Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

О РАСШИРЕНИЯХ ИНАБЫ ДВУМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ СМЕШАННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§1. Введение

Работа посвящена изучению явных конструкций p-расширений двумерных локальных полей смешанной характеристики. В серии статей Е. Инабы, начиная с [1], было показано, что произвольные конечные p-расширения Галуа полей простой характеристики p можно задавать при помощи некоторого матричного уравнения. Оказалось [2], что аналогичное уравнение описывает также все p-расширения Галуа полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики при условии, что скачки ветвления достаточно малы. Изучение данной конструкции было продолжено в [3].

В настоящей работе мы демонстрируем универсальную роль, которую играют расширения, заданные такими уравнениями («расширения Инабы»), в теории Галуа двумерных локальных полей смешанной характеристики. В частности, доказано (теорема 3.3), что для любого расширения L/K, которое раскладывается в башню расширений Артина–Шрайера, можно подобрать такое расширение Инабы поля K, что композит этих двух расширений поля K также является расширением Инабы. (Степени получаемых при этом расширений Инабы очень большие.) Кроме того, установлено (теорема 6.2), что расширения с группой Галуа $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$, при определённых ограничениях сверху на скачки ветвления можно погрузить в расширение Галуа с группой Галуа, изоморфной группе U_n унипотентных матриц порядка n над полем из p элементов. Этот результат обобщает следствие 1 из [2].

§2. Обозначения и предварительные сведения

Обозначим через p фиксированное простое число.

Ключевые слова: высшие локальные поля, двумерные локальные поля, задача погружения, уравнение Инабы, уравнение Артина–Шрайера, скачок ветвления.

2.1. Дискретно нормированные поля. Пусть K – дискретно нормированное поле, такое, что $\operatorname{char}\overline{K} = p$. Через v будем обозначать такое нормирование поля K, что $v(p) = 1$. Униформизирующей дискретно нормированного поля K будем называть такой элемент π, что $e_K v(\pi) = 1$. Через M_K будем обозначать максимальный идеал кольца целых поля K, то есть

$$M_K = \{x \in K \mid v(x) > 0\}.$$

Двумерным локальным полем смешанной характеристики называется такое полное дискретно нормированное поле K, что поле $K^{(1)} = \overline{K}$ также является дискретно нормированным полем, поле $K^{(0)} = \overline{K^{(1)}}$ совершенно, и $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char}\overline{K} = p$. Локальными параметрами двумерного поля смешанной характеристики будем называть элементы π, t, такие, что π – униформизирующая поля K, и $\overline{t}$ – униформизирующая поля $\overline{K}$.

Пусть L/K – расширение Галуа дискретно нормированных полей. Скачками ветвления этого расширения называются числа

$$h_\sigma(L/K) = \min\Big\{e_L v\Big(\frac{\sigma a}{a} - 1\Big) \mid a \in L, a \neq 0, v(a) \geqslant 0\Big\},$$

где в качестве σ берутся всевозможные неединичные элементы $\operatorname{Gal}(L/K)$.

Если $|L : K| = p$, то расширение L/K обладает единственным скачком. Он обозначается просто $h(L/K)$.

Уравнением Артина–Шрайера называется уравнение вида

$$X^p - X - a = 0.$$

Сформулируем известные результаты про расширения полей, заданные уравнениями Артина–Шрайера.

Лемма 2.1. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char}\overline{K} = p.$$

Пусть $a \in K$, и $v(a) > -\frac{p}{p-1}$. Пусть

$$f(X) = X^p - X - a.$$

Тогда

1) *многочлен $f(X)$ либо раскладывается в поле K на линейные множители, либо не имеет корней в поле K;*

2) если многочлен $f(X)$ не имеет корней в поле K, то для любого его корня x расширение $K(x)/K$ является циклическим расширением степени p поля K;

3) если $v(a) > 0$, то многочлен $f(X)$ раскладывается в поле K на линейные множители;

4) если $v(a) < 0$, и $p \nmid e_K v(a)$, то $K(x)/K$ является циклическим вполне разветвленным расширением степени p поля K, и

$$h\bigl(K(x)/K\bigr) = -e_K v(a).$$

Доказательство. См. [4], глава 3, предложение 2.5. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \quad \operatorname{char} \overline{K} = p.$$

