Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

О. Ю. Иванова

ЗАДАНИЕ СВИРЕПОГО ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ИНАБЫ

§1. Обозначения и предварительные сведения

1.1. Расширения дискретно нормированных полей. Везде предполагается, что p – простое число, $p > 2$.

Для любого поля K будем обозначать через K^{alg} его алгебраическое замыкание.

Для дискретно нормированного поля K будем использовать следующие определения и обозначения:

v_K – нормирование на K;
$\overline{K}$ – поле вычетов поля K;
униформизирующая поля K – такой элемент $\pi \in K$, что $v_K(\pi) = 1$;
$e_K = v_K(p)$ – абсолютный индекс ветвления поля K;
$O_K = \{x \in K \mid v_K(x) \geqslant 0\}$ – кольцо целых поля K;
$M_K = \{x \in K \mid v_K(x) > 0\}$ – максимальный идеал кольца O_K.

Определение 1.1. Пусть K – дискретно нормированное поле, L, M – его конечные сепарабальные расширения. Глубиной ветвления расширения L/K относительно поля M называется число

$$d_M(L/K) = \min\Big\{v_M\Big(\frac{\operatorname{Tr}_{L/K} a}{a}\Big) \mid a \in L^*\Big\}.$$

Определение 1.2. Пусть L/K – расширение Галуа дискретно нормированных полей, $|L : K| = p$, и σ – порождающий элемент группы $\operatorname{Gal}(L/K)$. Число

$$h(L/K) = \min\Big\{v_L\Big(\frac{\sigma a}{a} - 1\Big) \mid a \in O_L, a \neq 0\Big\}$$

называется скачком ветвления расширения L/K.

Определение 1.3. Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$. Конечное расширение L/K называется свирепым, если $e_{L/K} = 1$, и расширение $\overline{L}/\overline{K}$ чисто несепарабельно.

Ключевые слова: высшие локальные поля, уравнение Инабы.

В [1, глава 3, предложение 2.5], описано задание расширений степени p уравнениями Артина–Шрайера. Для вполне разветвленных и неразветвленных расширений вычислены скачки. Нам понадобятся скачки свирепых расширений.

Лемма 1.4. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$, и K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Пусть π – униформизирующая поля K, и $a \in K$ таков, что*

$$-\frac{e_K}{p-1} < v_K(a) < 0, \qquad p \mid v_K(a), \qquad \overline{a\pi^{-v_K(a)}} \notin \overline{K}^p.$$

Пусть $L = K(x)$, где $x^p - x = a$. Тогда L/K является свирепым расширением Галуа степени p, и

$$h(L/K) = -\frac{v_K(a)}{p}.$$

Доказательство. Расширение L/K является расширением Галуа в силу [1, глава 3, предложение 2.5]. Найдем его скачок.

Положим $s = -\frac{1}{p}v_K(a)$, $y = \pi^s x$. Тогда

$$y^p - y\pi^{ps-s} = a\pi^{ps}.$$

Имеем $v_K(y^p) = 0$, $\overline{y}^p \notin \overline{K}^p$. Следовательно, $L \neq K$,

$$\overline{L} = \overline{K}(\overline{y}) = \overline{K}(\sqrt[p]{\overline{a\pi^{ps}}}),$$

и, таким образом, L/K – свирепое расширение степени p.

Пусть σ – порождающий элемент группы $\operatorname{Gal}(L/K)$, и $\sigma(y) = y + d$. Тогда

$$h(L/K) = v_L\Big(\frac{y+d}{y} - 1\Big) = v_L(d).$$

В силу [2, лемма 2–16], и того, что расширение L/K свирепо, следует, что

$$0 < v_L(d) \leqslant \frac{e_L}{p-1}.$$

Имеем

$$(y+d)^p - (y+d)\pi^{ps-s} = y^p - y\pi^{ps-s}.$$

Следовательно,

$$d^{p-1} - \pi^{ps-s} = \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i d^{i-1} y^{p-i}.$$

