bigwedge^m [n]}$ грассмановых координат x_H. В общем случае многочлены Плюккера можно представить в виде

$$f_{I,J} = \sum_{j \in J \setminus I} \pm x_{I \cup \{j\}} x_{J \setminus \{j\}},$$

где $I \in \bigwedge^{m-1}[n]$ и $J \in \bigwedge^{m+1}[n]$. Чтобы уточнить знак слагаемых расширим определение грассмановых координат следующим способом. Если среди набора $i_1, \ldots, i_m$ есть одинаковые числа, то $x_{i_1 \ldots i_m} = 0$, иначе $x_{i_1 \ldots i_m} = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m) x_{\{i_1 \ldots i_m\}}$. Таким образом многочлен Плюккера есть

$$f_{I,J} = \sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h x_{i_1 \ldots i_{m-1} j_h} x_{j_1 \ldots \hat{j_h} \ldots j_{m+1}}.$$

Идеал Плюккера $\mathrm{Plü} = \mathrm{Plü}(n, m, R) \trianglelefteq R\,[x_I : I \in \bigwedge^m[n]]$ порождён всеми многочленами Плюккера $f_{I,J}$. А стабилизатор этого идеала совпадает с внешней степенью полной линейной группы за исключением случаев половинной размерности $n = 2m$.

Существует также другое описание $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. А именно Илья Некрасов совместно с автором получили в зависимости от натуральности числа $\frac{n}{m}$ форму или идеал форм, стабилизаторы[1] которых совпадают с $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Следующее утверждение раскрывает суть этого вопроса, см. [12, предложения 6 и 7].

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 2m$. Если $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, то существует инвариантная форма $f_{n,m}(x) \in R[x_H]$ такая, что группа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ совпадает со стабилизатором $\mathrm{Stab}(f_{n,m}(x))$. Если m не делит n, то существует идеал форм $I_{n,m}$ такой, что $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ совпадает со стабилизатором $I_{n,m}$.*

[1]Стабилизаторы рассматриваются в смысле подобия.

В дальнейшем нам понадобится язык весовых диаграмм для иллюстрации внутренней комбинаторики уравнений. Мы отсылаем читателя к работе [14], где описаны все детали построения весовых диаграмм. Внешняя степень элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ соответствует представлению со старшим весом ϖ_m группы Шевалле типа A_{n-1}. В работе мы будем использовать два базовых примера $\bigwedge^2 \mathrm{E}_5(R)$ и $\bigwedge^3 \mathrm{E}_7(R)$. Весовая диаграмма первой группы представляет собой половину квадрата на 4 вершинах, см. рисунок 1. Для группы $\bigwedge^3 \mathrm{E}_7(R)$ весовая диаграмма выглядит сложнее, мы её изобразили на рисунке 2.

Покажем как визуализировать действие элементарной группы $\mathrm{E}_N(R)$ на весовой диаграмме. Пусть $w \in R^N$ – произвольный вектор. Тогда каждый w_I можно закодировать вершиной весовой диаграммы. Рассмотрим элементарную трансвекцию $t_{I,J}(\xi) \in \mathrm{E}_N(R)$. Тогда $t_{I,J}(\xi)w = w+\xi w_J e_I$ можно представить как прибавление J-ой координаты к I-ой координате w, см. рис. 1.

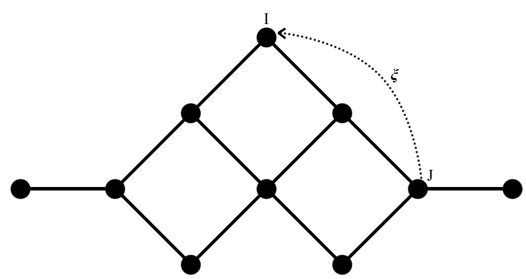

Рис. 1. Весовая диаграмма (A_4, ϖ_2) и действие $t_{I,J}(\xi)$.