Пусть L/K – вполне разветвленное расширение степени p, являющееся расширением Галуа, и $h(L/K) < \frac{pe_K}{p-1}$. Тогда $p \nmid h(L/K)$, и существует такой $a \in K$, что $h(L/K) = -e_K v(a)$ и поле L получается из поля K присоединением корня многочлена

$$f(X) = X^p - X - a.$$

Доказательство. См. [4], глава 3, предложения 2.3 и 2.4. $\square$

2.2. Расширения Инабы. Под унипотентной матрицей мы будем (как и в [1]) понимать верхнетреугольную квадратную матрицу, у которой все элементы на главной диагонали равны 1.

Для матрицы A обозначим через $A^{(p)}$ матрицу, полученную из A возведением каждого элемента в степень p.

Уравнением Инабы называется уравнение $X^{(p)} = AX$, где X, A – унипотентные матрицы.

Расширением Инабы поля K будем называть расширение, полученное присоединением всех элементов некоторой матрицы X, удовлетворяющей уравнению Инабы с некоторой матрицей A, элементы которой принадлежат полю K.

Через U_n будем обозначать группу унипотентных матриц порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_p$.

Будем обозначать элементы унипотентной матрицы как в [2]: для $A = (a_{ij})$, мы будем полагать $A[k,l] = a_{l,k+l}$. Тогда матричное уравнение Инабы $X^{(p)} = AX$ для унипотентной матрицы n-го порядка равносильно системе из $\frac{n^2-n}{2}$ уравнений:

$$\begin{cases} X[1,i]^p - X[1,i] = A[1,i], \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ X[2,i]^p - X[2,i] = A[1,i]X[1,i+1] + A[2,i], \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2, \\ \dots \\ X[s,i]^p - X[s,i] = \sum\limits_{r=i+1}^{s+i-1} A[r-i,i]X[s+i-r,r] + A[s,i], \ 1 \leqslant i \leqslant n-s, \\ \dots \\ X[n-1,1]^p - X[n-1,1] = \sum\limits_{r=2}^{n-1} A[r-1,1]X[n-r,r] + A[n-1,1]. \end{cases} \tag{1}$$

Сформулируем теорему, доказанную в [2].

Теорема 2.3. *Пусть n – натуральное число, α – рациональное число, меньшее $1/(n-1)$. Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = p.$$

Предположим, что для унипотентной матрицы $A \in M_n(K)$ выполнено $v(A[s,i]) \geqslant -s\alpha$ при всех s, i. Пусть $X[s,i]$ – некоторое решение системы (1)*, и L – поле, полученное из K присоединением всех элементов $X[s,i]$. Тогда*

1) *$v(X[s,i]) \geqslant -\frac{s\alpha}{p}$ при всех s, i;*

2) *L/K является расширением Галуа, и группа $\operatorname{Gal}(L/K)$ изоморфна некоторой подгруппе группы U_n.*

Доказательство. См. [2], теорема 1. □

§3. Вложение расширения в расширение Инабы

В этом параграфе через K обозначается некоторое фиксированное поле.

Будем называть конечную последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ *представимой*, если для любого i выполнено

$$x_{i+1}^p - x_{i+1} \in K + x_1K + \dots + x_iK.$$

Лемма 3.1. *Пусть $x_1, \dots, x_n$ – представимая последовательность. Тогда расширение $K(x_1, \dots, x_n)/K$ можно вложить в расширение Инабы L_I/K.*

Можно выбрать расширение L_I/K, удовлетворяющее следующему условию: $L_I = K(x_1, \dots, x_n)M_I$, расширение M_I/K также является *расширением Инабы, порядки матриц, задающих расширения L_I/K и M_I/K, равны $n+1$ и n соответственно.*

Доказательство. Существуют $a_{i,j}$, удовлетворяющие условию

$$x_i^p = x_i + a_{i,0} + a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1}.$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{n,n-1} & a_{n,n-2} & \dots & a_{n,1} & a_{n,0} \\ 0 & 1 & a_{n-1,n-2} & \dots & a_{n-1,1} & a_{n-1,0} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{n-2,1} & a_{n-2,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{1,0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда существует унипотентная матрица X, такая, что $X^{(p)} = AX$, и последний столбец матрицы X равен $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, 1)^T$.