Получаем, что

$$v_L(d^{p-1} - \pi^{ps-s}) = e_L,$$

и при этом

$$v_L(d^{p-1}) \leqslant e_L, \qquad v_L(\pi^{ps-s}) < e_L.$$

откуда $v_L(d^{p-1}) = v_L(\pi^{ps-s})$ и $v_L(d) = s$. □

Лемма 1.5. *Пусть L_1/K и L_2/K – расширения Галуа степени p и для скачков расширения $h = h(L_1/K)$ и $h' = h(L_2/K)$ выполнено $0 < h < h'$. Тогда*

$$h(L_1L_2/L_2) = h,$$
$$h(L_1L_2/L_1) = h + p(h' - h).$$

Доказательство. См. [5, лемма 3.3.1]. □

1.2. Уравнение Инабы. Для матрицы X обозначим через $X^{(p)}$ матрицу, полученную из X возведением каждого элемента в степень p.

Унипотентной матрицей будем называть верхнетреугольную квадратную матрицу, у которой все элементы на главной диагонали равны 1.

Матричные уравнения $X^{(p)} = AX$ для унипотентных матриц A и X рассматривались в работе Инабы [3] над полем положительной характеристики, а также в [4] над полем характеристики 0. Мы будем называть такие уравнения уравнениями Инабы.

Пусть $A = (a_{i,j})$ – унипотентная матрица. При $k > 0$ множество элементов $a_{i,i+k}$ будем называть k-й диагональю матрицы A.

Матричное уравнение Инабы $X^{(p)} = AX$ для унипотентной матрицы n-го порядка равносильно системе из $\frac{n^2-n}{2}$ уравнений:

$$\begin{cases} x_{s,1+s}^p - x_{s,1+s} = a_{s,1+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-1, \\ x_{s,2+s}^p - x_{s,2+s} = a_{s,1+s}x_{1+s,2+s} + a_{s,2+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-2, \\ \dots \\ x_{s,i+s}^p - x_{s,i+s} = \sum\limits_{j=s+1}^{s+i-1} a_{s,j}x_{j,i+s} + a_{s,i+s}, & 1 \leqslant s \leqslant n-i, \\ \dots \end{cases}$$

Для любого i первые i строк системы задают расширение, полученное присоединением к полю K первых i диагоналей матрицы X.

Сформулируем утверждение, доказанное в [4].

Теорема 1.6. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$, и $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ – унипотентная матрица, для которой*

$$e_K v_K(a_{i,i+k}) > -\frac{k}{n-1}$$

при всех i, k. Пусть X – некоторое решение уравнения Инабы

$$X^{(p)} = AX,$$

и пусть K_i – поле, полученное присоединением первых i диагоналей матрицы X. Тогда K_i/K является расширением Галуа для любого i.

Доказательство. См. [4, теорема 1]. □

§2. Циклические подрасширения

Лемма 2.1. *Пусть G – конечная группа и существуют подгруппы A и B и $n \in \mathbb{N}$, для которых выполнено*

$$A < B < G, \qquad A \triangleleft G,$$

$|B : A|^n$ делится на $|B|$, и группы G/A и B являются циклическими. Тогда группа G тоже является циклической.

Доказательство. Пусть $B = \langle b \rangle$, и $s = |B : A|$. Тогда $A = \langle b^s \rangle$, и $\operatorname{ord} b \mid s^n$.

Из того, что группа G/A циклическая, следует, что для некоторого $g \in G$ выполнено

$$G = \bigcup_{i=0}^{|G:A|-1} g^i A.$$

Следовательно, для некоторых i, j выполнено $b = g^i b^{sj}$. Получаем, что

$$b^{sj-1} \in \langle g \rangle.$$

Учитывая, что $(sj - 1, \operatorname{ord} b) = 1$, получаем, что $b \in \langle g \rangle$ и

$$A < \langle b \rangle < \langle g \rangle.$$

Следовательно, $G = \langle g \rangle$. □

Лемма 2.2. *Пусть $K \subset L \subset M \subset N$ – поля, расширения L/K, M/K, N/K являются расширениями Галуа,*

$$|N : L| \text{ делит } |M : L|^n \text{ для некоторого } n, \tag{1}$$

и расширения M/K и N/L – циклические. Тогда расширение N/K тоже циклическое.

