Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

М. А. Качалова

АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА

§1. Введение

Настоящая работа продолжает серию статей, посвящённых исследованию когомологий Хохшильда алгебр диэдрального типа (см. [1–9]). Мы вычисляем структуру кольца когомологий Хохшильда для одной серии алгебр диэдрального типа из классификации К. Эрдман [10], а именно, для серии исключительных локальных алгебр, появляющихся в случае, когда основное (алгебраически замкнутое) поле имеет характеристику 2.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $d \in \{0, 1\}$. Рассмотрим K-алгебру

$$S_{k,d} = K\langle X, Y\rangle/I,$$

где $K\langle X, Y\rangle$ – кольцо многочленов от двух некоммутирующих переменных, а I – двусторонний идеал, порождённый элементами

$$X^2 - (XY)^k,\ Y^2 - d(XY)^k,\ (XY)^k - (YX)^k,\ Y(XY)^k,\ X(YX)^k.$$

Для $S_{k,0}$ когомологии Хохшильда были вычислены в [11]. В данной статье мы работаем с алгеброй $S_{k,1}$. Положим $S_k = S_{k,1}$. Опишем структуру кольца когомологий Хохшильда для алгебр S_k.

Для нахождения матриц трансляций и проверки соотношений мы написали программу, исходный код которой доступен по ссылке `https://github.com/pigmasha/loc11`

§2. Формулировка основного результата

Пусть

$$\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \cup \mathcal{X}_1 \cup \{u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \cup \mathcal{X}_2 \cup \{t\},$$

где

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \{u_1\}, & \text{если } k \text{ чётно}, \\ \{u_1'\}, & \text{если } k \text{ нечётно}, \end{cases} \qquad \mathcal{X}_2 = \begin{cases} \{w_1, w_2\}, & \text{если } k \text{ чётно}, \\ \{w_1', w_2'\}, & \text{если } k \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, алгебры диэдрального типа.

На алгебре $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку так, что

$$\begin{aligned}
&\deg p_i = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4),\\
&\deg u_1 = \deg u_1' = \deg u_i = 1 \ (i = 2, 3, 4),\\
&\deg v_i = 2 \ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),\\
&\deg w_1 = \deg w_2 = \deg w_1' = \deg w_2' = 3,\\
&\deg t = 4.
\end{aligned}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где идеал I алгебры $K[\mathcal{X}]$ порождён следующими элементами:
– степени 0:

$$p_1^k,\ p_i^2\ (i \in \{2, 3, 4\});\ p_ip_j\ (i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j);$$

– степени 1:

$$p_1u_2,\ p_4u_2,\ p_iu_3,\ p_iu_4\ (i \in \{1, 2, 3, 4\});$$

– степени 1, если k чётно:

$$p_2u_1,\ p_4u_1,\ p_3u_1 + p_3u_2;$$

– степени 1, если k нечётно:

$$p_1^{k-1}u_1',\ p_iu_1'\ (i \in \{2, 3, 4\});$$

– степени 2:

$$u_2^2 + p_4(v_1 + v_2),\ u_3^2,\ u_4^2,\ u_2u_3 + p_4v_1,\ u_2u_4 + p_4v_2,\ u_3u_4;$$
$$p_iv_1,\ p_iv_2\ (i \in \{1, 2, 3\});\ p_1v_3,\ p_2v_3,\ p_3v_3 + p_4v_1,\ p_4v_3;$$
$$p_2v_4 + p_4v_2,\ p_iv_4\ (i \in \{1, 3, 4\});$$
$$p_1^{k-1}v_5 + p_4(v_1 + v_2),\ p_iv_5\ (i \in \{2, 3, 4\});\ p_iv_6\ (i \in \{1, 2, 3, 4\});$$

– степени 2, если k чётно:

$$u_1u_4,\ u_1u_2 + p_4v_1,\ u_1u_3 + p_4v_1,\ u_1^2 + (\tfrac{k}{2} + 1)p_4v_1 + \tfrac{k}{2}p_4v_2;$$

– степени 2, если k нечётно:

$$(u_1')^2,\ u_1'u_i\ (i \in \{2, 3, 4\}),\ p_4(v_1 + v_2);$$

– степени 3:

$$u_2(v_1 + v_2),\ u_2v_5,\ u_2v_6,\ u_3v_i\ (i \in \{2, 3, 4, 5, 6\});\ u_4v_i\ (i \in \{1, 3, 4, 5, 6\});$$

– степени 3, если k чётно:

$$(u_1 + u_2)v_1,\ u_1v_2,\ (u_1 + u_2)v_3,\ u_1v_4,\ u_1v_6,$$
$$p_1w_1 + u_1v_5,\ p_2w_1,\ p_3w_1 + u_2v_3,\ p_4w_1,$$

$$p_1w_2 + u_1v_5,\ p_2w_2 + u_2v_4,\ p_3w_2,\ p_4w_2;$$

– степени 3, если k нечётно:

$$u_1'v_i\ (i \in \{1,2,3,4,6\});\ u_1'v_5 + p_1^2w_1',\ p_2w_1',\ p_3w_1' + u_2v_3,\ p_4w_1',$$

$$p_1(w_1' + w_2'),\ p_2w_2' + u_2v_4,\ p_3w_2',\ p_4w_2';$$

– степени 4:

$$v_iv_j\ (i,j \in \{1,2,3,4,5\},\ i \neq j);\ v_3^2,\ v_4^2,\ v_5^2 + p_1^2t,\ v_iv_6\ (i \in \{3,4,5,6\});$$

– степени 4, если k чётно:

$$u_1w_1,\ u_1w_2,\ u_2w_1,\ u_2w_2,\ u_3w_1 + v_1v_6,\ u_3w_2,\ u_4w_1,\ u_4w_2 + v_2v_6;$$

– степени 4, если k нечётно:

$$u_1'w_1',\ u_1'w_2',\ u_2w_1' + p_4t,\ u_2w_2' + p_4t,\ u_3w_1' + v_1v_6,\ u_3w_2',\ u_4w_1',\ u_4w_2' + v_2v_6;$$

– степени 5, если k чётно:

$$v_2w_1,\ v_3w_1 + p_3u_2t,\ v_4w_1,\ v_5w_1 + p_1u_1t,\ v_6w_1,$$

$$v_1w_2,\ v_3w_2,\ v_4w_2 + p_2u_2t,\ v_5w_2 + p_1u_1t,\ v_6w_2;$$

– степени 5, если k нечётно:

$$v_2w_1' + u_4t,\ v_3w_1',\ v_4w_1' + p_2u_2t,\ v_5w_1' + u_1't,\ v_6w_1',$$

$$v_1w_2' + u_3t,\ v_3w_2' + p_3u_2t,\ v_4w_2',\ v_5w_2' + u_1't,\ v_6w_2';$$

– степени 6, если k чётно:

$$w_1^2 + u_1^2t,\ w_2^2 + (u_1^2 + u_2^2)t,\ w_1w_2 + \tfrac{k}{2}p_4(v_1 + v_2)t;$$

– степени 6, если k нечётно:

$$(w_1')^2 + p_4v_1t,\ (w_2')^2 + p_4v_1t,\ w_1'w_2' + (p_4v_1 + v_6)t.$$

На алгебре $\mathcal{A}$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K[\mathcal{X}]$.