Обозначим через L_I поле, полученное из K присоединением всех элементов матрицы X, и через M_I – поле, полученное из K присоединением элементов матрицы X, стоящих не в последнем столбце. Обозначим через B матрицу, полученную из A вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Тогда расширения L_I/K и M_I/K являются расширениями Инабы для матриц A и B, и для них выполнено $L_I = K(x_1, \dots, x_n)M_I$. □

Лемма 3.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что*

$$x_s^p - x_s \in K(x_1, \dots, x_{s-1})$$

для любого s. Тогда последовательность, состоящая из элементов множества

$$\Big\{\prod_{s=1}^{n} x_s^{i_s} \mid 0 \leqslant i_s \leqslant p-1\Big\},$$

записанных в лексикографическом порядке по наборам степеней $(i_1, \dots, i_n)$, является представимой.

Доказательство. Зафиксируем набор степеней $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, не равный $(0, 0, \dots, 0)$. Предположим, что последовательность, состоящая из элементов, предшествующих элементу

$$\prod_{s=1}^{n} x_s^{j_s},$$

является представимой, и докажем, что при добавлении этого элемента она останется представимой. Положим

$$m = \max\{s \mid j_s \neq 0\}.$$

Положим $a_s = x_s^p - x_s$ для любого s; тогда

$$a_s \in K(x_1, \ldots, x_{s-1}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Bigl(\prod_{s=1}^{n} x_s^{j_s}\Bigr)^p - \prod_{s=1}^{n} x_s^{j_s} &= \prod_{s=1}^{m} \bigl((x_s)^p\bigr)^{j_s} - \prod_{s=1}^{m} x_s^{j_s} \\ &= \prod_{s=1}^{m} (x_s + a_s)^{j_s} - \prod_{s=1}^{m} x_s^{j_s} \in \sum_{i_m=0}^{j_m-1} x_m^{i_m} K(x_1, \ldots, x_{m-1}) \\ &= \sum_{i_m=0}^{j_m-1} x_m^{i_m} \sum_{0\leqslant i_1,\ldots,\leqslant i_{m-1}\leqslant p-1} \prod_{s=1}^{m-1} x_s^{i_s} K \subset \sum_{(i_1,\ldots,i_n)<(j_1,\ldots,j_n)} \prod_{s=1}^{n} x_s^{i_s} K. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3.3. *Пусть поля*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = L$$

таковы, что K_{i+1}/K_i – расширения степени p, заданные уравнениями Артина–Шрайера. Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K, заданные матрицами порядка $p^{n-1}+2$ и $p^{n-1}+1$ соответственно, такие, что $M_I L = L_I$.

Доказательство. По лемме 3.1 достаточно проверить, что поле L получается из поля K присоединением представимой последовательности длины $p^{n-1}+1$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y$ таковы, что

$$K_i = K_{i-1}(x_i), \qquad x_i^p - x_i \in K_{i-1},$$
$$K_n = K_{n-1}(y), \qquad y^p - y \in K_{n-1}.$$

Обозначим через $z_1, \ldots, z_{p^{n-1}}$ элементы вида

$$\prod_{s=1}^{n-1} x_s^{i_s},$$

где $0 \leqslant i_s \leqslant p-1$, записанные в лексикографическом порядке по наборам степеней $(i_1, \ldots, i_{n-1})$. Тогда

$$L = K(z_1, \ldots, z_{p^{n-1}}, y).$$

Применяя лемму 3.2 к $x_1, \dots, x_{n-1}$, мы видим, что последовательность $z_1, \dots, z_{p^{n-1}}$ представима. При добавлении y она остается представимой, так как

$$y^p - y \in K_{n-1} = \sum_{i=1}^{p^{n-1}} z_i K. \qquad \square$$

§4. Расширение степени p^2

Рассмотрим подробнее случай, когда L/K – расширение Галуа дискретно нормированных полей степени p^2. В этом случае можно явно выписать коэффициенты матрицы из доказательства леммы 3.1. При достаточно маленьких скачках ветвления расширения к нему удастся применить теорему 2.3.

Введем обозначения для этого параграфа.

Через K обозначим некоторое фиксированное поле.

