Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

В. И. Копейко

ОБ УНИТАРНЫХ НИЛЬ K_1-ГРУППАХ

§1. Введение

Данная работа является естественным продолжением работы [1], в которой для произвольного унитарного кольца R была введена и изучалась унитарная нильпотентная по Бассу K_1-группа $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. В частности, в [1] была найдена система (унитарных) представителей группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. При этом оказалось, что, в отличие от линейного случая, где для произвольного ассоциативного кольца R с 1 любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ имеет унипотентный представитель (см., например, главу 12 из [2]), для унитарной ниль-группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ аналогичный результат, вообще говоря, не имеет места. Целью данной работы является продолжение изучения структуры группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. В теореме, основном результате работы, доказывается, что любая унитарная унипотентная матрица имеет вид, описанный в теореме 2 работы [1]. Используя полученный результат, определяется ряд ниль-подгрупп группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, для которых доказываются свойства, аналогичные хорошо известным свойствам группы $NK_1(R)$ из алгебраической K-теории (см., например, [3]).

§2. Унитарная ниль-группа $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$

Напомним ряд стандартных определений и результатов унитарной K-теории (см., например, [1,4,5]), используемых в данной работе. Пусть (R,λ,Λ) – унитарное кольцо, где R – ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x\to\bar{x}$, λ – центральный элемент кольца R такой, что $\lambda\cdot\bar{\lambda}=1$ и Λ – аддитивная подгруппа R, удовлетворяющая некоторым условиям. В литературе унитарное кольцо называют

Ключевые слова: унитарное кольцо, унитарная группа, унитарный K_1-функтор, нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа, унитарные унипотентные матрицы.

также форменным кольцом Бака с системой параметров Λ и симметрией λ. Если положить $\bar{\Lambda} = \{\bar{x}, x \in \Lambda\}$, то получаем еще одно унитарное кольцо $(R, \bar{\lambda}, \bar{\Lambda})$. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$ стандартным способом, положив $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

2.1. Определение 1. Матрица $a(\in M_r(R))$ называется Λ-эрмитовой, если она является анти λ-эрмитовой, то есть $a = -\lambda a^*$, и все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ. Очевидно, что матрица a является Λ-эрмитовой тогда и только тогда, когда a^* является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой матрицей.

В работе мы будем использовать блочную форму записи матриц. Более точно, запись $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ означает, что $a, b, c, d \in M_r(R)$. Для натурального r положим $I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r (соответственно 0) обозначает единичную (соответственно нулевую) матрицу порядка r. Отметим, что I_r^λ – обратимая Λ-эрмитова матрица, причем $(I_r^\lambda)^{-1} = (I_r^\lambda)^*$.

2.2. Определение 2. Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ называется унитарной, если $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$. Если, кроме того, диагональные элементы матриц a^*c, b^*d содержатся в Λ, то матрица называется Λ-унитарной.

Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех Λ-унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) Λ-унитарной группой. В дальнейшем слово “гиперболическая” мы будем опускать. Приведем ряд стандартных примеров Λ-унитарных матриц.

2.3. Пример 1. Блочно-диагональная матрица $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $a, d \in M_r(R)$, содержится в $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица a обратима, причем $d = (a^*)^{-1}$. Матрицы вида $H(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix}$, где $a \in GL_r(R)$, называются (унитарными) гиперболическими.

2.4. Пример 2. Матрица $\begin{pmatrix} e & b \\ 0 & e \end{pmatrix}$ содержится в $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица b – $\bar{\Lambda}$-эрмитова.

2.5. Пример 3. Матрица $\begin{pmatrix} e & 0 \\ c & e \end{pmatrix}$ содержится в $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица c – Λ-эрмитова.

Обозначим через $EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ подгруппу $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, порожденную гиперболическими матрицами $H(a)$, где $a \in E_r(A)$, а также матрицами, описанными в примерах 2 и 3. Группа $EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ называется элементарной (гиперболической) Λ-унитарной группой.

Определим вложение $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda) \to U_{2r+2}^{\lambda}(R,\Lambda)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и положим $U^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, $EU^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup EU_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда (см., например, предложение 3.7 в главе 2 из [5]), группа $EU^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^{\lambda}(R,\Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) = U^{\lambda}(R,\Lambda)/EU^{\lambda}(R,\Lambda)$. Класс матрицы $\alpha \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$ в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ будем обозначать $[\alpha]$. В результате мы получаем унитарный K_1-функтор K_1U, действующий из категории унитарных колец в категорию абелевых групп.