Теорема 1. *Пусть $R = S_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ изоморфна алгебре $\mathcal{A}$ как градуированная K-алгебра.*

§3. Бимодульная резольвента

Замечание 1. Большую помощь в формулировке гипотезы о том, как выглядит бимодульная резольвента, оказало описание резольвенты в [11]. А именно, у матриц дифференциалов чётной степени нечётные колонки совпадают с дифференциалами из [11]. У матриц дифференциалов нечётной степени первая и чётные колонки совпадают с дифференциалами из [11]. Недостающие колонки получаются из соображений симметрии.

Пусть $\Lambda = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – обёртывающая алгебра алгебры R,

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\eta} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \cdots \longleftarrow Q_n \xleftarrow{d_n} \cdots$$

– минимальная Λ-проективная резольвента модуля ${}_\Lambda R$.

Обозначим через x и y образы X и Y при естественном эпиморфизме $K\langle X, Y\rangle \to R$. Введём дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} z_x &= x(yx)^{k-1}, & z_y &= y(xy)^{k-1},\\ w_x &= (xy)^{k-1}, & w_y &= (yx)^{k-1},\\ \widetilde{x} &= x + z_y, & \widetilde{y} &= y + z_x, \end{aligned}$$

$$\text{для } r \in R \qquad \Delta r = \Delta(r) = r \otimes 1 + 1 \otimes r;$$

кроме того,

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^{k-1-i} x \otimes (xy)^i, & L_y &= \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^{k-1-i} y \otimes (yx)^i,\\ R_x &= \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^{k-1-i} \otimes x(yx)^i, & R_y &= \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^{k-1-i} \otimes y(xy)^i. \end{aligned}$$

Опишем матрицы дифференциалов $d_0, d_1, \ldots, d_7$:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} L_y + R_y & \Delta x + L_y & R_y \\ L_x + R_x & R_x & \Delta y + L_x \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} \Delta x + y \otimes w_x & \Delta y + x \otimes w_y & 1 \otimes x & 1 \otimes y \\ \Delta(z_y) & w_x \otimes z_y & \Delta x & 0 \\ w_y \otimes z_x & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} L_y + R_y & \Delta(\widetilde{x}) & v_3^y & u_3^x & 1 \otimes z_y + R_y \\ L_x + R_x & v_3^x & \Delta(\widetilde{y}) & 1 \otimes z_x + R_x & u_3^y \\ 0 & \Delta(z_y) & 0 & \widetilde{x} \otimes 1 + 1 \otimes x & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \widetilde{y} \otimes 1 + 1 \otimes y \end{pmatrix},$$

где

$$
\begin{gathered}
v_3^x = 1\otimes z_x + x\otimes w_x, \quad v_3^y = 1\otimes z_y + y\otimes w_y,\\
u_3^x = 1\otimes x + L_y + z_y\otimes 1, \quad u_3^y = 1\otimes y + L_x + z_x\otimes 1;
\end{gathered}
$$

$$
d_4 = \begin{pmatrix}
\Delta x & \Delta y & y\otimes w_x & x\otimes w_y & 1\otimes x & 1\otimes y\\
\Delta(z_y) & w_x\otimes z_y & x\otimes 1 + 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0\\
w_y\otimes z_x & \Delta(z_x) & 0 & y\otimes 1 + 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y\\
0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0\\
0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y
\end{pmatrix},
$$

$$
d_5 = \begin{pmatrix}
L_y + R_y & \Delta x + L_y & R_y & u_5^y & v_5^y & u_3^x & 1\otimes z_y + R_y\\
L_x + R_x & R_x & \Delta y + L_x & v_5^x & u_5^x & 1\otimes z_x + R_x & u_3^y\\
0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1\otimes x & 0\\
0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta(\widetilde{y}) & 0 & 1\otimes y\\
0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \widetilde{x}\otimes 1 + 1\otimes x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \widetilde{y}\otimes 1 + 1\otimes y
\end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{gathered}
v_5^x = 1\otimes z_x + x\otimes w_x + R_x, \quad v_5^y = 1\otimes z_y + y\otimes w_y + R_y,\\
u_5^x = L_x + \Delta(z_x), \quad u_5^y = L_y + \Delta(z_y);
\end{gathered}
$$

$$
d_6 = \begin{pmatrix}
\Delta x + y\otimes w_x & \Delta y + x\otimes w_y & v_6^x & v_6^y & v_6^x & v_6^y & 1\otimes x & 1\otimes y\\
\Delta(z_y) & w_x\otimes z_y & \Delta x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0\\
w_y\otimes z_x & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y\\
0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_6^x & 0 & 1\otimes x & 0\\
0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & u_6^y & 0 & 1\otimes y\\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y
\end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{gathered}
v_6^x = 1\otimes x + y\otimes w_x, \quad v_6^y = 1\otimes y + x\otimes w_y,\\
u_6^x = x\otimes 1 + 1\otimes\widetilde{x}, \quad u_6^y = y\otimes 1 + 1\otimes\widetilde{y};
\end{gathered}
$$

$$
d_7 = \begin{pmatrix}
L_y + R_y & \Delta(\widetilde{x}) & v_3^y & 1\otimes\widetilde{x} & y\otimes w_y & 1\otimes\widetilde{x} & y\otimes w_y & u_3^x & v_7^y\\
L_x + R_x & v_3^x & \Delta(\widetilde{y}) & x\otimes w_x & 1\otimes\widetilde{y} & x\otimes w_x & 1\otimes\widetilde{y} & v_7^x & u_3^y\\
0 & \Delta(z_y) & 0 & u_7^x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0\\
0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & u_7^y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y\\
0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1\otimes x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta(\widetilde{y}) & 0 & 1\otimes y\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_7^x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & u_7^y
\end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{gathered}
v_7^x = 1\otimes z_x + R_x, \quad v_7^y = 1\otimes z_y + R_y,\\
u_7^x = \widetilde{x}\otimes 1 + 1\otimes x, \quad u_7^y = \widetilde{y}\otimes 1 + 1\otimes y;
\end{gathered}
$$