§3. Теорема стабилизации

При решении различных задач, связанных с разложением унипотентов, зачастую необходимо стабилизировать произвольный столбец (строчку) матрицы g из группы Шевалле $G(\Phi, R)$. Это является ключевым шагом в доказательстве как самого разложения унипотентов, так и его дальнейших вариаций, см. [13, 15, 16, 17, 18, 6, 1, 2, 5, 8, 9], а также работу [19], где содержится много дальнейших ссылок. В главном частном случае обратного разложения унипотентов, в бивекторном представлении, мы построили две трансвекции $T_{*,j}$ и

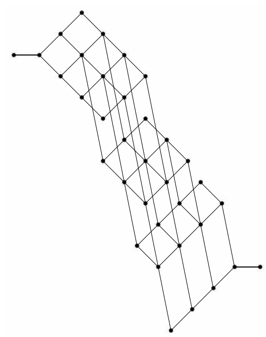

Рис. 2. Весовая диаграмма (A_6, ϖ_3).

T_1 в $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$, стабилизирующие произвольный столбец матрицы g в $\mathrm{GL}_N(R)$ и $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$, соответственно. Однако в общем случае произвольной внешней степени построить трансвекцию $T_{*,j}$ не представляется возможным. Это связано с быстрым ростом вычета трансвекции при увеличении степени m. Напомним, что вычетом $\mathrm{res}(g)$ преобразования g называется ранг матрицы $g - e$. Для внешней степени элементарной группы вычет $\mathrm{res}(\bigwedge^m t_{i,j}(\xi))$ равен биномиальному коэффициенту $\binom{n-2}{m-1}$. Даже для внешнего куба не существует трансвекции, стабилизирующей столбец произвольной матрицы из группы $\mathrm{GL}_N(R)$. Таким образом, в этом параграфе мы построим трансвекцию T_1 в $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$, стабилизирующую столбец, с использованием уравнений Плюккера.

Идея построения матрицы T_1 состоит в следующем. Зафиксируем вершину на весовой диаграмме (т.е. зафиксируем одну координату в произвольном векторе) и подберём внешние трансвекции так, чтобы результатом их действия на эту вершину было соотношение Плюккера максимальной длины $(m + 1)$. При этом окажется, что на других вершинах диаграммы результаты действий трансвекций будут также многочлены Плюккера различных длин. Так как вектор является столбцом матрицы в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, все многочлены Плюккера равны нулю и вектор стабилизируется.

Рассмотрим подсистему A_{n-m} в (A_n, ϖ_m), соответствующую последним $m+1$ весам (A_n, ϖ_m) в лексикографическом порядке. Обозначим через γ_i корни в подсистеме A_{n-m}, начиная с младшего веса (A_n, ϖ_m). Например, для (A_5, ϖ_2), $\gamma_1 = 56, \gamma_2 = 46, \gamma_3 = 45$, см рис. 3.

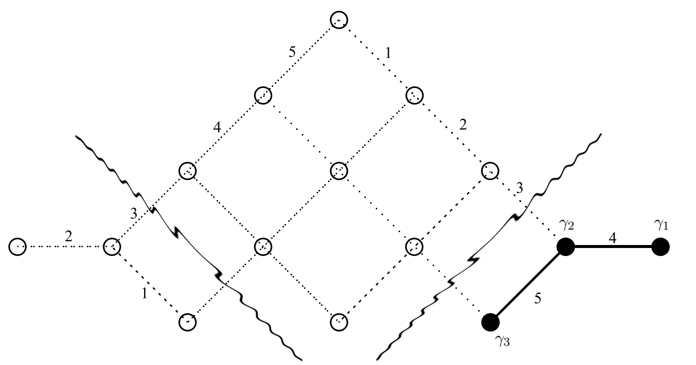

Рис. 3. A_3 в (A_5, ϖ_2).

Доказательство. Трансвекция T_1 это произведение унипотентов

$$x_{\alpha_m}(+w_{\gamma_1})x_{\alpha_m+\alpha_{m+1}}(-w_{\gamma_2})\dots x_{\alpha_m+\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_{2m}}((-1)^m w_{\gamma_{m+1}}).$$

Оно действует на вектор w добавлением многочленов Плюккера $f_{J,\{m+1,\dots,2m+1\}}$ к $\binom{n-1}{m-1}$ координатам вектора w, где $J \in \Lambda^{m-1}([n] \setminus m)$. А именно,

$$(T_1 w)_{m\cup J} = w_{m\cup J} + f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w).$$