Для набора элементов $c, c_0, c_1, \dots, c_{p-1} \in K$ обозначим через $A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}$ матрицу порядка $p+1$ вида

$$A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}} = \begin{pmatrix} 1 & c_{p-1} & c_{p-2} & \dots & c_1 & c_0 \\ 0 & 1 & C_{p-1}^{p-2}c & \dots & C_{p-1}^{1}c^{p-2} & C_{p-1}^{0}c^{p-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{p-2}^{1}c^{p-3} & C_{p-2}^{0}c^{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_1^0 c^1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть

$$A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}[s,1] = c_{p-s},$$

$$A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}[s,i] = C_{p-i+1}^{p-i-s+1} c^s, \qquad i > 1.$$

Через $B_{c,c_1,\dots,c_{p-1}}$ обозначим матрицу, которая получается из матрицы $A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца.

Лемма 4.1. *Пусть расширение L/K задано системой уравнений*

$$\begin{cases} x^p - x = c, \\ y^p - y = c_0 + c_1 x + \dots + c_{p-1}x^{p-1}; \end{cases} \qquad c, c_i \in K.$$

Тогда существуют решения матричных уравнений Инабы с матрицами

$$A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}, \qquad B_{c,c_1,\dots,c_{p-1}},$$

которые задают расширения L_I/K, M_I/K, удовлетворяющие условию $M_I L = L_I$.

Доказательство. Положим

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^2, \quad \dots, \quad x_{p-1} = x^{p-1}, \quad x_p = y.$$

Тогда $L = K(x_1, \dots, x_p)$. При $1 \leqslant s \leqslant p-1$ выполнено

$$(x^s)^p - x^s = (x^p)^s - x^s = (c+x)^s - x^s = \sum_{i=0}^{s-1} C_s^i c^{s-i} x^i.$$

Следовательно, последовательность $x_1, x_2, \dots, x_p$ является решением системы

$$\begin{cases} x_1^p = x_1 + C_1^0 c, \\ x_2^p = x_2 + C_2^0 c^2 + C_2^1 x_1, \\ \dots \\ x_{p-1}^p = x_{p-1} + C_{p-1}^0 c^{p-1} + C_{p-1}^1 c^{p-2} x_1 + \dots + C_{p-1}^{p-2} c x_{p-2}, \\ x_p^p = x_p + c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_{p-1} x_{p-1}. \end{cases}$$

Получаем, что существует унипотентная матрица X, такая, что $X^{(p)} = AX$, и последний столбец матрицы X равен $(x_p, x_{p-1}, \dots, x_1, 1)^T$. Обозначим через L_I поле, полученное из K присоединением всех элементов матрицы X, и через M_I – поле, полученное из K присоединением элементов матрицы X, стоящих не в последнем столбце. Поля L_I и M_I удовлетворяют требуемому условию. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = p.$$

Пусть расширение L/K задано системой уравнений

$$\begin{cases} x^p - x = c, \\ y^p - y = c_0 + c_1 x + \dots + c_{p-1} x^{p-1}, \end{cases} \qquad c, c_i \in K,$$

причем для коэффициентов c, c_i выполнены неравенства

$$-v(c) \leqslant \frac{1}{p}, \qquad -\frac{v(c_{p-s})}{s} \leqslant \frac{1}{p}.$$

Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K степени p^{p+1} и p^p, такие, что

1) *$M_I L = L_I$,*

2) *расширения* L_I/K *и* M_I/K *являются расширениями Галуа, и их группы Галуа изоморфны некоторым подгруппам групп* U_{p+1} *и* U_p.

Доказательство. Возьмем в качестве L_I и M_I расширения, заданные уравнениями Инабы с матрицами $A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}$ и $B_{c,c_1,\dots,c_{p-1}}$. По лемме 4.1 выполнено условие 1).

Имеем

$$v(A_{c,c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}[s,i]) \geqslant -\frac{1}{p}s,$$

$$v(B_{c,c_1,\dots,c_{p-1}}[s,i]) \geqslant -\frac{1}{p}s,$$

так как

$$v(c^s) = sv(c) \geqslant -\frac{1}{p}s.$$

Применяя к этому $\alpha = \frac{1}{p}$ теорему 2.3, получаем, что выполнено условие 2). □

Предложение 4.3. *Пусть* K *– полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = p.$$

Пусть расширение L/K *– вполне разветвленное расширение Галуа степени* p^2, *и для некоторого поля* M, *такого, что*

$$K \subset M \subset L, \qquad |M : K| = p,$$

выполнено

$$h(M/K) \leqslant \frac{e_K}{p},$$

$$h(L/M) \leqslant (p-1)h(M/K) + \frac{e_M}{p}.$$

Тогда существуют расширения Инабы L_I/K *и* M_I/K *порядка* p^{p+1} *и* p^p, *такие, что*

1) $M_I L = L_I$,

2) *расширения* L_I/K *и* M_I/K *являются расширениями Галуа, и их группы Галуа изоморфны некоторым подгруппам групп* U_{p+1} *и* U_p.