Опишем блоки, из которых будем строить матрицы дифференциалов бимодульной резольвенты:

$$A_0 = \begin{pmatrix} u_6^x & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & u_6^y & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_6^x & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & u_6^y & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta y \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & \Delta(\widetilde{y}) & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ \Delta(z_y) & 0 & u_7^x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & \Delta(z_x) & 0 & u_7^y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta(\widetilde{x}) & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & \Delta(\widetilde{y}) & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_y) & 0 & u_7^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta(z_x) & 0 & u_7^y \end{pmatrix},$$

$$l_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y\otimes w_x & x\otimes w_y & 1\otimes x & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^y & v_5^y & u_3^x & v_7^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^x & u_5^x & v_7^x & u_3^y \end{pmatrix},$$

$$l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y\otimes w_x & x\otimes w_y & v_6^x & v_6^y & 1\otimes x & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_5^y & v_5^y & 1\otimes\widetilde{x} & y\otimes w_y & u_3^x & v_7^y \\ 0 & 0 & v_5^x & u_5^x & x\otimes w_x & 1\otimes\widetilde{y} & v_7^x & u_3^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_4 = \begin{pmatrix} y\otimes w_x & x\otimes w_y & 1\otimes x & 1\otimes y & y\otimes w_x & x\otimes w_y & 1\otimes x & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_5 = \begin{pmatrix} u_5^y & v_5^y & u_3^x & v_7^y & u_5^y & v_5^y & u_3^x & v_7^y \\ v_5^x & u_5^x & v_7^x & u_3^y & v_5^x & u_5^x & v_7^x & u_3^y \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_6 = \begin{pmatrix} v_6^x & v_6^y & v_6^x & v_6^y & v_6^x & v_6^y & 1\otimes x & 1\otimes y \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes \widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes \widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_6^L = \begin{pmatrix} 0 \;\dots\; 0 & y\otimes w_x & x\otimes w_y \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \;\dots\; 0}_{6\ \text{штук}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{l}_6^L = \begin{pmatrix} 0 \;\dots\; 0 & y\otimes w_x & x\otimes w_y \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \;\dots\; 0}_{6\ \text{штук}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$l_7 = \begin{pmatrix} 1\otimes \widetilde{x} & y\otimes w_y & 1\otimes \widetilde{x} & y\otimes w_y & 1\otimes \widetilde{x} & y\otimes w_y & u_3^x & v_7^y \\ x\otimes w_x & 1\otimes \widetilde{y} & x\otimes w_x & 1\otimes \widetilde{y} & x\otimes w_x & 1\otimes \widetilde{y} & v_7^x & u_3^y \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes \widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes \widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$l_7^L = \begin{pmatrix} 0\ \dots\ 0 & L_y+\Delta(z_y) & 1\otimes z_y + y\otimes w_y + R_y \\ 0\ \dots\ 0 & 1\otimes z_x + x\otimes w_x + R_x & L_x+\Delta(z_x) \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{6\ \text{штук}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{l}_7^L = \begin{pmatrix} 0\ \dots\ 0 & L_y+\Delta(z_y) & 1\otimes z_y + y\otimes w_y + R_y \\ 0\ \dots\ 0 & 1\otimes z_x + x\otimes w_x + R_x & L_x+\Delta(z_x) \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{7\ \text{штук}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$B^L = \begin{pmatrix} 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes\widetilde{x} & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes\widetilde{y} & 0 & 1\otimes y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_y & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \Delta(z_y) & w_x \otimes z_y \\ w_y \otimes z_x & \Delta(z_x) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & \Delta(z_y) & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & \Delta(z_x) \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \ldots 0}_{i \text{ штук}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также введём $l_i^L = O_{8,i+1}$, $\widetilde{l}_i^L = O_{i+2,i+1}$ $(i = 0, \ldots, 5)$, где $O_{n,m}$ обозначает матрицу, состоящую из нулей и имеющую n строк и m столбцов. Кроме того, положим $P = P_6$, $A_2 = A_4 = A_6 = A_0$, $A_3 = A_5 = A_7 = A_1$.

Для $n \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant n$ символ $\binom{n}{j}$ обозначает биномиальный коэффициент.

Теорема 2. *Сохраняя предыдущие обозначения, рассмотрим последовательность*

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\eta} \Lambda \xleftarrow{d_0} \Lambda^2 \xleftarrow{d_1} \cdots \longleftarrow \Lambda^t \xleftarrow{d_{t-1}} \cdots, \tag{1}$$

в которой $\eta(a \otimes b) = ab$, *а при* $n \geqslant 0$, $0 \leqslant m \leqslant 7$ *матрица гомоморфизма* d_{8n+m} *имеет блочную структуру вида*

$$\begin{pmatrix}
d_m + n\tilde{l}_m^L & \binom{n}{n-1} l_m + \binom{n}{n-2} l_m^L & \binom{n}{n-2} l_m + \binom{n}{n-3} l_m^L & \dots & \dots & \binom{n}{1} l_m + l_m^L & l_m \\
P_m & A_m + \binom{n-1}{n-2} B^L & \binom{n-1}{n-2} B + \binom{n-1}{n-3} B^L & \dots & \dots & \binom{n-1}{1} B + B^L & B \\
0 & P & A_m + \binom{n-2}{n-3} B^L & \dots & \dots & \binom{n-2}{1} B + B^L & B \\
0 & 0 & P & \dots & \dots & \dots & B \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & B^L & B \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & P & A_m + B^L & B \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P & A_m
\end{pmatrix}.$$

Тогда последовательность (1) *является минимальной проективной резольвентой модуля* ${}_{\Lambda}R$.

Для доказательства теоремы 2 опишем минимальную проективную резольвенту единственного простого R-модуля ${}_{R}K$.

Лемма 3. *Минимальной проективной резольвентой единственного простого* R*-модуля* ${}_{R}K$ *является комплекс*

$$0 \longleftarrow K \xleftarrow{\varepsilon} R \xleftarrow{\partial_0} R^2 \xleftarrow{\partial_1} \ldots \longleftarrow R^n \xleftarrow{\partial_{n-1}} \cdots,$$

где ε *— пополняющее отображение, а для* $m \geqslant 0$

$$\partial_{2m} = \begin{pmatrix}
x & y & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
z_y & 0 & x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & z_x & 0 & y & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & z_y & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_x & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 & x & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & z_x & 0 & y
\end{pmatrix} : R^{2m+2} \longrightarrow R^{2m+1},$$

$$\partial_{2m+1} = \begin{pmatrix} z_y & \widetilde{x} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ z_x & 0 & \widetilde{y} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_y & 0 & \widetilde{x} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_x & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_y & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 & \widetilde{x} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & z_x & 0 & \widetilde{y} \end{pmatrix} : R^{2m+3} \longrightarrow R^{2m+2}.$$

Доказательство. Доказательство состоит из прямой проверки точности указанной последовательности и не представляет труда. $\square$

Доказательство теоремы 2. Как показано в [12], для доказательства точности последовательности (1) достаточно проверить, что $\eta d_0 = 0$ и $d_r d_{r+1} = 0$ $(r \geqslant 0)$. Первое равенство очевидно. Для проверки второго нужно вычислить все произведения матриц поблочно. Найдём произведение первой строки d_{8n+m} и первого столбца d_{8n+m+1} для $0 \leqslant m \leqslant 6$ (остальные произведения вычисляются аналогично):

$$(d_m + n\widetilde{l}_m^L)(d_{m+1} + n\widetilde{l}_{m+1}^L) + (\tbinom{n}{n-1} l_m + \tbinom{n}{n-2} l_m^L) P_{m+1} =$$
$$d_m d_{m+1} + n(\widetilde{l}_m^L d_{m+1} + d_m \widetilde{l}_{m+1}^L + l_m P_{m+1}) + n^2 \widetilde{l}_m^L \widetilde{l}_{m+1}^L + \tbinom{n}{n-2} l_m^L P_{m+1}.$$