Продолжив инволюцию на кольцо многочленов $R[X]$, полагая $\overline{X} = X$, получаем унитарное кольцо $(R[X], \lambda, \Lambda[X])$.

2.6. Определение 3. Ядро (расщепляющегося) эпиморфизма групп $K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X]) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$, индуцированного унитарной сюръекцией унитарных колец $(R[X],\Lambda[X]) \to (R,\Lambda) : X \to 0$, обозначим через $NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ и будем называть унитарной нильпотентной по Бассу K_1-группой унитарного кольца R.

Для доказательства следующего результата в работе [1] был построен унитарный аналог линеаризационного трюка Хигмана, при этом, в отличие от линейного случая алгебраической K-теории, линеаризуется только верхняя половина $\Lambda[X]$-унитарной матрицы, представляющей элемент группы $NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$. В действительности, аналогичную линеаризацию можно провести для любой из половинок (левой, правой, верхней, нижней) представляющей матрицы.

2.7. Предложение 1. (См. [1], теорема 1). *Любой элемент группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет представитель вида:*

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \dots + (a^*)^n X^n \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X])$$

при некоторых натуральных r,n и матрицах $a,b,c(\in M_r(R))$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) *матрицы b и ab являются $\bar\Lambda$-эрмитовыми, причем $ab = ba^*$;*
2) *матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми, причем $ca = a^*c$;*
3) $bc = a^{n+1}$, $cb = (a^*)^{n+1}$.

Нетрудно показать (см., например, [1]), что условия 1)–3) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы выписанная матрица являлась $\Lambda[X]$-унитарной.

Хорошо известно (см., например, следствие 5.3 из главы 12 в [2]), что для ассоциативного кольца R с 1 любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ имеет унипотентный представитель вида $e_r - aX$ при некотором натуральном r, где $a(\in M_r(R))$ – нильпотентная матрица. Для унитарной нильпотентной по Бассу K_1-группы $NKU^\lambda_1(R,\Lambda)$ аналогичный результат вообще говоря не имеет места. Более точно, имеет место следующий результат.

2.8. Предложение 2. (См. [1], теорема 2). *Пусть матрицы $a,b,c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям* 1)–3) *из предложения* 1 *при некоторых натуральных r,n. Тогда*

1) *при $n = 1$ матрица*

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX & e_r + a^*X \end{pmatrix} = e_{2r} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix} X \in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X])$$

является унипотентной, причем матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$ имеет степень нильпотентности 2*;*

2) *при $n \geqslant 2$ матрица*

$$\begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \dots + (a^*)^n X^n \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R[X],\Lambda[X])$$

является унипотентной тогда и только тогда, когда матрица $e_r - aX$ – унипотентна и в этом случае класс данной матрицы в группе $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с классом гиперболической матрицы $H(e_r - aX)$.

§3. Унитарные ниль K_1-группы и их свойства

Основным результатом работы является следующее утверждение, показывающее, что предложение 2 дает полное описание элементов группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, имеющих унипотентный представитель.

3.1. Теорема. *Пусть* $\alpha \in M_{2r}(R)$. *Если* $e_{2r} - \alpha X \in U^\lambda_{2r}(R[X], \Lambda[X])$, *то* α *является нильпотентной матрицей степени нильпотентности* 2 *и в этом случае матрица* α *имеет вид* $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$, *где матрицы* $a, b, c \in M_r(R)$ *удовлетворяют условиям* 1)–3) *из предложения* 1 *при* $n = 1$.

3.2. Доказательство теоремы. Докажем сначала первое утверждение. Предположим, что матрица $e_{2r} - \alpha X$ является $\Lambda[X]$-унитарной. Тогда, по определению, $(e_{2r} - \alpha X)^* I^\lambda_r (e_{2r} - \alpha X) = I^\lambda_r$ и значит $\alpha^* I^\lambda_r + I^\lambda_r \alpha = 0$, $\alpha^* I^\lambda_r \alpha = 0$. Из первого равенства следует, что $\alpha^* I^\lambda_r = -I^\lambda_r \alpha$ и значит $\alpha^* I^\lambda_r \alpha = -I^\lambda_r \alpha^2 = 0$. Так как матрица I^λ_r обратима, то $\alpha^2 = 0$.