Условие (1) *выполнено, в частности, если N/K является p-расширением и $M \neq L$.*

Доказательство. Следует из леммы 2.1, примененной к группе $G = \mathrm{Gal}(N/K)$ и ее подгруппам $A = \mathrm{Gal}(N/M)$, $B = \mathrm{Gal}(N/L)$. □

Лемма 2.3. *Пусть поля $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ таковы, что для любого i расширение K_i/K_0 является расширением Галуа, $|K_{i+1} : K_i| = p$, и расширение K_{i+2}/K_i является циклическим. Тогда расширение K_n/K_0 является циклическим.*

Доказательство. Индукция по n. По лемме 2.2 из того, что расширения K_{n-1}/K_0 и K_n/K_{n-2} циклические, следует, что расширение K_n/K_0 циклическое. □

§3. Свирепые циклические расширения

Лемма 3.1. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\mathrm{char}\, K = 0$, $\mathrm{char}\, \overline{K} = p$, и K содержит первообразный корень p-й степени из единицы, и пусть поля L и M таковы, что $K \subset L \subset M$, расширение M/K является свирепым расширением Галуа,*

$$|L : K| = |M : L| = p,$$

и $h(M/L) > h(L/K)$. Тогда расширение M/K является циклическим.

Доказательство. Предположим, что расширение M/K не циклическое. Тогда существует поле N, такое, что $K \subset N \subset M$, $|N : K| = p$, $M = LN$.

Положим $h = h(L/K)$, $h' = h(N/K)$, $h'' = h(M/L)$.

Имеем

$$d_M(M/L) \leqslant d_M(N/K) = e(M/N) d_N(N/K) = d_N(N/K).$$

По [2, лемма 2–10], выполнено

$$d_N(N/K) = (p-1)h', \qquad d_M(M/L) = (p-1)h''.$$

Подрасширения свирепого расширения свирепы, поэтому по [2, лемма 2-16], их скачки положительны. Следовательно, $h' \geqslant h'' > h > 0$.

По лемме 1.5 из неравенства $0 < h < h'$ следует, что

$$h'' = h + p(h' - h).$$

Получаем, что
$$h'' \leqslant h' = \frac{h''-h}{p} + h,$$
а это противоречит условию $h'' > h$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть K_0 – полное дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} K_0 = 0$, $\operatorname{char} \overline{K}_0 = p$, и K_0 содержит первообразный корень p-й степени из единицы; пусть поля*
$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n,$$
таковы, что расширение K_n/K_0 свирепо, для любого i расширение K_i/K_0 является расширением Галуа, $|K_{i+1} : K_i| = p$, и
$$h(K_{i+1}/K_i) > h(K_i/K_{i-1}).$$
Тогда расширение K_n/K_0 является циклическим.

Доказательство. Ввиду леммы 2.3 достаточно доказать, что все расширения K_{i+1}/K_{i-1} являются циклическими.

Все подрасширения свирепого расширения свирепы. Из того, что K_{i+1}/K_0 является расширением Галуа, следует, что K_{i+1}/K_{i-1} является расширением Галуа. По лемме 3.1 оно является циклическим. $\square$

§4. Построение циклического расширения

Лемма 4.1. *Пусть K – дискретно нормированное поле и*
$$a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n \in K$$
таковы, что
$$v_K(a_1) < 0,$$
$$v_K(a_i) > \Big(1 + \frac{p^{i-1}-1}{p^{n-1}(p-1)}\Big) v_K(a_1) \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n,$$
$$x_i^p - x_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \cdots + a_{i-1} x_1 + a_i.$$
Тогда для любого i выполнено
$$v_K(x_i) = \frac{p^i - 1}{p^i(p-1)} v_K(a_1), \qquad x_i^{p^i} \equiv a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}} \mod a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}} M_K.$$

Доказательство. Положим $v = v_K$, $s = v(a_1)$.

Докажем утверждение индукцией по i.

При $i=1$ выполнено $x_1^p-x_1=a_1$. Следовательно,

$$v(x_1^p-x_1)=s<0,$$

и, таким образом, $v(x_1)=\frac{s}{p}$.