Последняя сумма равна нулю, поскольку $d_m d_{m+1} = \widetilde{l}_m^L d_{m+1} + d_m \widetilde{l}_{m+1}^L + l_m P_{m+1} = \widetilde{l}_m^L \widetilde{l}_{m+1}^L = l_m^L P_{m+1} = 0$. $\square$

§4. Аддитивная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Предложение 4 (Размерности групп кограниц)**.** *Пусть*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^2, R) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^3, R) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

– комплекс, полученный применением функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, R)$ *к минимальной проективной бимодульной резольвенте* (1) *алгебры* R*. Тогда*

(а) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^0 = 3k-3$;

(б) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k-2, & \textit{если } k \textit{ чётно}, \\ 4k-1, & \textit{если } k \textit{ нечётно}; \end{cases}$

(в) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^2 = 7k-4$;

(г) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = 8k-2$;

(д) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^q - \dim_K \operatorname{Im}\delta^{q-4} = 8k-2$ *при* $q \geqslant 4$.

Доказательство. Опишем K-базисы пространств $\operatorname{Im}\delta^q$ $(0 \leqslant q \leqslant 3)$.

Базис $\operatorname{Im}\delta^0$:

$$\begin{array}{l} ((xy)^i + (yx)^i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, (xy)^i + (yx)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (x(yx)^i, y(xy)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1. \end{array}$$

Базис $\operatorname{Im}\delta^1$, если k чётно:

$$\begin{array}{l} (0, (xy)^i + (yx)^i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, (xy)^i + (yx)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, x(yx)^i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, y(xy)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, z_x),\ (0, z_y, 0). \end{array}$$

Для описания базиса $\operatorname{Im}\delta^1$ при нечётном k нужно добавить к предыдущему базису элемент $(0, x^2, x^2)$.

Базис $\operatorname{Im}\delta^2$:

$$\begin{array}{l} (0, 0, (xy)^i + (yx)^i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, 0, (xy)^i + (yx)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, x(yx)^i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, 0, y(xy)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (x(yx)^i, y(xy)^i, 0, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ ((xy)^i + (yx)^i, 0, (yx)^i, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, (xy)^i + (yx)^i, 0, (xy)^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ (0, 0, x^2, 0),\ (0, 0, 0, x^2),\ (z_y, z_x, x, y). \end{array}$$

Базис $\mathrm{Im}\delta^3$:

$$
\begin{array}{l}
(0,0,0,(xy)^i+(yx)^i,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,0,0,0,(xy)^i+(yx)^i),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,x(yx)^i,0,0,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,0,y(xy)^i,0,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,0,0,x(yx)^i,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,0,0,0,y(xy)^i),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,(xy)^i+(yx)^i,0,(yx)^i,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,0,(xy)^i+(yx)^i,0,(xy)^i),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(0,0,0,z_y,0),\ (0,0,0,0,z_x),\\
(0,0,0,x^2,0),\ (0,0,0,0,x^2),\\
(0,0,0,x,0),\ (0,0,0,0,y).
\end{array}
$$

Опишем базисы пространств $\mathrm{Im}\delta^q$ $(q>3)$. Пусть $q=4m+q_0$ $(0\leqslant q_0\leqslant 3)$. Введём множество образующих $\mathcal{G}_n$ $(n\in\mathbb{N})$, состоящее из элементов

$$
\begin{array}{l}
(O_n,0,0,(xy)^i+(yx)^i,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,0,0,0,(xy)^i+(yx)^i),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,x(yx)^i,0,0,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,0,y(xy)^i,0,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,0,0,x(yx)^i,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,0,0,0,y(xy)^i),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,(xy)^i+(yx)^i,0,(yx)^i,0),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,0,(xy)^i+(yx)^i,0,(xy)^i),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
(O_n,0,0,x^2,0),\ (O_n,0,0,0,x^2),
\end{array}
$$

где O_n обозначает последовательность, состоящую из n нулей. Заметим, что мощность множества $\mathcal{G}_n$ равна $8k-6$. Введём множества

$$
\begin{array}{rll}
\mathcal{G}_n^{(1)}=\mathcal{G}_n\cup\{ & (O_n,x^2,0,0,0),\ (O_n,0,x^2,0,0), & \\
 & (O_n,z_y,0,x,0),\ (O_n,0,z_x,0,y) & \},\\
\mathcal{G}_n^{(2)}=\mathcal{G}_n\cup\{ & (O_n,x^2,0,0,0),\ (O_n,0,x^2,0,0), & \\
 & (O_n,z_y,0,x+z_y,0),\ (O_n,0,z_x,0,y+z_x) & \},\\
\mathcal{G}_n^{(3)}=\mathcal{G}_n\cup\{ & (O_n,0,0,x,0),\ (O_n,0,0,0,y), & \\
 & (O_n,0,0,z_y,0),\ (O_n,0,0,0,z_x) & \}.
\end{array}
$$

Также будем говорить, что элемент базиса $\mathrm{Im}\delta^q$ имеет префикс $(g_1,\ldots,g_n)$, если его первые n элементов совпадают с $g_1,\ldots,g_n$.

Для нечётного q базис $\mathrm{Im}\delta^q$ состоит из элементов с префиксами из $\mathrm{Im}\delta_0^q$, а также из $\mathcal{G}^{(3)}_{q_0+4n+2}$ $(0\leqslant n<m)$.

Для чётного q базис $\mathrm{Im}\delta^q$ состоит из следующих элементов:

(1) элементы с префиксами из $\mathrm{Im}\delta_0^q$, если $q \not\equiv 6(\mathrm{mod}\ 8)$; для случая $q \equiv 6(\mathrm{mod}\ 8)$ множество префиксов получается из $\mathrm{Im}\delta_0^q$ заменой последнего элемента на $(z_y, z_x, x + z_y, y + z_x)$;

(2) для чётного m: элементы с префиксами из $\mathcal{G}^{(2)}_{q_0+8n+2}$, $\mathcal{G}^{(1)}_{q_0+8n+6}$ $(0 \leqslant n < \frac{m}{2})$; для нечётного m: элементы с префиксами из $\mathcal{G}^{(1)}_{q_0+8n+2}$ $(0 \leqslant n \leqslant \frac{m-1}{2})$, $\mathcal{G}^{(2)}_{q_0+8n+6}$ $(0 \leqslant n \leqslant \frac{m-3}{2})$. □

Теорема 5 (Аддитивная структура)**.**

(а) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + 3$,

(б) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+5, & \textit{если } k \textit{ чётно},\\ k+4, & \textit{если } k \textit{ нечётно}, \end{cases}$

(в) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \dim_K \mathrm{HH}^1(R) + 1$,

(г) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k + 6$;

(д) $\dim_K \mathrm{HH}^q(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{q-4}(R) = 4$ *при* $q \geqslant 4$.