Докажем второе утверждение. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$ при некоторых $a, b, c, d \in M_r(R)$. Из равенства $\alpha^* I^\lambda_r = -I^\lambda_r \alpha$ следует, что $d = -a^*$, $c = -\lambda c^*$, $b^* = -\lambda (b^*)^*$. В частности, матрицы c и b^* являются анти λ-эрмитовыми, а матрица α имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$. Из второго равенства

$$\alpha^* I^\lambda_r \alpha = \begin{pmatrix} a^*c - ca & cb - (a^*)^2 \\ \lambda(bc - a^2) & ab - ba^* \end{pmatrix} = 0$$

следует выполнение следующих условий из предложения 1: $ab = ba^*$, $ca = a^*c$, $bc = a^2$, $cb = (a^*)^2$.

Из полученных равенств также следует, что $ca = a^*c = -\lambda a^* c^* = -\lambda (ca)^*$, $ab = ba^* = -\bar\lambda b^* a^* = -\bar\lambda (ab)^*$, и значит, $(ab)^* = -\lambda(ab)$. Таким образом, матрицы ca и $(ab)^*$ также являются анти λ-эрмитовыми.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что матрицы b и ab в действительности являются $\bar\Lambda$-эрмитовыми, а матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми. По предположению, матрица $e_{2r} - \alpha X = \begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX & e_r + a^*X \end{pmatrix}$ является $\Lambda[X]$-унитарной, и значит, по определению, диагональные элементы матрицы $(e_r - aX)^* c = c - a^* c X = c - caX$ содержатся в $\Lambda[X]$. Следовательно, матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми. Аналогично, из условия, что диагональные элементы матрицы $b^*(e_r+a^*X) = b^*+b^*a^*X = b^*+(ab)^*X$ содержатся в $\Lambda[X]$ следует, что диагональные элементы матриц b^* и $(ab)^*$ содержатся в Λ, и значит, диагональные элементы матриц b и ab содержатся в $\bar{\Lambda}$. Следовательно, матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, что и завершает доказательство теоремы.

Введем ряд ниль-подгрупп группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Обозначим через $\mathrm{Unip}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ подгруппу $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, порожденную всеми элементами с представителями, имеющими один из следующих двух видов:

1) $e_{2r} - -\alpha X$ при некотором r, где $\alpha \in M_{2r}(R)$ является нильпотентной матрицей степени нильпотентности 2;

2) $H(e_r - aX)$ при некотором r, где $a \in M_r(R)$ – нильпотентная матрица.

Обозначим через $\mathrm{Unip}_{11}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ (соответственно, $\mathrm{Unip}_{12}K_1U^\lambda\ (R,\Lambda)$) подгруппу $\mathrm{Unip}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, порожденную всеми элементами с представителями вида 1) (соответственно, вида 2).

3.3. Следствие 1. *Пусть натуральное число n такое, что $n = n\cdot 1 = 0$ в кольце R, где 1 обозначает единичный элемент кольца R. Тогда любой элемент группы $\mathrm{Unip}_{11}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет конечный порядок, делящий число n.*

Достаточно доказать утверждение только для любой из образующих группы. Пусть $z = [e_{2r} - \alpha X]$, где α – нильпотентная матрица степени нильпотентности 2. Так как $(e_{2r} - \alpha X)^n = e_{2r} - n\alpha X = e_{2r}$ в силу условия, то $nz = [(e_{2r} - \alpha X)^n] = 0$ и, следовательно, элемент z имеет конечный порядок, являющийся делителем числа n.

3.4. Следствие 2. *Если простое число p такое, что $p^k = 0$ в кольце R, то $\mathrm{Unip}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является p-группой.*

В силу следствия 1, $p^kz = 0$ для любой образующей вида $z = [e_{2r} - \alpha X]$, где α – нильпотентная матрица степени нильпотентности 2, и значит, нам осталось доказать утверждение только для образующих вида $z = [H(e_r - aX)]$ при некотором r, где $a(\in M_r(R))$ – нильпотентная матрица. Таким образом, $[e_r - aX] \in NK_1(R)$ и согласно пункту d) следствия 3.3 из [3], группа $NK_1(R)$ является p-группой. Следовательно, найдется натуральное s такое, что $p^s[e_r - aX] = [(e_r - aX)^{p^s}] = 0$, а значит, и $p^s[e_r - a^*X] = 0$. Имеем

$$p^sz = p^s[H(e_r - aX)] = [H((e_r - aX)^{p^s})] = 0.$$

Таким образом, любой элемент группы $\mathrm{Unip}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет конечный порядок, являющийся степенью простого числа p, и значит, группа $\mathrm{Unip}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является p-группой.