Длина многочлена Плюккера $f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w)$ зависит от мощности множества $J \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m+1\}$. Если $|J \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m+1\}| = m-1$, тогда это тривиальный многочлен Плюккера. При уменьшении мощности пересечения длина многочлена будет возрастать. Максимальная длина будет достигнута при пустом пересечении. Так как координаты вектора w удовлетворяют соотношениям Плюккера, то все $f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w) = 0$. □

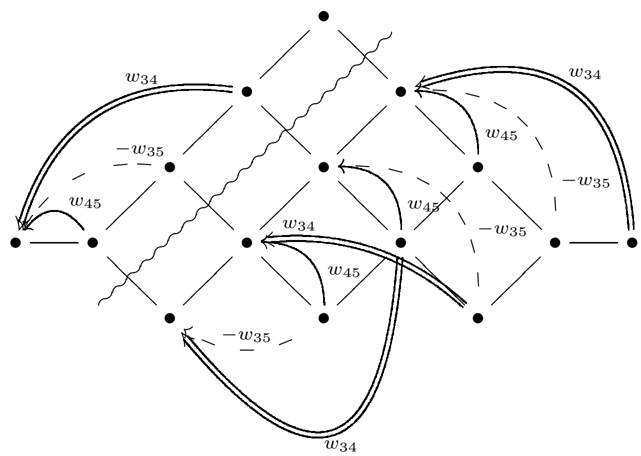

Рис. 4. Трансвекция T_1 на весовой диаграмме (A_5, ϖ_2): стрелки "$\rightarrow$" соответствуют $x_{\alpha_2}(w_{45})$, "$\dashrightarrow$" соответствуют $x_{\alpha_2+\alpha_3}(-w_{35})$, "$\Rightarrow$" соответствуют $x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(w_{34})$.

Пример A. Пусть $m = 2$ и $n = 5$. Этот случай подробно разобран в работе автора [11]. Мы воспроизведем здесь только главные результаты.

$$\begin{aligned} T_1 &= \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(w_{45}) \bigwedge^2 t_{2,4}(-w_{35}) \bigwedge^2 t_{2,5}(w_{34}) \\ &= x_{\alpha_2}(+w_{45}) x_{\alpha_2+\alpha_3}(-w_{35}) x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{34}). \end{aligned}$$

Все многочлены Плюккера $f_{i,345}(w)$, где $i \in [n] \setminus 2$, короткие или тривиальные. Если $i \in \{3, 4, 5\}$, тогда $f_{i,345}(w)$ тривиален и имеет вид $w_A w_B - w_B w_A = 0$. Иначе, $i \in [n] \setminus \{2, 3, 4, 5\}$, $f_{i345}(w) = w_{45}w_{3i} - w_{35}w_{4i} + w_{34}w_{5i}$.

Пример B. Пусть теперь $m = 3$ и $n = 7$. В этом случае

$$T_1 = \textstyle\bigwedge^3 t_{3,4}(w_{567}) \bigwedge^3 t_{3,5}(-w_{467}) \bigwedge^3 t_{3,6}(w_{457}) \bigwedge^3 t_{3,7}(-w_{456})$$

изменяет $\binom{6}{2} = 15$ координат вектора w. В терминах корневых унипотентов это произведение равно

$$x_{\alpha_3}(+w_{567}) x_{\alpha_3+\alpha_4}(-w_{467}) x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}(+w_{457}) x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}(-w_{456}).$$

Тогда существуют многочлены Плюккера $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}}$ трёх типов[2].

6: Пусть $\{i,j\} \subseteq \{4,5,6,7\}$. Тогда $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}}$ снова тривиален, и соотношение $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}} = 0$ утверждает, что грассмановы координаты коммутируют.

8: Пусть теперь i или j принадлежит $\{4,5,6,7\}$. Не умаляя общности, будем считать, что $i=4, j \notin \{4,5,6,7\}$. Тогда

$$f_{\{4,j\},\{4,5,6,7\}} = -x_{4j5}x_{467} + x_{4j6}x_{457} - x_{4j7}x_{456}$$

– многочлен длины 3.