Доказательство. Размерности групп когомологий вычисляются по формуле

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\delta^n - \dim_K \mathrm{Im}\delta^{n-1},$$

где размерности групп кограниц описаны в предыдущем предложении, а размерности ядер получаются из формулы

$$\dim_K \mathrm{Ker}\delta^n + \dim_K \mathrm{Im}\delta^n = \dim_K R^{n+1} = 4k(n+1).$$ □

§5. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Опишем образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0:

$$p_1 = (xy + yx),\ p_2 = (z_x),\ p_3 = (z_y),\ p_4 = (x^2);$$

– степени 1, если k чётно:

$$u_1 = (x, 0);$$

– степени 1, если k нечётно:

$$u_1' = (xyx, 0);$$

– степени 1:

$$u_2 = (x, y),\ u_3 = (z_y, 0),\ u_4 = (0, z_x);$$

– степени 2:

$$v_1 = (0,1,0),\ v_2 = (0,0,1),\ v_3 = (0,x,0),\ v_4 = (0,0,y),$$

$$v_5 = (xy+yx, xy, xy),\ v_6 = (x^2,0,0);$$

– степени 3, если k чётно:

$$w_1 = (x,0,0,y),\ w_2 = (0,y,x,0);$$

– степени 3, если k нечётно:

$$w'_1 = (x,0,x,0),\ w'_2 = (0,y,0,y);$$

– степени 4:

$$t = (1,1,1,0,0).$$

§6. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R. Тогда $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(R,R)$ вычисляется как когомологии комплекса $(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet,R),\Delta)$, где Δ индуцируется дифференциалом d_Q резольвенты. Любой коцикл $f : Q_n \to R$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{n+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём i-й трансляцией коцикла f и будем обозначать $T^i(f)$. Для коциклов $f \in \ker\Delta^n$ и $g \in \ker\Delta^m$ имеем $\mathrm{cl}\,g\cdot\mathrm{cl}f = \mathrm{cl}(T^0(g)T^m(f))$. Опишем трансляции для образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ ненулевой степени.

Введём дополнительные обозначения:

$$M_x^{(j_1,j_2,m)} = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor - m}(xy)^{2i+j_1}\otimes(yx)^{k-2i-j_2},$$

$$M_y^{(j_1,j_2,m)} = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor - m}(yx)^{2i+j_1}\otimes(xy)^{k-2i-j_2},$$

$$M_{x,l}^{(j_1,j_2,m)} = M_x^{(j_1,j_2,m)}\cdot y\otimes 1,\quad M_{x,r}^{(j_1,j_2,m)} = M_x^{(j_1,j_2,m)}\cdot 1\otimes y,$$

$$M_{y,l}^{(j_1,j_2,m)} = M_y^{(j_1,j_2,m)}\cdot x\otimes 1,\quad M_{y,r}^{(j_1,j_2,m)} = M_y^{(j_1,j_2,m)}\cdot 1\otimes x,$$

$$M_x^{(j_1,j_2)} = M_x^{(j_1,j_2,-1)},\quad M_y^{(j_1,j_2)} = M_y^{(j_1,j_2,-1)}.$$

Замечание 2. Нумерация строк и столбцов в матрицах трансляций всюду начинается с нуля.

Лемма 6. *Для образующей u_1 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(u_1) = \begin{pmatrix} x\otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T^1(u_1) = \begin{pmatrix} M_x^{(0,1)}\cdot \Delta y & 1\otimes x + M_{x,l}^{(0,1)} & M_{x,r}^{(1,2)} \\ M_y^{(0,2)}\cdot \Delta(xyx) & M_{y,r}^{(0,1)} & M_{y,l}^{(0,1)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 7. *Для образующей u_1' в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(u_1') = \begin{pmatrix} xyx\otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T^1(u_1') = \begin{pmatrix} M_x^{(2,2)}\cdot \Delta y & xyx\otimes 1 + M_{x,l}^{(2,2)} & M_{x,r}^{(2,2)} \\ M_{y,r}^{(2,2)} + M_{y,l}^{(1,1)} & M_{y,r}^{(2,2)} & M_{y,l}^{(1,1)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 8. *Для образующей u_2 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(u_2) = \begin{pmatrix} x\otimes 1 & y\otimes 1 \end{pmatrix},$$
$$T^1(u_2) = \begin{pmatrix} M_x' & 1\otimes x & M_x' \\ M_y' & M_y' & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

где

$$M_x' = \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-1}, \quad M_y' = \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-i-1}.$$

Лемма 9. *Для образующей u_3 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(u_3) = \begin{pmatrix} z_y\otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T^1(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & z_y\otimes 1 & 0 \\ z_y\otimes w_x & 0 & z_y\otimes w_x \end{pmatrix}.$$

Лемма 10. *Для образующей u_4 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & z_x\otimes 1 \end{pmatrix},$$
$$T^1(u_4) = \begin{pmatrix} z_x\otimes w_y & z_x\otimes w_y & 0 \\ 0 & 0 & z_x\otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 11. *Для образующей v_1 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1\otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{2n+1}(v_1) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 1\otimes 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M_2 + 1\otimes w_x & w_x\otimes w_x & \binom{n}{1}1\otimes w_x & 0 & \binom{n}{2}1\otimes w_x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{2n}(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1\otimes 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\otimes 1 & 0 & \dots & 0 \\ w_y\otimes w_x & \binom{n}{1}w_y\otimes w_x & w_y\otimes w_x & \binom{n}{2}w_y\otimes w_x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$M_1 = \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-2}, \quad M_2 = \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^{i+1} \otimes (xy)^{k-i-2}.$$

Более подробно, матрица $(2n+1)$-й трансляции имеет следующие ненулевые элементы $t_{i,j}$:

$$t_{0,0} = M_1,\ t_{1,0} = M_2 + 1\otimes w_x,\ ,t_{1,1} = w_x\otimes w_x,$$

$$t_{2i,2(i+1)} = 1\otimes 1\ (i = 0\dots n),\ t_{1,2i} = \tbinom{n}{i}1\otimes w_x\ (i = 1\dots n).$$

Матрица $2n$-й трансляции имеет следующие ненулевые элементы $t_{i,j}$:

$$t_{0,1} = t_{2i-1,2i+1} = 1\otimes 1\ (i = 1\dots n),$$

$$t_{2,0} = t_{2,2} = w_y\otimes w_x,\ t_{2,2i-1} = \tbinom{n}{i}w_y\otimes w_x\ (i = 1\dots n).$$

Лемма 12. *Для образующей v_2 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\otimes 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{2n+1}(v_2) = \begin{pmatrix} w_y\otimes w_y & M_1 + 1\otimes w_y & 0 & \binom{n}{1}1\otimes w_y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 1\otimes 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\otimes 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{2n}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\otimes 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_x\otimes w_y & w_x\otimes w_y & \binom{n}{1}w_x\otimes w_y & 0 & \binom{n}{2}w_x\otimes w_y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\otimes 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\otimes 1 \end{pmatrix},$$

где

$$M_1 = \sum_{i=0}^{k-2}(xy)^{i+1}\otimes(yx)^{k-i-2}, \quad M_2 = \sum_{i=0}^{k-2}x(yx)^i\otimes x(yx)^{k-i-2}.$$