Доказательство. Достаточно доказать, что существуют $c, c_0, \dots c_p$, удовлетворяющие условию предложения 4.2.

По лемме 2.2 расширения M/K и L/M можно задать уравнениями Артина–Шрайера $x^p - x = c$, $y^p - y = d$, где $c \in K$, $d \in M$,

$$v(c) = -\frac{h(M/K)}{e_K}, \qquad p \nmid e_K v(c), \qquad v(d) = -\frac{h(L/M)}{e_M}.$$

Имеем $M = K(x)$, следовательно, d можно представить в виде

$$d = c_0 + c_1 x + \dots + c_{p-1}x^{p-1}.$$

Проверим, что $v(c)$, $v(c_i)$ удовлетворяют неравенствам из предложения 4.2.

Неравенство для $v(c)$ следует из того, что $h(M/K) \leqslant \frac{e_K}{p}$.

Рассмотрим $v(c_i)$. Имеем

$$v(x) = \frac{1}{p}v(c), \qquad p \nmid e_M v(x).$$

Следовательно, значения нормирования v на элементах c_0, $c_1 x$, …, $c_{p-1}x^{p-1}$, различны, и каждое из них не меньше $v(d)$. Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s}v(c_{p-s}) &= -\frac{1}{s}v(c_{p-s}x^{p-s}) + \frac{p-s}{s}v(x) \\ &\leqslant -\frac{1}{s}v(d) + \frac{p-s}{ps}v(c) = \frac{1}{s}\frac{h(L/M)}{e_M} - \frac{p-s}{ps}\frac{h(M/K)}{e_K} \\ &= \frac{1}{se_M}\big(h(L/M) - ph(M/K)\big) + \frac{1}{pe_K}h(M/K). \end{aligned} \tag{2}$$

Если $h(L/M) \leqslant ph(M/K)$, то первое слагаемое в правой части (2) не превосходит 0, и, следовательно,

$$-\frac{v(c_{p-s})}{s} \leqslant \frac{h(M/K)}{pe_K} \leqslant \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p}.$$

Пусть $h(L/M) > ph(M/K)$. Тогда первое слагаемое в правой части (2) неотрицательно. Следовательно,

$$\begin{aligned} -\frac{v(c_{p-s})}{s} &\leqslant \frac{1}{e_M}\big(h(L/M) - ph(M/K)\big) + \frac{1}{pe_K}h(M/K) \\ &= \frac{1}{e_M}\big(h(L/M) - ph(M/K)\big) + \frac{1}{e_M}h(M/K) \\ &= \frac{1}{e_M}h(L/M) - \frac{p-1}{e_M}h(M/K) \geqslant \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

□

§5. Построение различных расширений поля

В этом параграфе будет доказано, что у двумерного локального поля смешанной характеристики существует достаточно много попарно различных расширений степени p. Этот результат будет использоваться в следующем параграфе.

Лемма 5.1. *Пусть K – двумерное локальное поле смешанной характеристики. Пусть $a, b \in K$, $v(a) > -1$, $v(b) > -1$. Пусть многочлены*

$$f(X) = X^p - X - a, \qquad g(X) = X^p - X - b$$

раскладываются в поле K на линейные множители. Пусть

$$\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Тогда многочлен

$$h(X) = X^p - X - (\alpha a + \beta b)$$

раскладывается в поле K на линейные множители.