1: Наконец, максимальная длина 4 будет достигаться, если $i,j \notin \{4,5,6,7\}$. В этом случае

$$f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}} = x_{ij4}x_{567} - x_{ij5}x_{467} + x_{ij6}x_{457} - x_{ij7}x_{456}.$$

§4. Уравнения на внешнюю степень

В этом параграфе мы представим различные серии уравнений на схему $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Сначала сформулируем свойство принадлежности матрицы g к $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Именно в таком виде мы планируем использовать уравнения для обратного разложения унипотентов. Расширим определение элементов матрицы $g_{I,J}$ для мультимножеств $I = \{i_l\}_{l=1}^m$ и $J = \{j_l\}_{l=1}^m$. Напомним, что мультимножеством называется совокупность не обязательно различных элементов, то есть это пара (A, m), где A – базовое множество, а $\mathsf{m} : A \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ – функция кратности. Далее мы будем опускать там, где это естественно, функцию m из записи пары (A, m). Если $(A, \mathsf{m}_\mathsf{A}), (B, \mathsf{m}_\mathsf{B})$ – два мультимножества, то их *арифметической суммой* называется мультимножество $A+B$, состоящее из всех элементов, которые присутствуют хотя бы в одном из мультимножеств, и кратность каждого элемента равна сумме кратностей соответствующих элементов в складываемых мультимножествах: $A+B = \{\mathsf{m}_{A+B}(x)x \mid \mathsf{m}_{A+B}(x) = \mathsf{m}_A(x) + \mathsf{m}_B(x)\}$. Если в мультимножествах $(I, \mathsf{m}_\mathsf{I})$ или $(J, \mathsf{m}_\mathsf{J})$ существуют элементы i_l или j_l такие, что их кратности $\mathsf{m}_\mathsf{I}(i_l)$ или $\mathsf{m}_\mathsf{J}(j_l)$ больше нуля, то $g_{I,J} = 0$, например, $g_{12,11} = g_{22,11} = 0$.

Теорема 4. *Пусть матрица $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ принадлежит группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 3$. Тогда для любых индексов $B, D \in \bigwedge^m [n]$ таких,*

[2] Нумерация по количеству изменённых координат в векторе w.

что $\mathrm{ht}(B,D) \geqslant m-1$ *и любого мультимножества* $I+J$, *где* $I \in \bigwedge^{m-1}[n]$, $J \in \bigwedge^{m+1}[n]$, *выполнено равенство*

$$\sum_{A+C=I+J} \mathrm{sgn}(A,C) g_{A,B} g_{C,D} = 0,$$

где сумма берётся по всем разбиениям мультимножества $I+J$ *в* m*-элементные индексы* A *и* C *из* $\bigwedge^m[n]$.

Доказательство. Так $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, то g сохраняет идеал Плюккера Plü, порожденный многочленами Плюккера $f_{I,J}$, где $I \in \bigwedge^{m-1}[n]$, $J \in \bigwedge^{m+1}[n]$. Пусть $x \in R^N$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{I,J}(gx) &= \sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h (gx)_{I\cup\{j_h\}} (gx)_{J\setminus\{j_h\}} \\ &= \sum_{K,L\in\bigwedge^m[n]} \left(\sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h g_{I\cup\{j_h\},K} \cdot g_{J\setminus\{j_h\},L} \right) x_K x_L. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим через $a_{I+J}^{K,L}$ коэффициент при мономе $x_K x_L$, который, очевидно, идентичен коэффициенту при $x_L x_K$. Тогда $a_{I+J}^{K,L}$ можно представить в следующем виде

$$a_{I+J}^{K,L} = \sum_{A+C=I+J} \mathrm{sgn}(A,C) g_{A,K} g_{C,L},$$

где суммирование берётся по всем разбиениям мультимножества $I+J$ на пары m-элементных подмножеств A и C. Для завершения доказательства осталось заметить, что условие сохранения идеала Plü гарантирует равенство нулю всех коэффициентов $a_{I+J}^{K,L}$ в формуле (1) при $\mathrm{ht}(K,L) \geqslant m-1$. $\square$