Более подробно, матрица $(2n+1)$-й трансляции имеет следующие ненулевые элементы $t_{i,j}$:

$$t_{0,0} = w_y\otimes w_y,\ t_{0,1} = M_1 + 1\otimes w_y,\ t_{1,1} = M_2,$$

$$t_{2i+1,2i+3} = 1\otimes 1\ (i = 0\dots n),\ t_{0,2i+1} = \tbinom{n}{i}1\otimes w_y\ (i = 1\dots n).$$

Матрица $2n$-й трансляции имеет следующие ненулевые элементы $t_{i,j}$:

$$t_{2i,2(i+1)} = 1\otimes 1\ (i = 0\dots n),$$

$$t_{1,0} = t_{1,1} = w_x\otimes w_y,\ t_{1,2i} = \tbinom{n}{i}w_x\otimes w_y\ (i = 1\dots n).$$

Лемма 13. *Для образующей v_3 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & x\otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^1(v_3) = \begin{pmatrix} 1\otimes z_y & w_x\otimes z_y & x\otimes 1 & 0 \\ \Delta y & w_x\otimes z_x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^2(v_3) = \begin{pmatrix} y\otimes w_y & x\otimes 1 & y\otimes w_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\otimes 1 & 0 \\ t_{2,0} & t_{2,1} & t_{2,2} & 1\otimes x + z_x\otimes w_y & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} t_{2,0} &= w_y \otimes y + y \otimes w_x + w_x \otimes z_x, \\ t_{2,1} &= \Delta x + w_y \otimes y + y \otimes w_x, \\ t_{2,2} &= w_y \otimes z_x + y \otimes w_x + w_x \otimes z_x. \end{aligned}$$

Лемма 14. *Для образующей v_4 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$\begin{aligned} T^0(v_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & y \otimes 1 \end{pmatrix}, \\ T^1(v_4) &= \begin{pmatrix} w_y \otimes z_y & \Delta x & 0 & 0 \\ w_y \otimes z_x & 1 \otimes z_x & 0 & y \otimes 1 \end{pmatrix}, \\ T^2(v_4) &= \begin{pmatrix} x \otimes w_x & x \otimes w_x & y \otimes 1 & 0 & 0 \\ t_{1,0} & t_{1,1} & t_{1,2} & 0 & 1 \otimes y + z_y \otimes w_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \otimes 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_{1,0} &= w_y \otimes x + w_x \otimes x + x \otimes w_y, \\ t_{1,1} &= w_y \otimes x + w_x \otimes z_y + x \otimes w_y, \\ t_{1,2} &= \Delta y + w_x \otimes x + x \otimes w_y. \end{aligned}$$

Лемма 15. *Для образующей v_5 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$\begin{aligned} T^0(v_5) &= \begin{pmatrix} xy \otimes 1 + yx \otimes 1 & xy \otimes 1 & xy \otimes 1 \end{pmatrix}, \\ T^1(v_5) &= \begin{pmatrix} xy \otimes 1 + y \otimes x + y \otimes z_y & xy \otimes w_y + x \otimes z_y & yx \otimes 1 & 0 \\ yx \otimes w_x + xy \otimes w_x & yx \otimes 1 + x \otimes y & 0 & yx \otimes 1 \end{pmatrix}, \\ T^2(v_5) &= \begin{pmatrix} x \otimes y + y \otimes x & 0 & 0 & 0 & x \otimes y \\ z_y \otimes z_x & y \otimes z_y & t_{1,2} & t_{1,3} & 0 \\ z_x \otimes z_y & x \otimes z_x + z_x \otimes z_y & 0 & 0 & z_x \otimes z_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= z_y \otimes z_x + y \otimes z_y, \\ t_{1,3} &= xy \otimes 1 + yx \otimes 1 + z_y \otimes z_x. \end{aligned}$$

Лемма 16. *Для образующей v_6 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(v_6) = \begin{pmatrix} x^2 \otimes 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^1(v_6) = \begin{pmatrix} x^2 \otimes 1 & 0 & x^2 \otimes 1 & 0 \\ 0 & x^2 \otimes 1 & 0 & x^2 \otimes 1 \end{pmatrix},$$

$$T^2(v_6) = \begin{pmatrix} x^2 \otimes 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \otimes 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 17. *Для образующей w_1 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(w_1) = \begin{pmatrix} x \otimes 1 & 0 & 0 & y \otimes 1 \end{pmatrix},$$

$$T^1(w_1) = \begin{pmatrix} M_x^{(0,1)} \cdot \Delta y & t_{0,1} & t_{0,2} & 1 \otimes x + M_{x,l}^{(0,1)} & M_{x,r}^{(2,3,2)} \\ M_y^{(0,2)} \cdot \Delta(xyx) & 0 & \Delta y & M_{y,r}^{(0,1)} & y \otimes 1 + M_{y,l}^{(1,2)} \end{pmatrix},$$

где

$$t_{0,1} = 1 \otimes x + 1 \otimes z_y, \quad t_{0,2} = 1 \otimes z_y + y \otimes w_y,$$

$$T^2(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \otimes x & 0 & z_y \otimes 1 & x \otimes w_y & 1 \otimes x & 0 \\ 1 \otimes z_y & w_x \otimes z_y & 1 \otimes x + 1 \otimes z_y & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ w_y \otimes z_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^3(w_1) = \begin{pmatrix} t_{0,0} & M_{x,l}^{(1,2,2)} & M_{x,r}^{(0,1)} & 1 \otimes x + M_{x,l}^{(1,2)} & t_{0,4} & t_{0,5} & M_{x,r}^{(2,3,2)} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & M_{y,l}^{(0,1)} & t_{1,3} & M_{y,l}^{(0,1)} & M_{y,r}^{(2,3,2)} & M_{y,l}^{(0,1)} \\ 0 & \Delta(z_y) + \Delta x & 0 & x \otimes 1 + \Delta(z_y) & 0 & 1 \otimes x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} t_{0,0} &= M_x^{(0,1)} \cdot \Delta y, & t_{0,4} &= y \otimes w_y + M_{x,r}^{(2,3,2)}, \\ t_{0,5} &= 1 \otimes x + M_{x,l}^{(1,2,2)}, & t_{1,0} &= M_y^{(0,2)} \cdot x \otimes x \cdot \Delta y, \\ t_{1,1} &= z_y \otimes w_x + M_{y,r}^{(0,1)}, & t_{1,3} &= z_y \otimes w_x + M_{y,r}^{(2,3,2)}. \end{aligned}$$

Лемма 18. *Для образующей w_2 в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & y \otimes 1 & x \otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^1(w_2) = \begin{pmatrix} M_x^{(0,2)} \cdot \Delta(yxy) & 0 & 0 & x \otimes 1 + M_{x,l}^{(1,2)} & M_{x,r}^{(0,1)} \\ M_y^{(0,1)} \cdot \Delta x & t_{1,1} & t_{1,2} & M_{y,r}^{(2,3,2)} & 1 \otimes y + M_{y,l}^{(0,1)} \end{pmatrix},$$