Докажем переход от $1,\dots,i-1$ к i. Положим

$$b=a_1x_{i-1}+a_2x_{i-2}+\dots+a_{i-1}x_1+a_i,\qquad s'=v(b).$$

Тогда $v(x_i^p-x_i)=s'$. Применяя индукционное предположение, получаем, что

$$v(a_1x_{i-1})=s+\frac{p^{i-1}-1}{p^{i-1}(p-1)}s=\frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)}s,$$

при $2\leqslant j\leqslant i-1$ выполнено

$$\begin{aligned}
v(a_jx_{i-j})&>\Big(1+\frac{p^{j-1}-1}{p^{n-1}(p-1)}\Big)s+\frac{p^{i-j}-1}{p^{i-j}(p-1)}s\\
&=\frac{p^n-p^{n-1}+p^{j-1}-1+p^{n-1}-p^{n-1-i+j}}{p^{n-1}(p-1)}s\\
&=\frac{p^n+p^{j-1}-1-p^{n-1-i+j}}{p^{n-1}(p-1)}s\\
&>\frac{p^n-p^{n-i}}{p^{n-1}(p-1)}=\frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)}s,
\end{aligned}$$

а также выполнено

$$v(a_i)>\Big(1+\frac{p^{i-1}-1}{p^{n-1}(p-1)}\Big)s>\frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)}s.$$

Следовательно,

$$s'=\frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)}s$$

и

$$x_i^p-x_i\equiv a_1x_{i-1}\mod a_1x_{i-1}M_K.$$

Учитывая, что $s<0$, получаем, что $s'<0$, и таким образом,

$$\begin{aligned}
v(x_i)&=\frac{s'}{p}<0,\\
x_i^{p^i}&\equiv(x_i^p-x_i)^{p^{i-1}}\equiv(a_1x_{i-1})^{p^{i-1}}\equiv a_1^{p^{i-1}}a_1^{\frac{p^{i-1}-1}{p-1}}\\
&\equiv a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}}\mod a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}}M_K.
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 4.2. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$, и K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Пусть π – униформизирующая поля K, и $a_1, \dots, a_n \in K$ таковы, что*

$$p^n \mid v_K(a_1), \qquad \overline{\pi^{-v_K(a_1)} a_1} \notin \overline{K}^p,$$

$$-\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{p^{n-1}}{p^n - 1}\Big\} e_K < v_K(a_1) < 0,$$

$$v_K(a_i) > \Big(1 + \frac{p^{i-1} - 1}{p^{n-1}(p-1)}\Big) v_K(a_1) \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда существуют

$$x_1, \dots, x_n \in K^{alg},$$

такие, что

$$\begin{cases} x_1^p - x_1 = a_1, \\ x_2^p - x_2 = a_1 x_1 + a_2, \\ \dots \\ x_i^p - x_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_{i-1} x_1 + a_i, \\ \dots \end{cases}$$

и $K(x_1, \dots, x_n)/K$ является циклическим свирепым расширением степени p^n.

Доказательство. Пусть $A \in M_{n+1}(K)$, $X \in M_{n+1}(K^{alg})$ – унипотентные матрицы, все элементы i-й диагонали матрицы A равны a_i, и все элементы i-й диагонали матрицы X равны x_i. Тогда матрица X является решением уравнения Инабы с матрицей A.

Положим $K_0 = K$, $K_i = K(x_1, \dots, x_i)$, $s = v_K(a_1)$.

При $i \geqslant 2$ выполнено

$$v_K(a_i) > -\frac{e_K}{n}\Big(1 + \frac{p^{i-1} - 1}{p^{n-1}(p-1)}\Big) > -\frac{2e_K}{n} \geqslant -\frac{ie_K}{n}.$$

Следовательно, для расширения Инабы выполнено условие теоремы 1.6, и, таким образом, расширения K_i/K являются расширениями Галуа.

Из леммы 4.1, примененной к полю K_i, следует, что

$$v_{K_i}(x_i) = \frac{p^i-1}{p^i(p-1)} v_{K_i}(a_1) < 0,$$

$$x_i^{p^i} \equiv a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}} \mod a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}} M_{K_i}.$$

Положим

$$b_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \cdots + a_{i-1} x_1 + a_i.$$

Тогда $b_i \in K_{i-1}$, и расширения K_i/K_{i-1} задаются уравнениями Артина–Шрайера $x_i^p - x_i = b_i$. Учитывая, что $v_{K_{i-1}}(x_i) < 0$, получаем, что

$$v_{K_{i-1}}(b_i) = p v_{K_{i-1}}(x_i) = \frac{p v_{K_i}(x_i)}{e(K_i/K_{i-1})} = e(K_{i-1}/K) \frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)} s,$$

и

$$b^{p^{i-1}} \equiv x_i^{p^i} \equiv a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}} \mod a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}} M_{K_{i-1}}.$$

Индукцией по i проверим, что расширение K_i/K свирепо. Докажем переход от $i-1$ к i при $i \leqslant n$.