Группу $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ можно представить в виде стабилизатора инвариантной формы или идеала форм. Используя этот факт, мы представим ещё один вид уравнений, определяющих принадлежность матрицы $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ к группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Для простоты будем рассматривать случай единственной формы, то есть $k := \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$ и чётного m. Доказательство для нечётного m аналогично. Вывод уравнений для идеала форм оставляем читателю в качестве упражнения. По утверждению 6 из работы [12] у группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ существует полиномиальная форма

$$f_{n,m}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \ldots, I_k)\, x_{I_1} \ldots x_{I_k},$$

где суммирование берётся по всем разбиениям множества $[n]$ в m-элементные подмножества $I_1, \ldots, I_k$. По ней зададим k-линейную форму $F_{n,m}(x^1, \ldots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \ldots, I_k)\ x^1_{I_1} \ldots x^k_{I_k}$. Введём следующее обозначение поляризации частной производной инвариантной формы:

$$f_I(x^2, \ldots, x^k) := F_{n,m}(e^I, x^2, \ldots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I, I_2, \ldots, I_k) x^2_{I_2} \ldots x^k_{I_k},$$

где суммирование берётся по всем разбиениям множества $[n] \setminus I$ на m-элементные подмножества $I_2, \ldots, I_k$. Кроме этого для любого набора попарно непересекающихся индексов $\mathcal{I} := \{I_2, \ldots, I_k\}$, где $I_l \in \bigwedge^m[n]$, обозначим через $\overline{\mathcal{I}}$ индекс $[n] \setminus (I_2 \cup \cdots \cup I_k) \in \bigwedge^m[n]$, то есть это дополнение набора $\mathcal{I}$ до целого множества $[n]$.

Теорема 5. *Пусть $k = \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. Матрица $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ принадлежит группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

- *Для всех индексов $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ таких, что среди набора $\mathcal{I} = \{I_2, \ldots, I_k\}$ есть два пересекающихся, то есть таких, что существуют $2 \leqslant l_1 \neq l_2 \leqslant k$: $\mathrm{ht}(I_{l_1}, I_{l_2}) \geqslant 1$, имеем*
$$f_{I_1}(g_{*,I_2}, g_{*,I_3}, \ldots, g_{*,I_k}) = 0.$$
- *Для всех индексов $I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ таких, что среди наборов $\mathcal{I} = \{I_2, \ldots, I_k\}, \mathcal{J} = \{J_2, \ldots, J_k\}$ нет пересекающихся, то есть таких, что для любых $2 \leqslant l_1 \neq l_2 \leqslant k$: $\mathrm{ht}(I_{l_1}, I_{l_2}) = \mathrm{ht}(J_{l_1}, J_{l_2}) = 0$, имеем*

$$\mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{J}}, J_2, \ldots, J_k) g'_{\overline{\mathcal{J}}, J_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) = \mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}).$$

Доказательство. Пусть $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда существует мультипликатор $\lambda(g) \in R^*$ такой, что для всех $x^1, \ldots, x^k \in R^N$ выполнено

$$F_{n,m}(gx^1, \ldots, gx^k) = \lambda(g) F_{n,m}(x^1, \ldots, x^k). \tag{2}$$

Заметим, что это условие равносильно такому же, где вместо набора векторов x^l используются базисные векторы e^{I_l} для всех $I_l \in \bigwedge^m[n]$.

Пусть сначала среди набора $\mathcal{I} = \{I_2, \ldots, I_k\}$ есть два индекса высоты больше нуля. Для сокращения записи будем считать, что это индексы I_2 и I_3. Тогда условие (2) эквивалентно равенству

$$F_{n,m}(ge^{I_1}, \ldots, ge^{I_k}) = 0 \quad \text{для всех} \quad I_l, l \neq 2, 3,$$

что эквивалентно равенству $F_{n,m}(x^1, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех $x^1 \in R^N$ и $I_l \in \bigwedge^m[n], l \geqslant 4$. А это условие, в свою очередь, эквивалентно заявленному равенству $F_{n,m}(e^{I_1}, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех $I_1, I_4, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$.