3.5. Следствие 3. *Пусть натуральное число n такое, что $nR = R$. Тогда группа $\mathrm{Unip}_{11}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является однозначно n-делимой.*

Чтобы доказать n-делимость группы, достаточно доказать данное утверждение для ее образующих. Пусть $z = [e_{2r} - \alpha X]$, где α – нильпотентная матрица степени нильпотентности 2. Так как $(e_{2r} - \frac{1}{n}\alpha X)^n = e_{2r} - \alpha X$, то $z = n[(e_{2r} - \frac{1}{n}\alpha X)]$, и n-делимость группы доказана.

Чтобы доказать однозначную n-делимость группы, достаточно показать, что группа $\mathrm{Unip}_{11}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ не имеет n-кручения. Пусть $z = [\prod\limits_{i=1}^{k}(e_{2r} - \alpha_i X)]$, где α_i являются нильпотентными матрицами степени нильпотентности 2. Так как мы рассматриваем стабильную группу $U^\lambda(R[X],\Lambda[X])$, то действительно можем считать, что все матрицы, входящие в разложение элемента z, имеют одинаковый порядок. Предположим, что $nz = 0$. В силу условия, имеем

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{i=1}^{k}(e_{2r} - \alpha_i X)\Big)^n \equiv \prod_{i=1}^{k}(e_{2r} - \alpha_i X)^n = \prod_{i=1}^{k}(e_{2r} - n\alpha_i X)\\ \equiv e_{2r} \mod EU^\lambda(R[X],\Lambda[X]),\end{aligned}$$

и значит, $\prod\limits_{i=1}^{k}(e_{2r} - n\alpha_i X) \in EU^\lambda(R[X],\Lambda[X])$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_* : NK_1U^\lambda(R,\Lambda) \longrightarrow NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, индуцированный гомоморфизмом колец $\varphi : R[X] \longrightarrow R[X] : f(X) \longrightarrow f(\frac{1}{n}X)$. Имеем

$$z = \varphi_*\Big[\prod_{i=1}^{k}(e_{2r} - n\alpha_i X)\Big] = \varphi_*(0) = 0,$$

что и завершает доказательство следствия.

В унитарной K-теории для любого унитарного кольца R имеется два стандартных гомоморфизма групп: гиперболический

$$H : K_1(R) \longrightarrow K_1U^\lambda(R,\Lambda) : [a] \longrightarrow [H(a)]$$

и забывающий

$$F : K_1U^\lambda(R,\Lambda) \longrightarrow K_1(R) : \alpha \bmod EU^\lambda(R,\Lambda) \longrightarrow \alpha \bmod E(R),$$

причем $(F \circ H)([a]) = [a(a^*)^{-1}]$.

3.6. Следствие 4. *При условии из следствия 3, если либо гиперболический гомоморфизм $H : NK_1(R) \longrightarrow NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, либо забывающий гомоморфизм $F : NK_1U^\lambda(R,\Lambda) \longrightarrow NK_1(R)$ является мономорфизмом, то группа $\mathrm{Unip}_{12}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ является однозначно n-делимой.*

Как и в следствии 3, для доказательства n-делимости группы $\mathrm{Unip}_{12}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, достаточно доказать данное свойство для ее образующих. Пусть $[H(e_r - aX)]$ при некотором r, где $a(\in M_r(R))$ – нильпотентная матрица. Так как $[e_r - aX] \in NK_1(R)$, то, согласно пункту b) следствия 3.3 из [3], группа $NK_1(R)$ является (однозначно) n-делимой, и значит, найдется (и притом единственный) элемент $z \in NK_1(R)$ такой, что $[e_r - aX] = nz$. Следовательно, $[H(e_r - aX)] = nH(z)$, что и доказывает первое утверждение.