Доказательство. По лемме 2.1 достаточно доказать, что многочлен $h(X)$ имеет хотя бы один корень в поле K. Пусть x_a, x_b – некоторые корни многочленов $f(X)$ и $g(X)$ в поле K. Тогда

$$v(x_a) > -\frac{1}{p}, \qquad v(x_b) > -\frac{1}{p}.$$

Положим

$$h_1(X) = h(X + \alpha x_a + \beta x_b).$$

Достаточно доказать, что многочлен $h_1(X)$ имеет корень в поле K. Положим

$$\begin{aligned} c &= (\alpha x_a + \beta x_b)^p - \alpha x_a^p - \beta x_b^p, \\ c_i &= C_p^i (\alpha x_a + \beta x_b)^{p-i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p-1. \end{aligned}$$

Тогда

$$c = \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i \alpha^i x_a^i \beta^{p-i} x_b^{p-i} + (\alpha^p - \alpha) x_a^p + (\beta^p - \beta) x_b^p.$$

При $1 \leqslant i \leqslant p-1$ имеем

$$v(x_a^i x_b^{p-i}) > -1, \qquad v(\alpha x_a + \beta x_b)^{p-i} > -\frac{p-1}{p},$$

следовательно,

$$v(c) > 0, \qquad v(c_i) > 0.$$

Преобразуем $h_1(X)$:

$$\begin{aligned}
h_1(X) &= (X + \alpha x_a + \beta x_b)^p - (X + \alpha x_a + \beta x_b) - (\alpha a + \beta b) \\
&= X^p + \sum_{i=1}^{p-1} c_i X^i + c + \alpha x_a^p + \beta x_b^p - (X + \alpha x_a + \beta x_b) - (\alpha a + \beta b) \\
&= X^p - X + \sum_{i=1}^{p-1} c_i X^i + c + \alpha f(x_a) + \beta g(x_b) \\
&= X^p - X + \sum_{i=1}^{p-1} c_i X^i + c.
\end{aligned}$$

Многочлен

$$\overline{h_1}(X) = X^p - X$$

имеет в поле $\overline{K}$ простой корень 0, следовательно, по лемме Гензеля, многочлен $h_1(X)$ имеет корень в поле K. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = p,$$

целое число s таково, что $0 < s < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \nmid s$, элементы $a, b \in O_K$ таковы, что $v(a) = v(b) = -\frac{s}{e_K}$, $\overline{a^{-1}b} \notin \overline{K}^p$. Пусть x_a – корень многочлена $X^p - X - a$, и x_b – корень многочлена $X^p - X - b$. Тогда поля $K(x_a)$ и $K(x_b)$ различны.

Доказательство. Обозначим через ω произвольный корень уравнения

$$X^{p-1} + p = 0.$$

Тогда расширение $K(\omega)/K$ ручное, и, следовательно, в $K(\omega)$ выполнены условия на a и b. Получаем, что достаточно доказать утверждение для $K(\omega)$. Далее считаем, что $\omega \in K$.

Предположим, что $K(x_a) = K(x_b)$. Обозначим это поле через L. По лемме 2.1 поле L является вполне разветвленным расширением поля K степени p.

Пусть числа u и w таковы, что $-su + pw = 1$. Положим $\pi_L = x_a^u \pi^w$. Тогда π_L – униформизирующая поля L.

Положим $y_a = x_a\omega$, $y_b = x_b\omega$. Тогда

$$v(y_a) = v(y_b) = \frac{1}{p-1} - \frac{s}{e_L} > 0,$$

$y_a^p + py_a = \omega^p a$, и

$$(1+y_a)^p \equiv 1 + \omega^p a \mod \pi_L^{\frac{p}{p-1}e_L - ps} M_L;$$

аналогично получаем

$$(1+y_b)^p \equiv 1 + \omega^p b \mod \pi_L^{\frac{p}{p-1}e_L - ps} M_L.$$

Из того, что $\overline{L} = \overline{K}$, следует, что существует элемент $z \in K$, для которого в поле $\overline{L}$ выполнено

$$\overline{\pi_L^{-\frac{1}{p-1}e_L + s} y_b} = \overline{\pi_L^{-\frac{1}{p-1}e_L + s} y_a z}.$$

Имеем

$$\overline{\pi_L^{-\frac{p}{p-1}e_L + ps} \omega^p b} = \overline{\pi_L^{-\frac{p}{p-1}e_L + ps} y_b^p} = \overline{\pi_L^{-\frac{p}{p-1}e_L + ps} y_a^p z^p} = \overline{\pi_L^{-\frac{p}{p-1}e_L + ps} \omega^p a z^p},$$