Рассмотрим второй случай. Пусть среди набора $\mathcal{I}$ нет пересекающихся индексов. Тогда равенство (2) эквивалентно тому, что

$$F_{n,m}(gx^1, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = \lambda(g) F_{n,m}(x^1, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k})$$

для всех $x^1 \in R^N$. Если вместо x^1 взять вектор $g^{-1}x^1$, то получим $F_{n,m}(x^1, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = \lambda(g) F_{n,m}(g^{-1}x^1, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k})$ для всех $x^1 \in R^N$. Достаточно требовать выполнения этого условия только для базисного вектора $x^1 = e^{I_1}$, то есть

$$F_{n,m}(e^{I_1}, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = \lambda(g) F_{n,m}(g^{-1}e^{I_1}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}).$$

Левая часть последнего условия снова есть $f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k})$. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} &\lambda(g) F_{n,m}(g^{-1}e^{I_1}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}) = \lambda(g) F_{n,m}(g'_{*,I_1}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}) \\ &= \lambda(g) \sum_{L \in \bigwedge^m[n]} g'_{L,I_1} F_{n,m}(e^{I_L}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}) = \lambda(g) \operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1}. \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от мультипликатора $\lambda(g)$, необходимо рассмотреть другой набор $J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $J_2, \ldots, J_k$.

Пусть теперь H – аффинная схема над $\mathbb{Z}$, определённая уравнениями из формулировки теоремы. Требуется доказать, что $H(R) \subseteq \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ для локального кольца R. Пусть M – максимальный идеал кольца R. Из первой серии уравнений следует, что $F_{n,m}(ge^{I_1}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех индексов $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ таких, что среди $I_2, \ldots, I_k$ есть пересекающиеся. Таким образом, для завершения доказательства осталось только найти $\lambda \in R^*$ такое, что

$$f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) = \lambda \operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1}$$

для всех индексов $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ таких, что среди $I_2, \ldots, I_k$ нет пересекающихся.

Докажем вначале, что существуют индексы $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$ такие, что $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in R^*$. Предположим обратное, то есть для всех $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$: $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in M$. Заметим, что найдутся $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$ такие, что $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} \in R^*$, для этого достаточно при фиксированных $I_2, \ldots, I_k$ варьировать I_1. Кроме этого, найдутся другие $J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $J_2, \ldots, J_k$ такие, что $f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}) \in R^*$. В самом деле, иначе при любых фиксированных $J_1, J_2 \in \bigwedge^m[n]$ с учётом уравнений на пару близких столбцов имеем $f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}) \in M$ для всех $J_3, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$. Отсюда по линейности следует, что $f_{J_1}(g_{*,J_2}, x^3, \ldots, x^k) \in M$ для всех $x^3, \ldots, x^k \in R^N$. Но это значит, что $f_{J_1}(g_{*,J_2}, e^{L_3}, \ldots, e^{L_k}) = \pm g_{[n]\setminus(J_1\cup L_3\cup\cdots\cup L_k),J_2} \in M$ для всех $J_1, L_3, \ldots, L_k \in \bigwedge^m[n]$, что невозможно. Следовательно,

$$g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in M \quad \text{и} \quad g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}) \in R^*,$$

что противоречит тому, что g принадлежит $H(R)$. Таким образом, существуют индексы $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$ такие, что $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in R^*$. Пусть тогда

$$\lambda := \operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) \left(g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1}\right)^{-1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}). \qquad \square$$

Полученные две серии равенств называются уравнениями на *набор близких столбцов* и *два набора далёких столбцов*. Именно в таком виде мы планируем их использовать в будущей работе о надгруппах внешних степеней элементарной группы. Однако часто удобно использовать уравнения, в которых присутствуют всего два столбца. Введём обозначения другой частной производной инвариантной формы $F_{n,m}$:

$$f_{I_3,\ldots,I_k}(x, y) := F_{n,m}(x, y, e^{I_3}, \ldots, e^{I_k}) = \sum \operatorname{sgn}\left(J_1, J_2, I_3, \ldots, I_k\right) x_{J_1} y_{J_2},$$

где суммирование берётся по всем разбиениям множества $[n]\setminus(I_3\cup\cdots\cup I_k)$ в пары m-элементных подмножеств J_1, J_2. Аналогично теореме 5 получаются уравнения на *пары близких* и *две пары далёких столбцов*.