где

$$t_{1,1} = 1 \otimes z_x + x \otimes w_x + \Delta y, \quad t_{1,2} = 1 \otimes y + 1 \otimes z_x,$$

$$T^2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1\otimes y & 1\otimes x & z_x\otimes 1 & 1\otimes x & 1\otimes y \\ \Delta(z_y) & 0 & z_y\otimes 1 & 0 & 1\otimes x & 0 \\ t_{2,0} & 1\otimes z_x & t_{2,2} & 1\otimes y + 1\otimes z_x & 1\otimes x & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

где

$$t_{2,0} = w_y\otimes y + y\otimes w_x, \quad t_{2,2} = \Delta x + y\otimes w_x + w_y\otimes z_x,$$

$$T^3(w_2) = \begin{pmatrix} M_x^{(0,2)}\cdot\Delta(yxy) & M_{x,l}^{(1,2,2)} & t_{0,2} & M_{x,l}^{(0,1)} & t_{0,4} & M_{x,l}^{(1,2,2)} & M_{x,r}^{(2,3,2)} \\ M_y^{(1,2)}\cdot\Delta x & t_{1,1} & M_{y,l}^{(1,2,2)} & M_{y,r}^{(0,1)} & t_{1,4} & M_{y,r}^{(1,2,2)} & t_{1,6} \\ 0 & \Delta(z_y) & 0 & \Delta x & 0 & t_{2,5} & 0 \\ 0 & t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & w_y\otimes x & 1\otimes y \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} &t_{0,2} = w_x\otimes z_x + M_{x,r}^{(0,1)}, && t_{0,4} = w_x\otimes z_x + M_{x,r}^{(2,3,2)}, \\ &t_{1,1} = 1\otimes y + M_{y,r}^{(1,2,2)}, && t_{1,4} = 1\otimes y + M_{y,l}^{(1,2)}, \\ &t_{1,6} = 1\otimes y + M_{y,l}^{(1,2,2)}, && t_{2,5} = x\otimes 1 + z_y\otimes 1, \\ &t_{3,1} = \Delta y + x\otimes w_x + w_y\otimes x + 1\otimes z_x, && t_{3,2} = \Delta(z_x) + \Delta y, \\ &t_{3,3} = x\otimes w_x + 1\otimes z_x, && t_{3,4} = y\otimes 1 + \Delta(z_x). \end{aligned}$$

Лемма 19. *Для образующей w_1' в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$T^0(w_1') = \begin{pmatrix} x\otimes 1 & 0 & x\otimes 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^1(w_1') = \begin{pmatrix} M_x^{(1,2)}\cdot\Delta y & x\otimes 1 & t_{0,2} & M_{x,l}^{(1,2)} & M_{x,r}^{(2,3)} \\ M_{y,l}^{(0,1,0)} + M_{y,r}^{(1,2)} & 0 & 1\otimes z_x & M_{y,r}^{(1,2)} & M_{y,l}^{(1,2)} \end{pmatrix},$$

где

$$t_{0,2} = 1\otimes z_y + y\otimes w_y,$$

$$T^2(w_1') = \begin{pmatrix} x\otimes 1 & z_x\otimes 1 & x\otimes 1 & w_x\otimes x & 1\otimes x & 1\otimes y \\ 0 & 0 & x\otimes 1 & 0 & 1\otimes x & 0 \\ 0 & z_x\otimes 1 & 0 & 1\otimes z_x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^3(w_1') = \begin{pmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & M_{x,r}^{(1,2)} & M_{x,l}^{(1,2)} & t_{0,4} & t_{0,5} & w_x\otimes y + M_{x,r}^{(1,2)} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & M_{y,l}^{(0,1,0)} & M_{y,r}^{(1,2)} & t_{1,4} & M_{y,r}^{(2,3)} & 1\otimes y + M_{y,l}^{(0,1)} \\ 0 & 0 & 0 & t_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_x\otimes 1 & 0 & \Delta y & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} &t_{0,0} = M_x^{(1,2)}\cdot\Delta y + w_x\otimes z_x, && t_{0,1} = w_x\otimes z_x + x\otimes 1 + M_{x,l}^{(1,2)}, \\ &t_{0,4} = w_x\otimes z_x + z_y\otimes 1 + M_{x,r}^{(2,3,2)}, && t_{0,5} = 1\otimes x + M_{x,l}^{(0,1)}, \\ &t_{1,0} = M_{y,l}^{(0,1,0)} + M_{y,r}^{(1,2)}, && t_{1,1} = x\otimes w_x + M_{y,r}^{(1,2)}, \\ &t_{1,4} = y\otimes 1 + M_{y,l}^{(1,2)}, && t_{2,3} = x\otimes 1 + \Delta(z_y). \end{aligned}$$

Лемма 20. *Для образующей w_2' в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$
\begin{aligned}
T^0(w_2') &= \begin{pmatrix} 0 & y \otimes 1 & 0 & y \otimes 1 \end{pmatrix}, \\
T^1(w_2') &= \begin{pmatrix} M_{x,l}^{(0,1,0)} + M_{x,r}^{(1,2)} & 1 \otimes z_y & 0 & M_{x,l}^{(1,2)} & M_{x,r}^{(1,2)} \\ M_y^{(1,2)} \cdot \Delta x & t_{1,1} & y \otimes 1 & M_{y,r}^{(2,3)} & M_{y,l}^{(1,2)} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где

$$t_{1,1} = 1 \otimes z_x + x \otimes w_x,$$

$$
\begin{aligned}
T^2(w_2') &= \begin{pmatrix} z_y \otimes 1 & y \otimes 1 & w_y \otimes y & y \otimes 1 & 1 \otimes x & 1 \otimes y \\ z_y \otimes 1 & 0 & 1 \otimes z_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \otimes 1 & 0 & 1 \otimes y \end{pmatrix}, \\
T^3(w_2') &= \begin{pmatrix} t_{0,0} & M_{x,l}^{(0,1,0)} & t_{0,2} & t_{0,3} & M_{x,r}^{(2,3)} & 1 \otimes x + M_{x,l}^{(0,1)} & M_{x,r}^{(2,3)} \\ t_{1,0} & M_{y,r}^{(1,2)} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & w_y \otimes x + M_{y,r}^{(1,2)} & 1 \otimes y + M_{y,l}^{(0,1)} \\ 0 & z_y \otimes 1 & 0 & \Delta x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{3,4} & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
t_{0,0} &= M_{x,l}^{(0,1,0)} + M_{x,r}^{(1,2)}, & t_{0,2} &= y \otimes w_y + M_{x,r}^{(1,2)}, \\
t_{0,3} &= x \otimes 1 + M_{x,l}^{(1,2)}, & t_{1,0} &= M_y^{(1,2)} \cdot \Delta x + w_y \otimes z_y, \\
t_{1,2} &= y \otimes 1 + z_y \otimes w_x + M_{y,l}^{(1,2)}, & t_{1,3} &= z_x \otimes 1 + w_y \otimes z_y + M_{y,r}^{(2,3,2)}, \\
t_{1,4} &= 1 \otimes y + M_{y,l}^{(0,1)}, & t_{3,4} &= 1 \otimes y + 1 \otimes z_x.
\end{aligned}
$$