следовательно,

$$\overline{a^{-1}b} \in \overline{L}^p = \overline{K}^p,$$

что противоречит условию. □

Лемма 5.3. *Пусть K – двумерное локальное поле смешанной характеристики, целое число s таково, что $0 < s < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \nmid s$, и π, t – локальные параметры поля K. Тогда поля, полученные из K присоединением корней многочленов $X^p - X - \pi^{-s}(1+t^i)$ при различных i, не делящихся на p, различны.*

Доказательство. При $i \neq j$ применим лемму 5.2 к

$$a = \pi^{-s}(1+t^i), \qquad b = \pi^{-s}(1+t^j). \qquad \square$$

Лемма 5.4. *Пусть L/K – конечное расширение двумерных локальных полей смешанной характеристики, $e_K > p-1$, β – такое число, что $\frac{1}{e_K} < \beta$, и a – такой элемент поля L, что*

$$-\beta \leqslant v(a) < 0.$$

Тогда существует $b \in K$, такой, что

$$v(b) \geqslant -\beta,$$

и уравнение Артина–Шрайера

$$x^p - x = a + b$$

задает вполне разветвленное расширение поля L степени p.

Доказательство. Если уравнение $x^p - x = a$ не имеет решений в поле L, то подойдет $b = 0$.

Положим $b_{ij} = \pi^{-i}(1 + t^j)$ при

$$0 < i < \min\Big\{e_K\beta, \frac{pe_K}{p-1}\Big\}, \quad p \nmid i, \qquad i \neq -v(a),$$

и обозначим через K_{ij} поле, полученное из K присоединением корня уравнения $x^p - x = b_{ij}$. По леммам 2.1 и 5.3 поля K_{ij} различны.

Существует только конечное количество подрасширений расширения L/K, следовательно, для некоторых i_0, j_0 поле $K_{i_0j_0}$ не содержится в L. Проверим, что $b = b_{i_0j_0}$ удовлетворяет условию.

По лемме 5.1 из того, что уравнение Артина–Шрайера с правой частью a имеет решение в поле L, а с правой частью b не имеет решений в поле L, следует, что уравнение с правой частью $a+b$ не имеет решений в поле L. При этом из того, что $v(b) \neq v(a)$ следует, что $v(a + b) < 0$. Применяя лемму 2.1, получаем, что b подходит. □

§6. Погружение расширения с группой Галуа $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$

Выведем следствие из теоремы 2.3.

Следствие 6.1. *Пусть $n, s, i, A[s, i]$ – такие, как в теореме 2.3, пусть $m < n$, и пусть $X[s, i]$ – решение системы, состоящей из уравнений системы (1) при $s < m$. Тогда $v(X[s, i]) \geqslant -\frac{s\alpha}{p}$ при всех $s < m$.*

Доказательство. Дополним данную систему до системы вида (1), положив еще не определенные коэффициенты $A[s, i]$ равными 0, и применим теорему 2.3. □

Теорема 6.2. *Пусть n – натуральное число, K – двумерное локальное поле смешанной характеристики, $e_K > p - 1$, и h – такое число, что*

$$0 < h < \frac{e_K}{n-1}.$$

Пусть L/K – вполне разветвленное расширение Галуа, такое, что группа $\mathrm{Gal}(L/K)$ изоморфна $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят h. Тогда расширение L/K можно погрузить в расширение Галуа с группой Галуа, изоморфной U_n.

Доказательство. Положим $\alpha = \frac{h}{e_K}$. Тогда $\alpha < \frac{1}{n-1}$.

Расширение L/K равно композиту расширений K_i/K, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, где K_i/K – циклические расширения степени p. При этом числа

$h(K_i/K)$ равны скачкам расширения L/K, и, следовательно, не превосходят h. По лемме 2.1 расширения K_i/K можно задать уравнениями вида

$$X[1,i]^p - X[1,i] = A[1,i], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{3}$$

где

$$v(A[1,i]) = -\frac{1}{e_K}h(K_i/K) \geqslant -\frac{1}{e_K}h \geqslant -\alpha.$$