Теорема 6. *Пусть* $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. *Матрица* $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ *принадлежит группе* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

- *Для любых индексов* $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что* $\mathrm{ht}(I_1, I_2) \geqslant 1$, *имеем*
$$f_{I_3,\ldots,I_k}(g_{*,I_1}, g_{*,I_2}) = 0.$$
- *Для любых двух наборов индексов* $I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что* $\mathrm{ht}(I_1, I_2) = \mathrm{ht}(J_1, J_2) = 0$, *имеем*

$$\sum_{L_j \in \bigwedge^m[n]} \mathrm{sgn}(J_1, J_2, L_3, \ldots, L_k) g'_{L_3,J_3} \ldots g'_{L_k,J_k} \cdot f_{I_3,\ldots,I_k}(g_{*,I_1}, g_{*,I_2})$$
$$= \sum_{L_j \in \bigwedge^m[n]} \mathrm{sgn}(I_1, I_2, L_3, \ldots, L_k) g'_{L_3,I_3} \ldots g'_{L_k,I_k} \cdot f_{J_3,\ldots,J_k}(g_{*,J_1}, g_{*,J_2}).$$

§5. Обратное разложение унипотентов

В оставшейся части работы мы сформулируем основную гипотезу обратного разложения унипотентов для произвольной внешней степени полной линейной группы. Напомним для этого некоторые понятия, связанные с конгруэнц-подгруппами по модулю идеала.

Для идеала A кольца R пусть R/A обозначает фактор-кольцо. Обозначим через $\rho_A : R \longrightarrow R/A$ каноническую проекцию, действующую по следующему правилу. Для любого элемента $\lambda \in R$: $\rho(\lambda) = \bar{\lambda} := \lambda + A \in R/A$. Применяя проекцию ко всем элементам матрицы, мы получаем гомоморфизм редукции:

$$\begin{array}{rcl} \rho_A : \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R) & \longrightarrow & \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A) \\ a & \mapsto & \overline{a} = (\overline{a}_{I,J}) \end{array}$$

Ядро гомоморфизма ρ_A обозначается $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ и называется *главной* (*относительной*) *конгруэнц-подгруппой уровня* A. Обозначим полный прообраз центра $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)$ под действием гомоморфизма ρ_A через $\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$. Такая группа называется *полной* (*относительной*) *конгруэнц-подгруппой уровня* A. Заметим, что

$$\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A) \subseteq \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A),$$

и обе эти группы нормальны в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Утверждение 2. *Пусть* R *– коммутативное кольцо,* $n \geqslant 3$. *Тогда для любого идеала* $A \trianglelefteq R$ *выполнено следующее равенство:*

$$[\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] = \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A).$$

Этот результат называется *стандартной коммутационной формулой*. Он доказывался многократно различными авторами в работах на разные темы, например, в работе [10].

Далее, *верхним уровнем* матрицы $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ называется наименьший идеал $I = \mathrm{lev}(g) \trianglelefteq R$ такой, что $g \in \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, I)$. Так же, как и в случае полной линейной группы, верхний уровень порождается внедиагональными элементами $g_{I,J}, I \neq J$, и попарными разностями диагональных элементов $g_{I,I} - g_{J,J}, I \neq J$. Заметим, что достаточно рассматривать только фундаментальные разности $g_{I,I} - g_{\bar{I},\bar{I}}$, где $\bar{I}$ – это следующий индекс после I в $\bigwedge^m[n]$ в лексикографическом порядке. Таким образом верхний уровень $\mathrm{lev}(g)$ порождается $\binom{n}{m}^2 - 1$ элементами.

Лемма 1. *Пусть* $P_{ij} := \bigwedge^m t_{i,j}(1) \bigwedge^m t_{j,i}(-1) \bigwedge^m t_{i,j}(1) \in \bigwedge^m \mathrm{E}(n, R)$, *где* $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. *Тогда для любого индекса* $k \neq i, j$ *и любого* $\xi \in R$ *непосредственным вычислением проверяется следующее правило сопряжения внешней трансвекции:*

- ${}^{P_{ki}} \bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \bigwedge^m t_{k,j}(\xi)$;
- ${}^{P_{kj}} \bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \bigwedge^m t_{i,k}(\xi)$.

Пусть $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ и $h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Матрица вида $g^{\pm h}$ называется *элементарной (внешней) g-сопряжённой*.