Имеем

$$v_{K_{i-1}}(b_i) = \frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)} s,$$

и, следовательно,

$$p \mid v_{K_{i-1}}(b_i), \qquad -\frac{e_{K_{i-1}}}{p-1} < v_{K_{i-1}}(b_i) < 0.$$

Элемент π является униформизирующей поля K_{i-1}. Имеем

$$\overline{(\pi^{-v_{K_{i-1}}(b_i)} b_i)^{p^{i-1}}} = \overline{\pi^{-v_K\left(a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}}\right)} a_1^{\frac{p^i-1}{p-1}}} \in \overline{K} \setminus \overline{K}^p,$$

и $|\overline{K}_{i-1} : \overline{K}_i| = p^{i-1}$. Следовательно,

$$\overline{\pi^{-v_{K_{i-1}}(b_i)} b_i} \notin \overline{K}_{i-1}^p.$$

Применяя лемму 1.4, получаем, что уравнение $x_i^p - x_i = b_i$ задает свирепое расширение, и расширение K_i/K также свирепо.

По лемме 1.4 скачки подрасширений равны

$$h(K_i/K_{i-1}) = -\frac{1}{p} v_{K_{i-1}}(b_i) = -\frac{p^i-1}{p^{i-1}(p-1)} s.$$

Для них выполнено $h(K_{i+1}/K_i) > h(K_i/K_{i-1})$, следовательно, по лемме 3.2, расширение K_n/K является циклическим. $\square$

Следствие 4.3. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = p,$$

K содержит первообразный корень p-й степени из единицы, поле $\overline{K}$ не совершенно, $n \in \mathbb{N}$,

$$e_K > \frac{p^n}{\max\Big\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{p^{n-1}}{p^n - 1}\Big\}}.$$

Тогда у поля K существует циклическое свирепое расширение степени p^n, полученное присоединением к полю K некоторого решения уравнения Инабы.

Доказательство. Проверим, что существуют a_i, удовлетворяющие условию теоремы 4.2.

Пусть π – произвольная униформизирующая поля K. В качестве a_1 подойдет произвольный элемент вида

$$a_1 = \pi^{-p^n} u,$$

где $v_K(u) = 0$, $\overline{u} \notin \overline{K}$. При $i > 1$ в качестве a_i подойдут произвольные элементы, удовлетворяющие условию

$$v_K(a_i) > -\Big(1 + \frac{p^{i-1} - 1}{p^{n-1}(p-1)}\Big)p^n,$$

например, $a_i = 0$. □

Список литературы

1. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions. A constructive approach.* Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.
2. O. Hyodo, *Wild ramification in the imperfect residue field case*, Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 287–314.
3. E. Inaba, *On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p.* — Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **12** (1961), 26–36.
4. О. Ю. Иванова, С. В. Востоков, И. Б. Жуков, *Расширения Инабы полных полей характеристики 0.* — Чебышёвский сб. **20**, No. 3 (2019), 124–133.
5. L. Xiao, I. Zhukov, *Ramification of higher local fields, approaches and questions.* — Алгебра и анализ **26**, No. 5 (2014), 1–65.
6. И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко, *Построение циклического расширения степени p^2 полного поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **455** (2017), 52–66.

Ivanova O. Yu. Construction for cyclic ferocious extensions of the Inaba equation.

We present a construction of cyclic ferocious extensions by Inaba equation. This gives a partial answer to the question on construction of cyclic extensions with small ramification depth. The construction is based on a method similar to that used by I. B. Zhukov and E. F. Lysenko (2017), and gives a tower of simple extensions with suitable ramification jumps.

С.-Петербургский
государственный университет
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olgaiv80@mail.ru

Поступило 11 августа 2022 г.