Для того чтобы доказать однозначную n-делимость группы $\mathrm{Unip}_{12}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, достаточно показать отсутствие n-кручения в группе. Пусть

$$z = \Big[\prod_{i=1}^{k} H(e_r - a_iX)\Big] = H\Big(\Big[\prod_{i=1}^{k}(e_r - a_iX)\Big]\Big),$$

где $a_i(\in M_r(R))$ являются нильпотентными матрицами. Предположим, что $nz = 0$. Так как $nz = 0$, то

$$H\Big(\Big(\prod_{i=1}^{k}(e_r - a_iX)\Big)^n\Big) \equiv e_{2r} \mod EU^\lambda(R[X],\Lambda[X]).$$

Поэтому, если гиперболический гомоморфизм H – мономорфизм, то

$$\Big(\prod_{i=1}^{k}(e_r - a_iX)\Big)^n \equiv e_r \mod E(R[X]),$$

и значит,

$$n\Big[\prod_{i=1}^{k}(e_r - a_iX)\Big] = 0$$

в группе $NK_1(R)$. Следовательно, в силу пункта b) следствия 3.3 из [3], имеем $[\prod_{i=1}^{k}(e_r - a_iX)] = 0$, и значит, $z = H([\prod_{i=1}^{k}(e_r - a_iX)]) = 0$.

С другой стороны, так как $nz = 0$, то

$$F\Big[\prod_{i=1}^{k} H(e_r - a_iX)^n\Big] = \Big[\prod_{i=1}^{k}((e_r - a_iX)(e_r - a_i^*X)^{-1})^n\Big] = 0.$$

В частности, $n[\prod\limits_{i=1}^{k}((e_r - a_iX)(e_r - a_i^*X)^{-1})] = 0$ в группе $NK_1(R)$. Следовательно, в силу пункта b) следствия 3.3 из [3], имеем

$$\Big[\prod_{i=1}^{k}((e_r - a_iX)(e_r - a_i^*X)^{-1})\Big] = 0.$$

Но

$$\Big[\prod_{i=1}^{k}((e_r - a_iX)(e_r - a_i^*X)^{-1})\Big] = F\Big[\prod_{i=1}^{k} H(e_r - a_iX)\Big],$$

и значит, $F[\prod\limits_{i=1}^{k} H(e_r - a_iX)] = 0$. Поэтому, если забывающий гомоморфизм F – мономорфизм, то $z = [\prod\limits_{i=1}^{k} H(e_r - a_iX)] = 0$, что и завершает доказательство следствия.

Следствие 5. *Если R является $\mathbf{Q}$-алгеброй, где $\mathbf{Q}$ обозначает поле рациональных чисел, то* $\mathrm{Unip}_{11}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ *является $\mathbf{Q}$-векторным пространством. Если, кроме того, один из гомоморфизмов F или H из следствия* 4 *является мономорфизмом, то* $\mathrm{Unip}_{12}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ *также является $\mathbf{Q}$-векторным пространством.*

В заключение отметим, что при выполнении соответствующих условий из следствия 5, $\mathrm{Unip}_{11}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и $\mathrm{Unip}_{12}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ являются делимыми группами, и значит, выделяются прямыми слагаемыми в группах $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ и $\mathrm{Unip}K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ в силу хорошо известного результата из теории абелевых групп (см., например, [6], гл.3).

Список литературы

1. В. И. Копейко, *Нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа унитарного кольца.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 134–157.
2. H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York (1968).
3. C. Weibel, *Meyer–Vietoris sequences and module structures on NK_*.* — Lect. Notes Math. **845** (1981), 466–493.
4. A. Bak, *K-theory of forms.* — Annals Math. Studies, Princeton university press, Princeton **98** (1981).
5. H. Bass, *Unitary algebraic K-theory.* — Lect. Notes Math. **343** (1973), 57–265.

6. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп.* 3-е изд. М., Наука (1982).

Kopeiko V. I. On unitary nil K_1-groups.

Nil subgroups of the unitary Bass' nilpotent K_1-group of the unitary ring are introduced and properties of these nil groups are proved. These properties are unitary analogies of well-known properties of the Bass' nilpotent K_1-group of ring.

Калмыцкий государственный
университет им. Б. Б. Городовикова
ул. Пушкина, 11, 358000 Элиста, Россия
E-mail: kopeiko52@mail.ru

Поступило 18 марта 2022 г.