Задача. *Пусть R – коммутативное кольцо, $n \geqslant 2m+1$ и $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{lev}(g)$ трансвекция $\bigwedge^m t_{k,l}(\xi)$ представляется в виде произведения не более чем $8\left(\binom{n}{m}^2 - 1\right)$ элементарных сопряжённых к g и g^{-1}, а именно, для любых $1 \leqslant k \neq l \leqslant n$ и $I, J \in \bigwedge^m[n], \mathrm{ht}(I, J) = p$, имеем*

(1) $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,J})$ *представляется в виде произведения не более чем $8(m - p)$ элементарных внешних g-сопряжённых;*
(2) $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,I} - g_{J,J})$ *представляется в виде произведения не более чем $24(m - p)$ элементарных внешних g-сопряжённых.*

Стандартная идея доказательства такой задачи строится на проверке одного ключевого случая $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,J})$ при $\mathrm{ht}(I, J) = m - 1$. Все остальные получаются как его следствия. Но даже при доказательстве базового случая для произвольной внешней степени возникает непреодолимая сложность. Она заключается в отсутствии внешних трансвекций $\bigwedge^m t_{i,j}(\xi)$ в унипотентном радикале подходящей параболической подгруппы ${}_K P_{12\ldots m}$.

Список литературы

1. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(2l, R)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
2. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и Анализ **15**, No. 4 (2003), 72–114.
3. Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман, *Поливекторные представления* GL_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 69–97.
4. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и Анализ **19**, No. 5 (2007), 37–64.
5. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n, R)$. — Алгебра и Анализ **19**, No. 2 (2007), 10–51.
6. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Еще несколько вариаций на тему разложения трансвекций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 32–47.
7. Р. А. Лубков, И. И. Некрасов, *Явные уравнения на внешний квадрат полной линейной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **470** (2018), 120–137.
8. В. А. Петров, *Разложение трансвекций: алгебро-геометрический подход.* — Алгебра и Анализ **28**, No. 1 (2016), 150–157.
9. А. В. Степанов, *Новый взгляд на разложение унипотентов и нормальное строение групп Шевалле.* — Алгебра и Анализ **28**, No. 3 (2016), 161–173.
10. R. Hazrat, N. Vavilov, Z. Zhang, *Relative commutator calculus in Chevalley groups.* — J. Algebra **385** (2013), 262–293.
11. R. Lubkov, *The reverse decomposition of unipotents for bivectors.* — Comm. Algebra **49**, No. 10 (2021), 4546–4556.
12. R. Lubkov, I. Nekrasov, *Overgroups of exterior powers of an elementary group. I. Levels and normalizers.* — Linear and multilinear algebra, accepted for publication, 20 p., `https://arxiv.org/abs/1801.07918`, 2021.
13. R. Lubkov, A. Stepanov, *Subgroups of Chevalley groups over rings.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **484** (2019), 121–137.
14. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Internat. J. Algebra Comput. **8**, No. 1 (1998), 61–95.
15. R. Preusser, *Structure of hyperbolic unitary groups II: Classification of E-normal subgroups.* — Algebra Colloq. **24**, No. 2 (2017), 195–232.
16. R. Preusser, *Sandwich classification for* $O_{2n+1}(R)$ *and* $U_{2n+1}(R, \Delta)$ *revisited.* — J. Group Theory **21**, No. 4 (2018), 539–571.
17. R. Preusser, *Sandwich classification for* $\mathrm{GL}_n(R)$, $\mathrm{O}_{2n}(R)$ *and* $\mathrm{U}_{2n}(R, \Lambda)$ *revisited.* — J. Group Theory **21**, No. 1 (2018), 21–44.
18. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections: Theme with variations.* — K-Theory **19**, No. 2 (2000), 109–153.
19. N. A. Vavilov, *Decomposition of unipotents for* E_6 *and* E_7*: 25 years after.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 32–52.

Lubkov R. Reverse decomposition of unipotents in polyvector representations.

The present paper continues the series of papers devoted to the method of decomposition of unipotents and its numerous variations. For exterior square of the general linear group, which is a key particular case of exterior powers, the question of the reverse decomposition of unipotents was considered by the author (2021). A generalization of the obtained results to an arbitrary exterior power is discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Поступило 24 августа 2021 г.

E-mail: RomanLubkov@yandex.ru