Рассмотрим систему вида (1), коэффициенты которой $A[1,i]$ таковы, как в (3), а для остальных выполнено $v(A[s,i]) \geqslant -s\alpha$. Любая система такого вида состоит из $\frac{n^2-n}{2}$ уравнений. Если упорядочить уравнения лексикографически по (s,i), получится, что каждое следующее уравнение является уравнением Артина–Шрайера над полем, полученным присоединением корней предыдущих уравнений. Следовательно, решение системы задает p-расширение поля K, степень которого не превосходит $p^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Если все уравнения Артина–Шрайера задают нетривиальные расширения полей, то система (1) задает расширение степени $p^{\frac{n^2-n}{2}}$. Порядок группы U_n также равен $p^{\frac{n^2-n}{2}}$. Применяя теорему 2.3, получаем, что в этом случае расширение является расширением Галуа и его группа Галуа равна U_n.

Будем рассматривать системы, состоящие из уравнений вида

$$X[s,i]^p - X[s,i] = \sum_{r=i+1}^{s+i-1} A[r-i,i]X[s+i-r,r] + A[s,i],$$
$$1 \leqslant i \leqslant n-s, \qquad s \leqslant m$$

при $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Индукцией по m докажем, что можно подобрать коэффициенты такой системы так, что при $s \leqslant m$ выполнено

$$v(A[s,i]) \geqslant -s\alpha,$$

и все входящие в систему уравнения Артина–Шрайера задают нетривиальные расширения с положительными скачками.

При $m = 1$ подойдут коэффициенты, заданные формулой (3).

Докажем переход от $m-1$ к m. Предположим, что существуют коэффициенты, при которых система уравнений при $s \leqslant m-1$ удовлетворяет условию. Докажем, что можно подобрать $A[m,i]$ так, что система уравнений при $s \leqslant m$ будет удовлетворять условию.

Положим
$$a_i = \sum_{r=i+1}^{m+i-1} A[r-i,i]X[m+i-r,r],$$
обозначим искомые элементы $A[m,i]$ через b_i, а неизвестные $X[m,i]$ через x_i. Обозначим через E поле, полученное из K присоединением корней системы уравнений при $s \leqslant m-1$. Требуется доказать, что для некоторых $b_i \in K$, таких, что $v(b_i) \geqslant -m\alpha$, последовательное присоединение к полю E решений уравнений
$$x_1^p - x_1 = a_1 + b_1, \quad x_2^p - x_2 = a_2 + b_2, \ \dots \tag{4}$$
задает нетривиальные расширения.

По следствию 6.1 при $s \leqslant m-1$ выполнено
$$v(X[s,i]) \geqslant -\frac{s\alpha}{p},$$
следовательно,
$$\begin{aligned} v(a_i) &\geqslant \min\Big\{-(r-i)\alpha - (m+i-r)\frac{\alpha}{p} \mid i+1 \leqslant r \leqslant m+i-1\Big\} \\ &= -m\alpha + \frac{p-1}{p}\alpha > -m\alpha. \end{aligned}$$
Будем применять лемму 5.4 последовательно к полю E и a_1, затем – к полю $E(x_1)$ и a_2, где x_1 – некоторое решение первого уравнения из (4), затем – к полю $E(x_1, x_2)$ и a_3, где x_2 – некоторое решение второго уравнения из (4), и т.д.; во всех случаях будем полагать $\beta = m\alpha$. $\square$

Список литературы

1. E. Inaba, *On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic* p. — Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **12** (1961), 26–36.
2. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова, *Расширения Инабы полных полей характеристики* 0. — Чебышёвский сборник **20** (2019), вып. 3, 124–133.
3. О. Ю. Иванова, *Задание свирепого циклического расширения уравнением Инабы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 74–84.
4. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions. A constructive approach*, Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.

Zhukov I. B., Ivanova O. Yu. On Inaba extensions for two-dimensional local fields of mixed characteristic.

The paper is devoted to extensions of higher local fields determined by certain matrix equations introduced by E. Inaba. It is proved that

any extension decomposable into a tower of Artin–Schreier extensions can be embedded into an Inaba extension that is a composite of the given extension and another Inaba extension. Next, any p-extension with elementary Abelian Galois group can be embedded into an extension with the Galois group isomorphic to a group of unipotent matrices over the field with p elements.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб., д. 7–9,
1199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: igor@formulo.org
E-mail: olgaiv80@mail.ru

Поступило 27 октября 2022 г.