Лемма 21. *Для образующей t в качестве трансляций можно взять гомоморфизмы, заданные матрицами*

$$
T^0(t) = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & 1 \otimes 1 & 1 \otimes 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
T^{2n+1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 + M_1 & M_2 & 1 \otimes 1 & \binom{n+1}{1} 1 \otimes w_y & \dots & 0 \\ M_3 & 1 \otimes 1 + M_4 & \binom{n+1}{1} 1 \otimes w_x & 1 \otimes 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \otimes 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
T^{2n}(t) = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & 1 \otimes 1 & 1 \otimes 1 & 0 & \dots & 0 \\ w_x \otimes w_y & 1 \otimes 1 + w_x \otimes w_y & \binom{n+1}{1} w_x \otimes w_y & 1 \otimes 1 & \dots & 0 \\ w_y \otimes w_x & \binom{n+1}{1} w_y \otimes w_x & 1 \otimes 1 + w_y \otimes w_x & \binom{n+1}{2} w_y \otimes w_x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},
$$

где

$$M_1 = w_y \otimes w_y + \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-2},$$
$$M_2 = w_x \otimes 1 + \sum_{i=0}^{k-2} (xy)^i \otimes (yx)^{k-i-1},$$
$$M_3 = w_y \otimes 1 + \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^i \otimes (xy)^{k-i-1},$$
$$M_4 = w_x \otimes w_x + \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-i-2}.$$

Более подробно, матрица $(2n+1)$*-й трансляции имеет следующие ненулевые элементы* $t_{i,j}$:

$$t_{0,0} = 1 \otimes 1 + M_1,\ t_{0,1} = M_2,\ t_{1,0} = M_3,\ t_{1,1} = 1 \otimes 1 + M_4,$$

$$t_{i,i} = 1 \otimes 1\ (i = 2 \dots 2n+1),\ t_{i,i+2} = 1 \otimes 1\ (i = 0 \dots 2n+1),$$

$$t_{0,2i+3} = \tbinom{n+1}{i+1} 1 \otimes w_y\ (i = 0 \dots n),\ t_{1,2i+2} = \tbinom{n+1}{i+1} 1 \otimes w_x\ (i = 0 \dots n).$$

Матрица $2n$*-й трансляции имеет следующие ненулевые элементы* $t_{i,j}$:

$$t_{0,0} = t_{0,1} = 1 \otimes 1,\ t_{1,0} = w_x \otimes w_y,\ t_{1,1} = 1 \otimes 1 + w_x \otimes w_y,$$

$$t_{2,0} = w_y \otimes w_x,\ t_{2,2} = 1 \otimes 1 + w_y \otimes w_x,$$

$$t_{i,i} = 1 \otimes 1\ (i = 3 \dots 2n),\ t_{i,i+2} = 1 \otimes 1\ (i = 0 \dots 2n),$$

$$t_{1,2i+2} = \tbinom{n+1}{i+1} w_x \otimes w_y\ (i = 0 \dots n),\ t_{2,2i+1} = \tbinom{n+1}{i+1} w_y \otimes w_x\ (i = 0 \dots n).$$

§7. Доказательство теоремы

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, определённую в §2. Обозначим через $\mathcal{A}^m$ однородную компоненту степени m алгебры $\mathcal{A}$. Нужно доказать, что

$$\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Для степени $m \leqslant 3$ перечислим все ненулевые мономы степени m и покажем, что их количество совпадает с размерностью $\mathrm{HH}^m(R)$.

Мономы степени 0:

$$1,\ p_1^n\ (n = 1 \dots k-1),\ p_2,\ p_3,\ p_4.$$

Мономы степени 1:

$$u_2,\ p_2u_2,\ p_3u_2,\ u_3,\ u_4.$$

Мономы степени 1, если k чётно:

$$p_1^n u_1 \ (n = 0 \dots k-1).$$

Мономы степени 1, если k нечётно:

$$p_1^n u_1' \ (n = 0 \dots k-2).$$

Мономы степени 2:

$$v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4, \ p_1^n v_5 \ (n = 0 \dots k-2), \ v_6, \ p_4 v_1.$$

Моном степени 2, если k чётно:

$$p_4 v_2.$$

Мономы степени 3:

$$u_2 v_1, \ u_3 v_1, \ u_4 v_2, \ u_2 v_3, \ u_2 v_4.$$

Мономы степени 3, если k чётно:

$$w_1, \ w_2, \ p_1^n u_1 v_5 \ (n = 0 \dots k-2).$$

Мономы степени 3, если k нечётно:

$$w_2', \ p_1^n w_1' \ (n = 0 \dots k-1).$$

Для степени $m > 3$ нужно доказать, что

$$\dim_K \mathcal{A}^m - \dim_K \mathcal{A}^{m-4} = 4.$$

1. Если m чётно, т. е. $m = 2n$, то мономы из $\mathcal{A}^m$, в которых есть t, находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$. Далее, в $\mathcal{A}^m$ есть 4 монома, в которых отсутствует t, а именно: v_1^n, v_2^n, $v_1^{n-1}v_6$, $v_2^{n-1}v_6$.

2. Если m нечётно, т. е. $m = 2n+1$, то снова мономы из $\mathcal{A}^m$, в которых есть t, находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$. Перечислим мономы без t из $\mathcal{A}^m$: $u_3 v_1^n$, $u_4 v_2^n$, $v_1^{n-1} w_1$ (если k чётно), $v_1^{n-1} w_1'$ (если k нечётно), $v_2^{n-1} w_2$ (если k чётно), $v_2^{n-1} w_2'$ (если k нечётно).

Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, **16**, No. 6 (2004), 53–122.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 92–129.

3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 28–38.
4. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 67–104.
5. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **430** (2014), 74–102.
6. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$. — Алгебра и анализ, **27**, No. 6 (2015), 89–116.
7. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VII. *Серия* $D(3\mathcal{R})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **460** (2017), 53–81.
8. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VIII. *Алгебра когомологий для серии* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **470** (2018), 50–87.
9. А. И. Генералов, М. А. Качалова, П. А. Мостовский, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* IX. *Алгебра когомологий для серии* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 30–56.
10. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes Math., **1428**, Berlin, Heidelberg (1990).
11. В. А. Рогов, *Когомологии Хохшильда исключительных локальных алгебр диэдрального типа.* — Выпускная квалификационная работа Санкт-Петербургского государственного университета (2018).
12. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.

Kachalova M. A. Hochschild cohomology algebra for exceptional local algebras of dihedral type.

The Hochschild cohomology ring for a family of local algebras of dihedral type is described in terms of generators and relations. The family occurs in the Erdmann classification only in the case, where the characteristic of underlying field equals 2.

ООО Яндекс.Технологии,
ул. Льва Толстого, 16
119021 Москва, Россия
E-mail: mashakachalova@mail.ru

Поступило 29 августа 2022 г.